Tạp chí Cơ học, T.VI, 1984 số 4 (trang 1-4)

CẤU TRÚC TOÁN HỌC CỦA CÁC VẬT THỂ ĐÀN HỒI
IV. LÝ THUYẾT DẺO VÀ CÁC MỞ RỘNG KHÁC

RYCHLEWSKI J.

Xét quá trình chảy của các vật thể cứng dẻo dị hướng có thế dẻo dạng toàn phương ([4])

$$2\psi(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{H} \cdot \underline{\sigma} \tag{4.1}$$

Định luật chảy có dạng

$$\underline{e} = \lambda\, \partial_{\underline{\sigma}} \psi = \lambda \underline{H} \cdot \underline{\sigma} \tag{4.2}$$

Ở đây $\underline{e} \equiv \frac{1}{2}[\underline{\nabla v} + \underline{\nabla v}^T]$ là tenxơ tốc độ biến dạng ; $\underline{v}$ -- trường vận tốc các hạt ;

$$\lambda = \underline{\sigma} \cdot \underline{e} / \underline{\sigma} \cdot \underline{H} \cdot \underline{\sigma} \geqslant 0$$

Cần lưu ý rằng tenxơ dị hướng dẻo $\underline{H}$ cũng có tính đối xứng trông giống như tenxơ độ cứng $\underline{C}$, nghĩa là:

$$H_{ijkm} = H_{jikm} = H_{ijmk} = H_{kmij}$$

Vì vậy tất cả các công thức cơ bản đã xét trước đây đều có thể gán cho tenxơ $\underline{H}$. Ở đây chỉ nêu lại điều cơ bản nhất. Các biểu thức cấu trúc của tenxơ $\underline{H}$ có dạng

$$\underline{H} = \frac{1}{k_1^2}\underline{P}_1 + \dots + \frac{1}{k_\rho^2}\underline{P}_\rho =$$

$$= \frac{1}{k_I^2}\underline{\omega}_I \otimes \underline{\omega}_I + \dots + \frac{1}{k_{VI}^2}\underline{\omega}_{VI} \otimes \underline{\omega}_{VI} \tag{4.3}$$

trong đó $\underline{\omega}_I, \dots, \underline{\omega}_{VI}$ là các trạng thái dẻo riêng của vật đang xét, còn $k_I, \dots, k_{VI}$ là các giới hạn chảy.

Điều kiện chảy dạng toàn phương của vật thể với tính dị hướng bất kỳ

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{H} \cdot \underline{\sigma} - 1 = 0 \tag{4.4}$$

sẽ có dạng

$$\left(\frac{|\underline{\sigma}_1|}{k_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{|\underline{\sigma}_\rho|}{k_\rho}\right)^2 = 1 \tag{4.5}$$

Ở đây $\underline{\sigma}_\alpha = \underline{P}_\alpha \cdot \underline{\sigma}$, $\alpha = 1, \dots, \rho$ thực chất là hình chiếu của tenxơ ứng suất xuống các không gian các trạng thái dẻo riêng $\mathcal{P}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, \rho$. Nếu sử dụng các đại lượng $\sigma_k = \underline{\sigma} \cdot \underline{\omega}_k$, $k = I, \dots, VI$ thì điều kiện chảy có thể viết được như sau

$$\left(\frac{\sigma_I}{k_I}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sigma_{VI}}{k_{VI}}\right)^2 = 1$$

Tổ hợp các hằng số mô tả sự chảy dẻo của vật thể trong trường hợp tổng quát nhất với điều kiện chảy dạng toàn phương và định luật chảy kết hợp sẽ bao gồm 6 giới hạn chảy ; 12 tham số phân bố quy luật chảy, 3 góc ứng với phòng thí nghiệm.

Trong các trường hợp riêng số tham số sẽ giảm đi ; Ví dụ như đối với vật đẳng hướng ngang ta có 5 hằng số : k_1, k_2, k_3, k_4, φ. Ở đây k_i là giới hạn chảy, còn $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ là tham số phân bố quy luật chảy. Đối với vật thể đẳng hướng ngang do $k_{III} = k_{IV}$, $k_V = k_{VI}$ điều kiện chảy dạng toàn phương sẽ là

$$\frac{1}{k_1^2}\left[(\sigma_{11} + \sigma_{22})\sin\varphi + \sqrt{2}\,\sigma_{33}\cos\varphi\right]^2 + \frac{1}{k_2^2}\left[(\sigma_{11} + \sigma_{22})\cos\varphi - \sqrt{2}\,\sigma_{33}\sin\varphi\right]^2$$

$$+ \frac{1}{k_3^2}\left(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right) + \frac{1}{k_4^2}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2\right] = 2$$

Đối với vật thể đẳng hướng, từ (4.5) ta có

$$\underline{H} = \frac{1}{k_{\mathcal{P}}^2}\,\underline{P}_{\mathcal{P}} + \frac{1}{k_{\mathcal{D}}^2}\,\underline{P}_{\mathcal{D}}$$

Điều kiện chảy sẽ có dạng

$$\left(\frac{|\underline{\sigma}_{\mathcal{P}}|}{k_{\mathcal{P}}}\right)^2 + \left(\frac{|\underline{\sigma}_{\mathcal{D}}|}{k_{\mathcal{D}}}\right)^2 = 1$$

Nếu cho rằng áp suất thủy tĩnh không thể gây nên chảy dẻo thì cần phải coi $k_{\mathcal{P}} \to \infty$.

