Tạp Chí Cơ Học T. VI, 1984 Số 3 (Trang 27 – 32)

SỰ TRUYỀN SÓNG MẶT "RƠ LÂY" TRÊN MẶT TRỤ CỦA MÔI TRƯỜNG ĐÀN HỒI CÓ BIẾN DẠNG BAN ĐẦU

PHẠM THỊ OANH

Đối với môi trường đàn hồi tuyến tính không có biến dạng ban đầu, sự truyền sóng mặt Rơ lây trên mặt phẳng cũng như mặt trụ đã được trình bày ở nhiều tài liệu chẳng hạn [2]. Trong bài này xét sự truyền sóng mặt « Rơ lây » trên mặt trụ của môi trường đàn hồi với biến dạng ban đầu thuần nhất. Vật liệu là nén được và thế biến dạng là tùy ý. Ứng dụng lý thuyết tuyến tính hóa của A. H. Гузь [1] dẫn ra phương trình xác định tốc độ sóng trong trường hợp tổng quát và xấp xỉ nó trong trường hợp bước sóng nhỏ hơn nhiều so với bán kính mặt trụ. Xét với một dạng cụ thể của thế biến dạng. Trong trường hợp đàn hồi tuyến tính, không có biến dạng ban đầu các kết quả nhận được trở về các kết quả trình bày trong [2].

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét môi trường đàn hồi vô hạn với lỗ hổng hình trụ bán kính R_o, bên trong lỗ hổng là trống rỗng. Mặt biên $r = R_o$ tự do đối với ứng suất (R_o là bán kính trụ trong trạng thái ban đầu). Chúng ta phân biệt 3 trạng thái của môi trường.

– Trạng thái tự nhiên: Ứng suất, biến dạng bằng không.

– Trạng thái ban đầu: Môi trường có biến dạng ban đầu cho trước nhưng chưa bị kích động. Các đại lượng ứng suất, biến dạng, dịch chuyển ký hiệu tương ứng là : σ_{ij}^{*o}, ε_{ij}^{o}, u_i^o.

– Trạng thái bị kích động: các đại lượng ứng suất, biến dạng, dịch chuyển ký hiệu tương ứng là $\sigma_{ij}^{*'}$, ε_{ij}', u_i' và:

$$\sigma_{ij}^{*'} = \sigma_{ij}^{*o} + \sigma_{ij}^{*} ; \quad \varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij}^{o} + \varepsilon_{ij} ; \; u_i' = u_i^o + u_i .$$

Các đại lượng σ_{ij}^*, ε_{ij}, u_i là các kích động. Giả thiết các kích động là bé ta có thể ứng dụng lý thuyết tuyến tính hóa của A. H. Гузь [1].

Ta chọn hệ tọa độ Lagrăng trùng với hệ tọa độ trụ trong trạng thái tự nhiên (r, φ, z). Giả thiết cho rằng biến dạng ban đầu thuần nhất và có dạng:

$$\begin{aligned} u_r^o &= (\lambda_1 - 1)r, \\ u_\varphi^o &= 0, \\ u_z^o &= (\lambda_3 - 1)z, \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó:

$$\lambda_1, \lambda_3 = \text{const},$$

$$\sigma_{rr}^{*o} = \sigma_{\varphi\varphi}^{*o} = \sigma_1,$$

$$\sigma_{zz}^{*o} = \sigma_3$$

Trong trường hợp tổng quát, cần xác định kích động của chuyển dịch u_r, u_φ, u_z Đưa vào các hàm thế ψ, χ và biểu diễn [1].

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi - \frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\chi,$$
$$u_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}\psi - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z}\chi, \tag{1.2}$$
$$u_z = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}B_o\left(\Delta + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\chi,$$

trong đó
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

τ : biến thời gian (dùng theo ký hiệu trong [1]). Khi đó thay cho việc tìm $\vec{u}$ ta đi tìm 2 hàm vô hướng ψ, χ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\left(\Delta + M\frac{\partial^2}{\partial z^2} - L\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\psi = 0, \tag{1.3}$$
$$\left[\left(\Delta + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(\Delta + F\frac{\partial^2}{\partial z^2} - D\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) - E\Delta\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\chi = 0.$$

với các điều kiện biên tại $r = R = \lambda_1^{-1}R_o$:

