Tạp chí Cơ Học T.VI, 1984 Số 4 (trang 26-32)

VỀ CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC HỆ CƠ HỌC VỚI LIÊN KẾT KHÔNG GIỮ

ĐỖ SANH

§ 1. MỞ ĐẦU

Khảo sát chuyển động của một hệ cơ học, vị trí của nó được xác định nhờ các tọa độ La-gơ-răng q_i $(i = \overline{1, n})$. Giả sử hàm La-gơ-răng của hệ là $L = T - \Pi$, ở đó:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} a_i^* \dot{q}_i + a^*; \quad \Pi = \Pi(t, q_i),$$

các hệ số a_{ij}^*, a_i^*, a^* là những hàm đã biết của các tọa độ mở rộng q_i $(i = \overline{1, n})$ và thời gian t, $\|a_{ij}^*\|$ là ma trận vuông đối xứng và không suy biến. Giả sử các liên kết đặt lên hệ có dạng:

$$f_\alpha(t, q_i) \geqslant 0; \ \alpha = \overline{1, S}; \ i = \overline{1, n}; \ S < n. \tag{1.1}$$

Liên kết như vậy được gọi là liên kết không giữ hay liên kết một phía. Khi (1.1) lấy dấu bằng thì liên kết được gọi là ở trạng thái căng, trong trường hợp ngược lại liên kết gọi là ở trạng thái không căng. Chuyển động của hệ với liên kết (1.1) có thể xảy ra theo hai giai đoạn: trong giai đoạn đầu liên kết ở trạng thái căng, chuyển động của hệ xảy ra như là với liên kết giữ:

$$f_\alpha(t, q_i) = 0; \quad \alpha = \overline{1, S}, \tag{1.2}$$

trong giai đoạn tiếp theo hệ sẽ rời khỏi liên kết và hệ chuyển động như là một hệ tự do. Như vậy, trong giai đoạn đầu chúng ta có hệ hô-lô-nôm với $(n - S)$ bậc tự do, trong giai đoạn tiếp theo chúng ta có hệ với n bậc tự do, tức là hệ không liên kết.

Giả sử rằng tại thời điểm t_1 hệ rời khỏi liên kết (1.2). Chúng ta xét hai bài toán sau:

Bài toán I: Xác định thời điểm t_1 cùng với vị trí và vận tốc của hệ tại thời điểm này,

$$q_i^1 = q_i(t_1); \ \dot{q}_i^1 = \dot{q}_i(t_1); \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.3}$$

Bài toán II: Viết phương trình chuyển động của hệ, sau khi hệ rời khỏi liên kết (1.2).

Chú thích: Do điều kiện hình học của liên kết, sau khi hệ rời khỏi liên kết, hệ có thể quay trở lại liên kết, tức là liên kết lại có thể trở lại trạng thái căng. Trong trường hợp như vậy, bài toán trở nên phức tạp, vì khi liên kết chuyển từ trạng thái không căng sang trạng thái căng, có thể xảy ra hiện tượng va chạm. Vì lý do đề đơn giản việc khảo sát, chúng ta giả thiết rằng khi hệ rời khỏi liên kết không xảy ra hiện tượng va chạm và sau khi hệ rời khỏi liên kết, hệ không quay về liên kết. Nói khác đi, chúng ta giả thiết rằng:

$$f_\alpha(t, q_i) \neq 0, \ \forall t > t_1.$$

§ 2. KHẢO SÁT HỆ VỚI LIÊN KẾT KHÔNG GIỮ (1.1)

Như đã nói ở trên, trong giai đoạn đầu chúng ta có thể xem hệ chuyển động với liên kết giữ (1.2), nó có thể viết trong dạng tương đương [3, 4]:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{\alpha i}\ddot{q}_i + f_{\alpha}^{\circ} = 0; \quad \alpha = \overline{1, S}, \; i = \overline{1,n}, \quad S < n, \tag{2.1}$$

trong đó

$$f_{\alpha i} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_i}, \; f_\alpha^\circ = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial q_i \partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2}. \tag{2.2}$$

Theo nguyên lý tương thích, chuyển động của hệ với liên kết (2.1) được mô tả bằng phương trình:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^* \tag{2.3}$$

trong đó $Q_i = Q_i(t, q_j, \dot{q}_j)$ là lực mở rộng của các lực không thế, Q_i^* là phản lực liên kết, nó được xác định nhờ hệ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{\alpha i} Q_i^* + F_\alpha = 0, \; \alpha = \overline{1, S}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\gamma i} Q_i^* = 0, \quad \gamma = \overline{1, p} = n - S \tag{2.5}$$