Khi đó ta nhận được

$$|\underline{\sigma}_{\mathcal{D}}| = k_{\mathcal{D}}\,;\ \underline{H} = \frac{1}{k_{\mathcal{D}}^2}\,\underline{P}_{\mathcal{D}}\,;\ \underline{e} = \frac{\underline{e}_{\mathcal{D}}\cdot\underline{\sigma}_{\mathcal{D}}}{k_{\mathcal{D}}^2}\,\underline{\sigma}_{\mathcal{D}}$$

Đây là trường hợp thông thường của vật cứng dẻo với điều kiện chảy Guber – Midet, trong đó $k_{\mathcal{D}}/\sqrt{2}$ là giới hạn chảy đối với trượt.

Xét một khả năng mở rộng sau đây của lý thuyết chảy với thế toàn phương (4.1) (4.2), (4.3), (4.4). Ta lấy phép khai triển vật chất cố định của đơn vị như sau

$$\underline{P}_1 + \ldots + \underline{P}_\rho = \underline{E} \tag{4.6}$$

đưa vào các phép chiếu

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1 + \ldots + \underline{\sigma}_\rho\,;\ \underline{\sigma}_\alpha \equiv \underline{P}_\alpha\cdot\underline{\sigma}$$

và lấy điều kiện chảy ở dạng

$$|\underline{\sigma}_\alpha|^2 \leqslant k_\alpha^2,\ \alpha = 1,\ldots,\rho.$$

Lúc này định luật chảy kết hợp có dạng

$$\underline{e} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \lambda_\alpha\,\underline{\sigma}_\alpha$$

trong đó

$$\lambda_\alpha = 0 \quad \text{khi } |\underline{\sigma}_\alpha| < k_\alpha$$

Kết hợp (1.2) với (4.2) ta sẽ thu nhận được các lý thuyết về các vật thể đàn dẻo lý tưởng. Ở đây xuất hiện vấn đề quan hệ giữa $\underline{C}$ và $\underline{H}$, nghĩa là : mối quan hệ giữa tính đàn hồi và tính dẻo. Giả thiết đơn giản nhất là $\underline{C}$ và $\underline{H}$ có cùng các trạng thái riêng.

Tiếp tục như vậy ta có thể mở rộng các ý tưởng trên cho nhiều trường hợp, thí dụ như trường hợp vật thể đàn nhớt. Tuy nhiên ở đây sẽ chỉ nêu thêm một khả năng mở rộng không tầm thường cho trường hợp lý thuyết đàn hồi phi tuyến.

Một trong những lớp đơn giản nhưng khá phổ biến của các vật thể đàn hồi phi tuyến là

$$\underline{\sigma} = \underline{C}(\underline{\varepsilon}) \cdot \underline{\varepsilon} \tag{4.7}$$

trong đó

$$\underline{C}(\underline{\varepsilon}) = \lambda_1(\underline{\varepsilon})\underline{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho(\underline{\varepsilon})\underline{P}_\rho \tag{4.8}$$

Ở đây P_i được xác định từ (4.6) và không phụ thuộc vào ε. Hình như trường hợp này sẽ tồn tại đối với các vật thể đàn hồi phi tuyến vật lý có biến dạng nhỏ. Các trạng thái riêng trong (4.8) đã được cố định, chỉ có các mô đun độ cứng là phụ thuộc vào biến dạng.

Trên cơ sở của (4.8) có thể xây dựng được một phương án không tồi của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ. Trong trường hợp đẳng hướng $\rho = 2$, $\underline{P}_1 = \underline{P}_{\mathcal{P}}$, $\underline{P}_2 = \underline{P}_{\mathcal{D}}$ ta được lý thuyết Henki Ilusin quen thuộc.

Quan hệ (4.6), (4.7) giữa $\underline{\sigma}$ và $\underline{\varepsilon}$ hiển nhiên được gọi là tựa tuyến tính.

Bây giờ ta hãy dừng lại trong một số vấn đề chưa được giải quyết.

1. Phương pháp đưa ra ở đây trước tiên nhằm vào việc mô tả xem vật đàn hồi « được sắp xếp » ra sao ; có lẽ nó cũng sẽ có ích trong các vấn đề định tính chung của lý thuyết đàn hồi các vật dị hướng. Hiệu quả của nó cũng có thể chờ đợi trong một số bài toán biên. Nếu sử dụng phép khai triển đầy đủ của $\underline{\sigma}$ theo các trạng thái đàn hồi riêng thì phương trình chuyển động có thể viết ở dạng

$$\operatorname{div}(\sigma_{\mathrm{I}}\underline{\omega}_{\mathrm{I}} + \ldots + \sigma_{\mathrm{VI}}\underline{\omega}_{\mathrm{VI}}) + \rho\underline{b} = \rho\underline{a},$$

trong đó $\underline{b}$ là mật độ lực khối ; $\underline{a}$ – gia tốc.