$$\lambda_1^2\left\{(A_o - a_{12})\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi + \left[-A_o\frac{\partial^2}{\partial r^2} - a_{12}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + a_{13}B_o\left(\Delta + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial z}\chi\right\}_{r=R} = P_r^*,$$
$$\lambda_1^2\mu_{12}\left\{\left(-D_o\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\psi - (1 + D_o)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi\partial z}\right\}_{r=R} = P_\varphi^*,$$
$$\mu_{13}\lambda_1\lambda_3\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z}\psi + \frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + Q_oB_o\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\Delta + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\right]\chi\right\}_{r=R} = P_z^*. \tag{1.4}$$

P_r^*, P_φ^*, P_z^* là kích động lực mặt (trong bài toán đang xét chúng $=0$). Trong đó a_{ij}, μ_{ij} là hằng số phụ thuộc vật liệu (thế đàn hồi) và trạng thái ban đầu. A, B,..., A_o,... Q_o là hàm của a_{ij}, μ_{ij} và σ_{ij}^{*o}.

Chẳng hạn :

$$A = \frac{\mu_{13} + \sigma_3\lambda_1^{-2}}{a_{11} + \sigma_1\lambda_1^{-2}}, \quad B = \frac{\rho\lambda_1^{-2}}{a_{11} + \sigma_1\lambda_1^{-2}},$$
$$F = \frac{a_{33} + \sigma_3\lambda_3^{-2}}{\mu_{13} + \sigma_1\lambda_3^{-2}}, \quad D = \frac{\rho\lambda_3^{-2}}{\mu_{13} + \sigma_1\lambda_3^{-2}},$$
$$E = \frac{(a_{11} + \mu_{13})^2}{(a_{11} + \sigma_1\lambda_1^{-2})(\mu_{13} + \sigma_1\lambda_3^{-2})},$$

$$A_o = a_{11} + \sigma_1\lambda_1^{-2},\ D_o = 1 + \sigma_1\lambda_3^{-2}\mu_{13}^{-1},\ B_o = \frac{a_{11} + \sigma_1\lambda_1^{-2}}{a_{13} + \mu_{13}}.$$

§2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để xét sự truyền sóng «Rơ lây» trên mặt biên tự do ta tìm kích động của chuyển dịch dưới dạng

$$\vec{u} = (u_r,\ o,\ u_z),$$
$$u_r = u_r(r, z, \tau),$$
$$u_z = u_z(r, z, \tau),$$

khi đó từ (1.2) suy ra:

$$u_r = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\chi,$$
$$u_z = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} B_o \left(\triangle + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\chi. \tag{2.1}$$

Trong đó $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

và χ xác định từ phương trình.

$$\left[\left(\triangle + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\left(\triangle + F\frac{\partial^2}{\partial z^2} - D\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) - E\triangle\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right]\chi = R \tag{2.2}$$

với điều kiện biên

$$\left[-A_o\frac{\partial^2}{\partial r^2} - a_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + a_{13}B_o\left(\triangle + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial z}\chi\Big|_{r=R} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D_o B_o\left(\triangle + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\right]\chi\Big|_{r=R} = 0. \tag{2.3}$$

Tìm nghiệm của (2.2) dưới dạng:

$$\chi = G(r)\, e^{ik(z - c\tau)} \tag{2.4}$$

Thế (2.4) vào (2.2) và biến đổi ta đi đến phương trình xác định G(r).

$$(\triangle - \gamma_1^2)(\triangle - \gamma_2^2)\, G(r) = 0 \tag{2.5}$$

trong đó:

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{k^2}{2}\left[(A + F - E) - (B + D)C^2 \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{[(A + F - E) - (B + D)C^2]^2 - 4(BC^2 - A)(DC^2 - F)}\right] \tag{2.6}$$

Nghiệm của (2.5) thỏa mãn điều kiện tắt dần

$$G(r) \to 0 \text{ khi } r \to \infty$$

là:

$$G(r) = G_1(r) + G_2(r) = \alpha K_o(\gamma_1 r) + \beta K_o(\gamma_2 r) \tag{2.7}$$

K_o là hàm «МАКДОНАЛЬДА»; α, β là các hằng số.