Các hệ số $F_{\alpha i}$, F_α là những hàm đã biết của tọa độ mở rộng, vận tốc mở rộng và thời gian, chúng được tính theo các công thức sau [1, 3, 4]:

$$F_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha j} a_{ij}; \; F_\alpha = f_\alpha^\circ + \sum_{j=1}^{n} F_{\alpha j} Q_j + \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha j} \psi_j;$$

$$\psi_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[\sum_{k,m=1}^{n} (k, m, j)\dot{q}_k \dot{q}_m + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial a_k^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kj}^*}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial t} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right) \right], \tag{2.6}$$

$\|a_{ij}\|$ là ma trận ngược của ma trận quán tính $\|a_{ij}^*\|$, nó cũng là ma trận vuông cấp n và khả nghịch.

$(k, m, j) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}^*}{\partial q_m} + \frac{\partial a_{mj}^*}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{km}^*}{\partial q_j} \right)$ là ký hiệu Kơ-rít-tô-phôn (loại ba chỉ số) loại một.

Phương trình (2.5) biểu diễn điều kiện lý tưởng của liên kết (2.1), [1,4], ở đó các hệ số $d_{\gamma i}$ là các hệ số trong các biểu thức của gia tốc La-gơ-răng được biểu diễn qua tác gia tốc giả khi kể đến liên kết (2.1):

$$\ddot{q}_i = \sum_{\nu=1}^{p} d_{\nu i}\Pi_\nu + a_i, \quad i = \overline{1, n} \tag{2.7}$$

Từ (2.4), (2.5) chúng ta tìm được

$$Q_i^* = Q_i^*(t, q_j, \dot{q}_j), \quad i = \overline{1, n} \tag{2.8}$$

Sau đó chúng ta tích phân hệ phương trình (2.3) với điều kiện đầu xác định chúng ta tìm được :

$$q_i = q_i(t)\,;\ \dot{q}_i = \dot{q}_i(t),\ i = \overline{1, n} \tag{2.9}$$

Thay (2.9) vào (2.8) chúng ta nhận được:

$$Q_i^* = Q_i^*(t, q_j(t), \dot{q}_j(t)) = Q_i^*(t) \tag{2.10}$$

là hàm đã biết của t,

Như đã biết, tại thời điểm hệ rời khỏi liên kết, tức là tại thời điểm mà liên kết chuyển từ trạng thái căng sang trạng thái không căng, phản lực liên kết cần phải triệt tiêu. Vậy thời điểm t_1 được tìm từ phương trình

$$Q_i^*(t) = 0 \tag{2.11}$$

Sau khi xác định thời điểm t_1 từ (2.11) chúng ta thay chúng vào trong (2.9) chúng ta xác định được vị trí và vận tốc tại thời điểm hệ rời khỏi liên kết, tức là các đại lượng (1.3)

Trong một số trường hợp cụ thể chúng ta có thể xác định trực tiếp thời điểm t_1 cùng với tọa độ và vận tốc của hệ tại thời điểm này.

Chúng ta hãy quay về các phương trình (2.4), (2.5). Chúng ta giả thiết rằng:

$$F_\alpha \not\equiv 0,\ \alpha = \overline{1, S}. \tag{2.12}$$

Trong trường hợp ngược lại không tồn tại thời điểm t_1 theo ý nghĩa nói trên, nghĩa là hệ không thể rời khỏi liên kết. Trường hợp này là trường hợp khi (2.1) là tích phân đầu của cơ hệ không liên kết, tức là cơ hệ mà chuyển động của nó được mô tả bằng hệ phương trình

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i\,;\ i = \overline{1, n} \tag{2.13}$$

Chúng ta giả thiết điều kiện sau được thực hiện:

$$\det \left\| \begin{matrix} F_{\alpha i} \\ d_{\nu i} \end{matrix} \right\| \neq 0. \tag{2.14}$$

Khi đó Q_i^* $(i = \overline{1, n})$ triệt tiêu khi và chỉ khi

$$F_\alpha (t, q_i, \dot{q}_i) = 0. \tag{2.15}$$

Lúc đó chúng ta nhận được 3 phương trình (2.4), (2.5) và (2.11)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0\,;\ \alpha = \overline{1, S}, \tag{2.16}$$

chứa (2n−1) ẩn $\{\dot{q}_i^1, q_i^1, t_1\}$.

