Tạp Chí Cơ Học T. VI, 1984. Số 3 (Trang 7 – 15)

VỀ NHỮNG ĐIỂM CƠ SỞ CỦA GIẢ THUYẾT XÁC ĐỊNH ĐỊA PHƯƠNG TRONG LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN DẺO

ĐÀO HUY BÍCH — DƯƠNG TẤT THẮNG

Khi vật liệu biến dạng không đàn hồi, do sự thay đổi cấu trúc vi mô, đối sử của vật liệu phụ thuộc vào lịch sử biến dạng. Lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo [1] đã phản ánh được quy luật cơ bản đó. Giả thuyết xác định địa phương [2,6] cho phép cụ thể hóa các hệ thức xác định của lý thuyết trên nhằm thiết lập và giải các bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp.

Trong bài này nghiên cứu những điểm cơ sở của giả thuyết đó và phát biểu một cách chặt chẽ cách thiết lập bài toán biên.

§1. GIẢ THUYẾT XÁC ĐỊNH ĐỊA PHƯƠNG

Hệ quả của định đề đẳng hướng cho liên hệ giữa véctơ ứng suất và véctơ biến dạng trong không gian trạng thái năm chiều:

$$\bar{\sigma} = \sigma_u \sin\theta_k \bar{P}_k \; ; \qquad k = \overline{1,5} \tag{1.1}$$

Các hệ số là những phiếm hàm của độ cong quỹ đạo, biến dạng dãn trung bình và các tham số vật lý khác, chúng bất biến trong nhóm biến đổi quay và chiếu. Không làm sáng rõ cấu trúc giải tích của các phiếm hàm này sẽ gây khó khăn cho việc thiết lập bài toán biên khi không biết trước dạng của quá trình đàn dẻo xảy ra trong vật thể.

Hiện nay có hai cách tiếp cận vấn đề đó. Với giả thiết chặt về tính trơn của quá trình V. I. Malưi đã khai triển các phiếm hàm đó thành các dạng đa tuyến tính, tùy thuộc vào bậc nhỏ của độ cong đã nhận được các hệ thức xác định đối với quá trình độ cong nhỏ, độ cong trung bình.

Hướng thứ hai không đòi hỏi giả thiết về quá trình mà dựa vào một giả thiết mới, gải thiết xác định địa phương được minh chứng bằng hàng loạt kết quả thực nghiệm [2, 4, 6, 7].

Giả thuyết khẳng định rằng, *biến thiên của véctơ ứng suất dọc theo quỹ đạo biến dạng phụ thuộc vào vectơ ứng suất tức thời độ dài cung quỹ đạo và hình học nội tại của đoạn quỹ đạo biến dạng tiếp theo.*

Phân ra các tính chất véctơ và vô hướng của vật liệu, giả thuyết xác định địa phương có thể phát biểu như sau:

Tốc độ thay đổi góc nghiêng $d\theta_i/dS$ và tốc độ thay đổi cường độ ứng suất $d\sigma_u/dS$ là hàm của các giá trị tức thời của các đại lượng này, độ dài cung S và các độ cong quỹ đạo biến dạng.

$$d\theta_i/dS = f_i^*(\theta_m, \sigma_u, \varkappa_p, S) \; ; \quad (i, m = \overline{2,5}), \tag{1.2}$$

$$d\sigma_u/dS = \psi^*(\theta_m, \sigma_u, \varkappa_p, S) \; ; \quad (p = \overline{1,4}). \tag{1.3}$$

Điều quan trọng là trong các hệ thức này tham gia không phải là các phiếm hàm mà là các hàm vật liệu. Các đại lượng θ_i, σ_u là nghiệm của hệ phương trình vi phân phi tuyến (1.2) – (1.3).

Các hàm f_i^*, ψ^* đặc trưng đầy đủ cho các tính chất của vật liệu đàn dẻo trong quá trình biến dạng phức tạp bất kỳ. Để xây dựng cụ thể các hàm này đòi hỏi phải tiến hành nhiều thực nghiệm trên các quỹ đạo biến dạng phức tạp khác nhau, tuy nhiên số các thực nghiệm có thể giảm bớt bằng cách khảo sát các điều kiện đối với các hàm đó, suy từ các nguyên lý tổng quát của quá trình biến dạng dẻo và các đặc trưng cơ học đã biết của vật liệu. Những điều kiện này cho phép xác định rõ thêm cấu trúc của các hàm f_i^* và ψ^* phụ thuộc vào các đối số của nó cũng như các dạng xấp xỉ của chúng trên các quỹ đạo gần với quỹ đạo đặt tải đơn giản.