Nghiệm này tồn tại với điều kiện γ_1^2, γ_2^2 thực, dương và phân biệt. Vậy để tồn tại sóng «Rơ lây» thì điều kiện đặt lên tốc độ sóng là:

$$C^2 > 0$$
$$C^2 \notin [C_1^2,\ C_2^2] \tag{2.8}$$
$$C^2 < \min\left(\frac{A + F - E}{B + D},\ \frac{A}{B},\ \frac{F}{D}\right)$$

Trong đó :

$$\begin{cases} C_{1,2}^2 = \dfrac{B(A - E - F) + D(F - E - A) \pm \sqrt{\mathcal{P}}}{(B - D)^2} \quad \text{với } \mathcal{P} \geqslant 0, \\ C_{1,2}^2 = 0 \quad \text{với } \mathcal{P} < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\mathcal{P} = [B(A - F - E) + D(F - E - A)]^2 - (B - D)^2[(A + F - E)^2 - 4AF].$$

Bây giờ ta dẫn ra phương trình xác định tốc độ sóng C.

Xuất phát từ điều kiện biên (2.3) chú ý tới (2.4) và (2.7) ta đi đến :

$$\left[(a_{13}B_o\theta_1^2 - A_o\gamma_1^2)K_o(\gamma_1 R) + \frac{\gamma_1}{R}(a_{12} - A_o)K_1(\gamma_1 R)\right]\alpha +$$

$$+\left[(a_{13}B_o\theta_2^2 - A_o\gamma_2^2)K_o(\gamma_2 R) + \frac{\gamma_2}{R}(a_{12} - A_o)K_1(\gamma_2 R)\right]\beta = 0,$$

$$\gamma_1[k^2 + D_oB_o\theta_1^2)K_1(\gamma_1 R)\alpha + \gamma_2[k^2 + D_oB_o\theta_2^2]K_1(\gamma_2 R)\beta = 0 \tag{2.10}$$

trong đó $\qquad \theta_{1,2}^2 = \gamma_{1,2}^2 - Ak^2 + Bk^2C^2$

Điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường của hệ (2.10) dẫn đến phương trình tán sắc, cho phép xác định tốc độ sóng C :

$$\frac{1}{\bar{\gamma}_1}(1 + D_oB_o\bar{\theta}_2^2)(a_{13}B_o\bar{\theta}_1^2 - A_o\bar{\gamma}_1^2)\frac{K_o(\gamma_1 R)}{K_1(\gamma_1 R)} +$$

$$+ \frac{\bar{\gamma}_1(a_{12} - A_o)(1 + D_oB_o\bar{\theta}_2^2)}{\gamma_1 R} - \frac{\bar{\gamma}_2(a_{12} - a_o)(1 + D_oB_o\bar{\theta}_1^2)}{\gamma_2 R} -$$

$$- \frac{1}{\bar{\gamma}_2}(1 + D_oB_o\bar{\theta}_1^2)(a_{13}B_o\bar{\theta}_2^2 - A_o\bar{\gamma}_2^2)\frac{K_o(\gamma_2 R)}{K_1(\gamma_2 R)} = 0 \tag{2.11}$$

trong đó : $\qquad \bar{\gamma}_i = \gamma_i/k\ ;\ \bar{\theta}_i = \theta_i/k\ ,\ i = 1,2.$

Với giả thiết bước sóng bé hơn nhiều so với bán kính lỗ hổng ta có $\gamma_1 R$, $\gamma_2 R$ khá lớn, khi đó xấp xỉ K_n dưới dạng : $K_n(z) = \sqrt{\pi/2z}\ \exp(-z)$. Từ (2.11) dẫn đến :

$$\bar{\gamma}_2(1 + D_oB_o\bar{\theta}_2^2)(a_{13}B_o\bar{\theta}_1^2 - A_o\bar{\gamma}_1^2) = \bar{\gamma}_1(1 + D_oB_o\bar{\theta}_1^2)(a_{13}B_o\bar{\theta}_2^2 - A_o\bar{\gamma}_2^2). \tag{2.12}$$

Tóm lại : Tốc độ sóng « Rơ lây » trên mặt trụ được xác định từ phương trình (2.11) hoặc (2.12) (đối với trường hợp sóng ngắn) và thỏa mãn điều kiện (2.8)

§3 VÍ DỤ.