Nói chung $3s < 2n+1$ nên bài toán sẽ có lời giải (tức là sẽ tính được các đại lượng t_1, q_i^1, $\dot{q}_i^1$) nếu chúng ta tìm được $(2n + 1 - 3s)$ tích phân đầu của hệ (2.3)

Dễ dàng thấy rằng trong giai đoạn tiếp theo, tức là sau khi rời khỏi liên kết, chuyển động của hệ sẽ được mô tả bằng hệ phương trình:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i ; \; i = \overline{1, n} \tag{2.17}$$

với điều kiện đầu (1.3)

Thí dụ: **Khảo sát chuyển động của con lắc**

Chất điểm **M** có khối lượng $m = 1$ và độ dài của dây OM bằng l = const. Tại thời điểm đầu con lắc lệch với phương thẳng đứng một góc bằng φ_0 và nhận được vận tốc $\vec{v}_0$ thẳng góc với OM_0 trong mặt phẳng thẳng đứng.

Hãy xác định vận tốc và vị trí của chất điểm M khi dây chuyển từ trạng thái căng sang trạng thái không căng và viết phương trình chuyển động của chất điểm M trong giai đoạn tiếp theo.

Chọn các trục Ox nằm ngang và trục Oy thẳng đứng. Vị trí của chất điểm M được xác định nhờ các tọa độ x và y. Phương trình liên kết có dạng

$$x^2 + y^2 - l^2 \leqslant 0 \tag{2.18}$$

Để tìm vị trí và vận tốc của con lắc tại thời điểm t_1 chúng ta sử dụng điều kiện (2.15). Hàm La-gơ-răng của con lắc bằng

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + gy$$

Theo công thức (2.6) chúng ta có

$$F_\alpha = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + gy \tag{2.19}$$

Do đó điều kiện (2.15) lấy dạng:

$$(\dot{x}^1)^2 + (\dot{y}^1)^2 + gy^1 = 0 \tag{2.20}$$

nó cho chúng ta xác định $\dot{x}^1$, $\dot{y}^1$, x^1, y^1 chúng còn thỏa mãn các phương trình sau:

$$(x^1)^2 + (y^1)^2 - l^2 = 0 \tag{2.21}$$

$$x^1\dot{x}^1 + y^1\dot{y}^1 = 0 \tag{2.22}$$

Để bài toán có lời giải chúng ta cần tìm thêm một tích phân đầu. Rõ ràng hệ có tích phân năng lượng:

$$(\dot{x}^1)^2 + (\dot{y}^1)^2 - 2gy^1 = v_0^2 - 2gl\,\text{sos}\varphi_0 \tag{2.23}$$

Từ (2.20) rút ra ngay:

$$y^1 < 0 \tag{2.24}$$

Từ (2.20) và (2.23) chúng ta nhận được

$$y^1 = (2gl\cos\varphi_0 - v_0^2) / 3g \tag{2.25}$$

Từ (2.24) chúng ta thấy rằng vận tốc đầu của con lắc cần thỏa mãn:

$$v_0^2 > 2gl\cos\varphi_0$$

Tọa độ x^1 được xác định từ (2.21)

$$x^1 = \sqrt{l^2 - (y^1)^2}, \tag{2.26}$$

còn v_1 được tính từ (2.20)

$$v_1 = \sqrt{-gy^1} = \sqrt{(v_0^2 - 2gl\cos\varphi_0)/3}. \tag{2.27}$$

Chuyển động của con lắc sau khi liên kết bị mất, tức là khi dây đã bị chùng sẽ được mô tả bằng phương trình:

$$\ddot{x} = 0, \; \ddot{y} = g, \tag{2.28}$$

với điều kiện đầu (2.25), (2.26) và với mọi $t > t_1$.

§ 3. KHẢO SÁT TRƯỜNG HỢP KHI TRÊN HỆ ĐẶT CẢ LIÊN KẾT GIỮ VÀ LIÊN KẾT KHÔNG GIỮ

Giả sử các liên kết đặt lên hệ được viết thành hai nhóm:

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n) \leqslant 0, \ \alpha = \overline{1, S_1} \tag{3.1}$$

$$g_\beta(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \ \beta = \overline{1, S_2}; \ S_1 + S_2 = S. \tag{3.2}$$

Chúng ta sẽ giải quyết bài toán đã nêu ở trên. Giả sử rằng tại thời điểm t_1 hệ sẽ rời khỏi liên kết (3.1).