Nếu ω_k không đổi theo các hạt vật chất thì phương trình chuyển động trong ứng suất sẽ có dạng

$$\underline{\omega}_{\mathrm{I}}\nabla\sigma_{\mathrm{I}} + \ldots + \underline{\omega}_{\mathrm{VI}}\nabla\sigma_{\mathrm{VI}} + \rho\underline{b} = \rho\underline{a},$$

trong đó $\nabla\sigma_k$ – gradient trường vô hướng, $\sigma_k = \underline{\sigma} \cdot \underline{\omega}_k$, $k = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{VI}$. Thay định luật Hooke ở dạng (2.3) vào đây và sử dụng quan hệ giữa ε_k và véc tơ dịch chuyển $\underline{\mathcal{U}}$

$$\varepsilon_k = \underline{\omega}_k \cdot \underline{\varepsilon} = \underline{\omega}_k \cdot \nabla\underline{\mathcal{U}}$$

ta sẽ thu nhận được phương trình chuyển động trong dịch chuyển.

2. Cần phải ghi nhận rằng kết quả của việc sử dụng các phương pháp nêu ra ở đây có lẽ sẽ phụ thuộc vào việc tiến triển theo hai hướng.

A. Nghiên cứu các phương pháp nhằm thiết lập mối quan hệ giữa cấu trúc toán học của vật đàn hồi được mô tả bởi các trạng thái đàn hồi riêng và các mô đun độ cứng với cấu trúc vật lý được mô tả bởi các hằng số vật liệu của các phần tử hợp thành (thí dụ đối với vật liệu compozit), bởi các đặc trưng hình học trong cách sắp xếp của chúng, bởi các thông số về nối, về liên kết v.v...

B. Nghiên cứu các quá trình thực nghiệm có hiệu quả và kinh tế nhằm xác định các trạng thái đàn hồi riêng và các mô đun độ cứng bằng các thực nghiệm vĩ mô với việc sử dụng lời giải của các bài toán biên chuẩn.

3. Các nhà toán học có thể dùng biểu thức cấu trúc của vật thể đàn hồi như một minh họa tuyệt đẹp của định lý phổ trong lý thuyết các toán tử tuyến tính, cũng như họ đã coi các bài toán phẳng các dòng chảy của chất lỏng không nén được nhờ một minh họa của lý thuyết biến hình bảo giác.

Cuối cùng xin cám ơn sâu sắc Ban lãnh đạo Viện Hàn lâm khoa học Liên Xô và Viện các vấn đề cơ học thuộc Viện Hàn lâm khoa học Liên xô đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành công trình này. Công trình đã được thảo luận trong các xemina của Viện các vấn đề cơ học Viện HLKH Liên xô, các tổ bộ môn lý thuyết đàn hồi và lý thuyết dẻo

trường đại học Tổng hợp Maxcova, Viện Tinh thể học Viện HLKH Liên xô, Viện các vấn đề cơ bản của kỹ thuật Viện HLKH Ba Lan. Công trình này cũng đã được trình bày tại Hội thảo Quốc tế về cơ học được tổ chức tại Hà nội năm 1983. Xin cảm ơn tất cả mọi người đã tham gia thảo luận, đã có những nhận xét thiết thực và thiện ý.

(Nguyễn Văn Điệp lược dịch)

Varsava 1970 — Maxcova 1983

Nhận ngày 7/8/1984.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. RYCHLEWSKI J. Cấu trúc toán học của các vật thể đàn hồi. I. Các trạng thái đàn hồi riêng, Tạp chí Cơ học, số 4, 1983.
2. RYCHLEWSKI J. Cấu trúc toán học của các vật thể đàn hồi. II. Các hằng số đàn hồi Tạp chí Cơ học, số 1, 1984.
3. RYCHLEWSKI J. Cấu trúc toán học của các vật thể đàn hồi. III. Các trạng thái riêng của các vật thể đẳng hướng ngang. Tạp chí Cơ học số 3, 1984.
4. OLSZAK W., URBANOWSKI W. The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogenous anisotropic elastic-plastic bodies; Arch. Mech. Stos. 8, 1956.

РЕЗЮМЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УПРУГИХ ТЕЛ IV. ПЛАСТИЧНОСТЬ И ДРУГИЕ ОБОБЩЕНИЯ

Понятие собственного элемента линейного преобразования 6-мерного пространства симметричных тензоров второго ранга было использовано в частях I, II, III для описания закона Гука. Здесь показано, что оно с успехом работает и в теории пластичности. Дан общий вид квадратичного условия текучести, для произвольного анизотропного тела. Предложен путь обобщения теории малых упруго-пластических деформаций на анизотропные тела