1. Trường hợp đàn hồi tuyến tính không có ứng suất ban đầu :

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 1\ ;\ \sigma_1 = \sigma_3 = 0\ ;\ R = R_o\ ;$$

$$a_{ij} = \lambda + 2\mu\delta_{ij}\ ;\ \mu_{ij} = \mu\ ;$$

δ_{ij} là ký hiệu Cronecker.

Thay vào (1.5) ta xác định được A, B,..., A_o,... D_o. Từ (2.6) ta có :

$$\gamma_{1,2}^2 = k^2(1 - C^2/C_{1,2}^{o2})\ ;C_1^{o2} = (\lambda + 2\mu)/\rho\ ;\ C_2^{o2} = \mu/\rho.$$

Điều kiện tồn tại sóng là : $C^2 < C_2^{o2}$

Từ (2.11) ta dẫn ra :

$$4\bar{\gamma}_2\left[\frac{1}{\gamma_2 R_o} + \frac{K_o(\gamma_2 R_o)}{K_1(\gamma_2 R_o)}\right] - \frac{2(1 + \bar{\gamma}_2^2)\bar{\gamma}_1}{\gamma_1 R_o} - \frac{(1+\bar{\gamma}_2^2)^2}{\bar{\gamma}_1}\frac{K_o(\gamma_1 R_o)}{K_1(\gamma_1 R_o)} = 0.$$

Hay ký hiệu $C^2/C_{1,2}^{o2} = \alpha_{1,2}^2$ thì phương trình trên đưa về :

$$4\sqrt{1-\alpha_2^2}\left[\frac{1}{\gamma_2 R_o}+\frac{K_o(\gamma_2 R_o)}{K_1(\gamma_2 R_o)}\right]-\frac{2(2-\alpha_2^2)}{\gamma_1 R_o}-\frac{(2-\alpha_2^2)^2}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\frac{K_o(\gamma_1 R_o)}{K_1(\gamma_1 R_o)}=0. \qquad (3.1)$$

phương trình (3.1) hoàn toàn trùng với phương trình (7) §10.9 dẫn ra trong [2]

Nếu độ dài sóng nhỏ hơn nhiều so với bán kính trụ thì từ (2.12) ta dẫn về phương trình

$$4\sqrt{1-\alpha_2^2}\,\sqrt{1-\alpha_1^2}=(2-\alpha_2^2)^2 \qquad (3.2)$$

Phương trình (3.2) trùng với phương trình (8) §10.9 dẫn ra trong [2]

2. Vật liệu đàn hồi phi tuyến với thế biến dạng Murnaghan

$$\Phi=\frac{1}{2}\lambda A_1^2+\mu A_2+\frac{1}{3}aA_1^3+bA_1A_2+\frac{1}{3}CA_3. \qquad (3.3)$$

λ, μ, a, b, c là các hằng số đàn hồi.

A_1, A_2, A_3 là các bất biến đại số của tẹn xơ biến dạng Grin

Theo công thức trong [1] ta có :

$$\sigma_{ik}^{*o}=\delta_{ik}\left[\frac{\partial}{\partial A_1^o}+(\lambda_i^2-1)\frac{\partial}{\partial A_2^o}+\frac{3}{4}(\lambda_i^2-1)^2\frac{\partial}{\partial A_3^o}\right]\Phi^o,$$

$$a_{ik}=\left[\frac{\partial}{\partial A_1^o}+(\lambda_k^2-1)\frac{\partial}{\partial A_2^o}+\frac{3}{4}(\lambda_k^2-1)^2\frac{\partial}{\partial A_3^o}\right]\left[\frac{\partial}{\partial A_1^o}+(\lambda_i^2-1)\frac{\partial}{\partial A_2^o}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}(\lambda_i^2-1)^2\frac{\partial}{\partial A_3^o}\right]\Phi^o+\delta_{ik}\left[2\frac{\partial}{\partial A_2^o}+3(\lambda_i^2-1)\frac{\partial}{\partial A_3^o}\right]\Phi^o,$$

$$\mu_{in}=\left[\frac{\partial}{\partial A_2^o}+\frac{3}{4}(\lambda_i^2+\lambda_n^2-2)\frac{\partial}{\partial A_3^o}\right]\Phi^o. \qquad (3.4)$$