Như ở trên, chúng ta xem rằng với mọi $t < t_1$, hệ chuyển động dưới tác động của các liên kết giữ và lý tưởng (3.2) và (3.3)

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \ ; \ \alpha = \overline{1, S_1}, \tag{3.3}$$

còn với mọi $t \geqslant t_1$ hệ chịu chỉ liên kết lý tưởng (3.2)

Trong giai đoạn đầu chúng ta có hệ với (n—s) bậc tự do, phương trình chuyển động của nó có dạng

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^{*o} + \widetilde{Q}_i^* \ ; i = \overline{1, n}, \tag{3.4}$$

trong đó Q_i^{*o} và $\widetilde{Q}_i^*$ là các phản lực liên kết của các liên kết (3.2) và (3.3). Để xác định những phản lực liên kết này chúng ta sử dụng nguyên lý tương thích [3].

$$\sum_{i=1}^{n} F_{\alpha i} Q_i^{*o} + \sum_{i=1}^{n} F_{\alpha i}\widetilde{Q}_i^* + F_\alpha = 0 \ ; \ \alpha = \overline{1, S_1} \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} G_{\beta i} Q_i^{*o} + \sum_{i=1}^{n} G_{\beta i}\widetilde{Q}_i^* + G_\beta = 0 \ ; \ \beta = \overline{1, S_2} \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d^o_{\gamma i} Q_i^{*o} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} \widetilde{d}_{\sigma i} \widetilde{Q}_i^* = 0 \ ; \ \gamma = \overline{1, p_1} = n - S_1; \sigma = \overline{1, p_2} = n - S_2, \tag{3.7}$$

trong đó các đại lượng $F_{\alpha i}$, $G_{\beta i}$, F_α, G_β được tính nhờ các công thức (2.6), khi liên kết (3.3) được viết trong dạng (2.1) và liên kết (3.2) được viết trong dạng

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\beta i}\ddot{q}_i + g_\beta^o = 0,$$

trong đó

$$g_{\beta i} = \frac{\partial g_\beta}{\partial q_i}, \ g_\beta^o = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_\beta}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Các phương trình (3.7) biểu diễn điều kiện lý tưởng của các liên kết (3.2) và (3.3) trong đó các đại lượng $d^o_{\gamma i}$ và $\widetilde{d}_{\sigma i}$ được tính nhờ phương pháp đã nêu trên. Nói cách khác, $d^o_{\gamma i}$ ($\widetilde{d}_{\sigma i}$) là các hệ số trong biểu thức của gia tốc La-go-răng được biểu diễn qua cỏ gia tốc giả khi kể đến các liên kết (3.3) (các liên kết (3.2)).

Khi giải các phương trình (3.5), (3.6) và (3.7), chúng ta nhận được

$$Q_i^{*o} = Q_i^{*o}(t, q_j, \dot{q}_j)\,;\ \tilde{Q}_i^{*} = \tilde{Q}_i^{*}(t, q_j, \dot{q}_j). \tag{3.8}$$

Khi tích phân các phương trình (3.4) với điều kiện đầu, ta có

$$q_i = q_i(t) \tag{3.9}$$

và do đó

$$Q_i^{*o} = Q_i^{*o}(t)\,;\ \tilde{Q}_i^{*} = \tilde{Q}_i^{*}(t). \tag{3.10}$$

Chúng ta giả thiết rằng (3.3) không phải là những tích phân đầu của hệ, tức là [2]

$$\sum_{i=1}^{n} F_{\alpha i} Q_{i o}^{*} + F_{\alpha} \not\equiv 0, \tag{3.11}$$

trong đó Q_{io}^{*} là nghiệm của hệ phương trình

$$\sum_{i=1}^{n} G_{\beta i} Q_{io}^{*} + G_{\beta} = 0\,;\ \beta = \overline{1, S_2}, \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\gamma i}^{o} Q_{io}^{*} = 0, \gamma = \overline{1, p_2} = n - S_2, \tag{3.12}$$

nó chính là phản lực sinh ra do các liên kết (3.2) khi bỏ qua ảnh hưởng của liên kết (3.3).

Điều kiện để hệ rời khỏi liên kết (3.3) là

$$\tilde{Q}_i^{*}(t) = 0. \tag{3.13}$$

Từ đó chúng ta xác định được thời điểm t_1 và theo đó xác định được vị trí và vận tốc của hệ tại thời điểm này.

Sau khi hệ rời khỏi các liên kết (3.3) chuyển động của nó sẽ được mô tả bằng phương trình

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + Q_{i\alpha}^{*} \tag{3.14}$$

Trong một số trường hợp cụ thể chúng ta có thể xác định trực tiếp thời điểm t_1 cùng với vị trí và vận tốc của hệ tại thời điểm này.