Thay biểu thức của $\Phi^o=\Phi(A_j^o)$ vào ta có :

$$\sigma_{ik}^{*o}=\delta_{ik}\,[\lambda A_1^o+\mu(\lambda_i^2-1)+aA_1^{o2}+b(A_2^o+(\lambda_i^2-1)A_1^o)+C(\lambda_i^2-1)^2[4]. \qquad (3.5)$$

Theo các giá trị cho trước của σ_{ii}^{*o} ta xác định được λ_i^2 và tính được a_{ij}, μ_{ij} theo công thức (3.4)

$$\begin{aligned}
a_{11}&=\lambda+2\mu+2aA_1^o+2b(\lambda_1^2-1+A_1^o)+C(\lambda_1^2-1),\\
a_{33}&=\lambda+2\mu+2aA_1^o+2b(\lambda_3^2-1+A_1^o)+C(\lambda_3^2-1),\\
a_{12}&=\lambda+2aA_1^o+2b(\lambda_1^2-1),\\
a_{13}&=\lambda+2aA_1^o+b(\lambda_1^2+\lambda_3^2-2),\\
\mu_{12}&=\mu+bA_1^o+C(\lambda_1^2-1)/2,\\
\mu_{13}&=\mu+bA_1^o+C(A_1^2+\lambda_3^2-2)/4.
\end{aligned} \qquad (3.6)$$

Trong đó

$$A_1^o=\frac{1}{2}\,[2(\lambda_1^2-1)+(\lambda_3^2-1)],\quad A_2^o=\frac{1}{4}\,[2(\lambda_1^2-1)^2+(\lambda_3^2-1)^2].$$

Thay giá trị của λ_i^2, a_{ij}, μ_{ij} vào (1.5) ta sẽ xác định được các hệ số của (2.12). Giải phương trình này với điều kiện (2.8) ta sẽ xác định được tốc độ sóng C.

Địa chỉ

Trường đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 28/9/1983

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ГУЗЬ А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Наукова Думка, Киев, 1973.

2. НОВАЦКИЙ В. Теория упругости. Мир, Москва, 1975.

3. LÊ MINH KHANH
«Propagation des ondes de floquet dans un milieu élastique périodique avec déformations initiales homogènes» Revue «Mécanique appliquée» N°2 Tome 26 1981 Bucarest.

РЕЗЮМЕ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОЙ СРЕДЫ С НАЧАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

В работе изучено распространение волн Рэлея на цилиндрической поверхности упругой среды с начальной однородной деформацией. Здесь учтено сжатие среды, а потенциал деформации произвольный. Получено уравнение для определения скорости распространения волн в общем случае, а в случае, когда длина волн мала по сравнению с радиусом цилиндра, выведено приближенное уравнение.

THIẾT KẾ TỐI ƯU KẾT CẤU BÊTÔNG CỐT THÉP

(*Tiếp theo*)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. BÙI NGUYÊN NHẠC. Áp dụng qui hoạch phi tuyến để thiết kế tiết diện tối ưu các kết cấu bê tông cốt thép, Luận án phó tiến sỹ, Budapest, 1981.
2. FLETCHER R. and POWELL M.J.D. «A rapidly convergent decent method for minimization», Computer Journal, 6, 1963.
3. GALLAGHER R.H. and ZIENKIEWICZ O. C. Optimum Structural Design. Theory and Application., John Wiley and Sons, London, 1973.
4. HIMMELBLAU D. M. Applied Nonlinear Programming, Mc Graw-Hill, New York, 1972.
5. BÙI NGUYÊN NHẠC, Giải bài toán qui hoạch phi tuyến bằng phương pháp hàm phạt để thiết kế tối ưu các kết cấu. Báo cáo tại Hội nghị khoa học toàn quốc lần thứ nhất : Ứng dụng toán học và máy tính điện tử trong xây dựng cơ bản, họp tại Hà Nội, ngày 27 và 28 tháng 10 năm 1983.

SUMMARY

OPTIMUM DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES

One of the optimum design methods, concerned with the concrete structures, has just been presented. In order to obtain the optimum design, the solution of nonlinear mathematical programming problem has to be worked out. The amplification of the method was illustrated by a practical example.