Giả thiết rằng ma trận

$$\left\| \begin{matrix} \sum F_{\alpha i}(\delta_{ji} + v_{ji}) \\ d_{\gamma j} \end{matrix} \right\| \tag{3.15}$$

có hạng n. Trong (3.15) δ_{ji} là ký hiệu kờ-rơ-néch-ke, còn v_{ji} được tính theo công thức

$$v_{ji} = -\sum_{\beta=1}^{n} G_{\beta j}\frac{\Delta_{\beta i}}{\Delta} \tag{3.16}$$

trong đó $\Delta = \det \| A \|$, còn $\Delta_{\beta i}$ là phần phụ đại số của yếu tố $G_{\beta i}$ của ma trận $\| A \|$.

$$\| A \| = \left\| \begin{matrix} G_{\beta i} \\ \tilde{d}\sigma_i \end{matrix} \right\| \tag{3.17}$$

Phản lực Q_i^* sẽ triệt tiêu khi và chỉ khi

$$\sum_{i=1}^{n} F_{\alpha i} Q_{ic}^{*} + F_{\alpha} = 0, \ \alpha = \overline{1, S}. \tag{3.18}$$

Ngoài ra ta có 2s phương trình (3.2), (3.3), (3.19) và (3.20)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{\beta}}{\partial q_i} \mathring{q}_i = 0; \ \beta = \overline{1, S_2}, \tag{3.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_i} \mathring{q}_i = 0; \ \alpha = \overline{1, S_1}. \tag{3.20}$$

Như vậy chúng ta nhận được $(2s + s_1)$ phương trình chứa $(2n + 1)$ ẩn $\{t_1, q_i^1, \dot{q}_i^1\}$. Nói chung, $(2s + s_1) < 2n + 1$ nên bài toán sẽ giải được nếu chúng ta tìm được $2n + 1 - (2s + s_1)$ các tích phân đầu.

Chú thích

1. Phương pháp trình bày trên lẽ tất nhiên còn có hiệu lực trong trường hợp hệ chịu các liên kết không hô-lô-nôm tuyến tính hoặc phi tuyến đối với vận tốc và cả trường hợp tuyến tính đối với gia tốc.

2. Cũng có thể sử dụng nguyên lý Gao-xơ cho bài toán đã nêu trên.

Địa chỉ :
Trường Đại học Bách khoa HN

Nhận ngày 13/12/1982

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. DO SANH. On the dynamical action of each constraint in a mechanical system, Zagadnienia Drgan' Nieliniowych, N°20, Warsaw, 1979.
2. DO SANH. On the problem of first integrals of mechanical systems Zagadnienia Drgan' Nieliniowych, N°21, Warsaw, 1983.
3. DO SANH. On the principle of compatibility and the motion equations of a constrained mechanical system, ZAMM, N°4, 1980.
4. DO SANH. On the Gauss principle and the motion equations of a constrained mechanical system, Rev. roum. sci. thechn. ser. mec, appl. 25, N°4, 1980.

SUMMARY

ON THE MOTION OF MECHANICAL SYSTEMS WITH UNILATERAL CONSTRAINTS

The motion of the system with unilateral constraints being imposed may be divised into positions, so that in certain positions the constraint is taut and the motion occurs as if the constraint was bilateral and in other positions the constraint is not taut and the motion occurs as if there was no such constraint.

In the present paper two problems are discussed :

1. To determine the constant of time along with the positions and the velocities of the system when the system has just been released from the constraint.

2. To write the equations of motion of the system when the system has been released from the constraint.

SÓNG LÔ-VƠ TRÊN MẶT TRỤ

(Tiếp trang 25)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ЖУК А. П. Волны Стокли в среде начальными напряжениями. ПМ N° 1, 1980

2. ГУЗЬ А.Н. О волнах лява в телах с начальными напряжениями. ДАН УССР сер А, N° 12, 1978.

3. ГУЗЬ А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Наукова Думка, Киев, 1973.

4. НОВАЦКИЙ В. Теория упругости. Мир, Москва, 1975.

5. LÊ MINH KHANH. Propagation des ondes de floquet dans un milieu elastique periodique avec deformations initiales homogenes. Revue « Mecanique appliquee » N° 1 Tome 26, 1981.

6. PHẠM THỊ OANH. Sự truyền sóng mặt Rơ Lây trên mặt trụ của môi trường đàn hồi có biến dạng ban đầu. Tạp chí Cơ học số 3, 1984.

РЕЗЮМЕ

ВОЛНЫ ЛЯВА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОЙ СРЕДЫ С НАЧАЛЬНЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

В работе изучено распространение волн лява на цилиндрической поверхности упругой среды с начальными однородными деформациями. Материал считается сжимаемым и вид упругого потенциала произвольным. Получено дисперционное уравнение для определения скорсти распространения волн в общем случае, а в случае, когда длина волн мала по сравнению с радиусом цилиндра, выдено приближенное дисперционное уравнение.