Đối với quá trình đặt tải đơn giản ta có

$$\theta_1 = \pi/2,\ \theta_i = 0,\ \varkappa_p = 0,\ \sigma_u = \Phi(S);\ (i = \overline{2,5};\ p = \overline{1,4})$$

Để thuận tiện cho việc khảo sát sau này ta viết lại hệ phương trình (1.2), (1.3) dưới dạng sau

$$d\theta_i/dS = f_i(\theta_m, \varphi_u, \varkappa_p, S), \tag{1.4}$$

$$d\varphi_u/dS = \psi(\theta_m, \varphi_u, \varkappa_p, S), \tag{1.5}$$

trong đó $\varphi_u = \sigma_u - \Phi(S)$, $\Phi(S)$ là hàm tải bền khi đặt tải đơn giản.

Hệ (1.4), (1.5) lập thành hệ kín gồm 5 phương trình vi phân thường phi tuyến với 5 ẩn số θ_i, φ_u. Ta có thể viết dưới dạng véctơ như sau

$$d\theta/dS = F(\theta, \varkappa, S) \tag{1.6}$$

với

$$\theta = (\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \varphi_u),$$
$$\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4),$$
$$F = (f_2, f_3, f_4, f_5, \psi).$$

Coi quỹ đạo được xét là trơn trên đoạn $S_o \leqslant S \leqslant S_1$. Không giảm tính chất tổng quát có thể lấy $S_o = 0$ và các điều kiện ban đầu tại $S = 0$

$$\theta_i(0) = \theta_{io} = 0,\quad \varphi_u(o) = \varphi_{uo} = 0\quad (i = \overline{2,5})$$

Nhận xét 1: Giả thiết rằng véctơ hàm $F(\theta, \varkappa, S)$ liên tục theo S và thỏa mãn (Khi $0 \leqslant S \leqslant S_1$, $-\infty < |\theta|, |\varkappa| < +\infty$)

a) Điều kiện Lipsit theo θ, $\varkappa$.

$$\exists L, M = \text{const} < 0,$$

$$|F(\theta_1, \varkappa, S) - F(\theta_2, \varkappa, S)| < L|\theta_1 - \theta_2|, \tag{1.7}$$
$$|F(\theta, \varkappa_1, S) - F(\theta, \varkappa_2, S)| < M|\varkappa_1 - \varkappa_2|$$

b)
$$F(0, 0, S) = 0 \tag{1.8}$$

Khi đó ứng với mỗi giá trị ban đầu phương trình (1.6) tồn tại duy nhất nghiệm. Nghiệm đó (tức là góc định hướng θ_i và cường độ ứng suất φ_u) là phiếm hàm liên tục của độ cong quỹ đạo. Trong trường hợp riêng khi $\varkappa_p \to 0$, ta có $\theta_i \to 0$, $\varphi_u \to 0$.

Chứng minh ở đây tương tự như trong [10]. Đưa vào hai loại chuẩn

$$\|u\| = \max_{0 \leqslant S \leqslant S_1} |u(S)|,$$

$$\|u\|_* = \max_{0 \leqslant S \leqslant S_1} |u(S)|\, e^{-L_1 S},\ (L_1 = \text{const} > 0)$$

hai chuẩn này tương đương suy từ đánh giá

$$e^{-L_1 S_1}\|u\| \leqslant \|u\|_* \leqslant \|u\|$$

Chứng minh phần thứ nhất về tồn tại duy nhất nghiệm.

Đặt toán tử

$$A\theta = \int_0^S F(\theta(t), \varkappa(t), t)\, dt,$$

nhận được đánh giá

$$\|A\theta_1 - A\theta_2\|_* = \max_{0 \leqslant S \leqslant S_1} \left| e^{-L_1 S} \int_0^S [F(\theta_1, \varkappa(t), t) - F(\theta_2, \varkappa(t), t)] dt \right|$$

$$< L \max_{0 \leqslant S \leqslant S_1} \left[\int_0^S e^{L_1(t-S)} e^{-L_1 t} |\theta_1(t) - \theta_2(t)| dt \right]$$

$$\leqslant L \|\theta_1 - \theta_2\|_* \max \int_0^S e^{L_1(t-S)} dt = \frac{L}{L_1}\left(1 - e^{-L_1 S_1}\right) \|\theta_1 - \theta_2\|_*. \quad (1.9)$$

Đặt $L = L_1$, A là toán tử CO trong chuẩn $\|.\|_*$ với $q = 1 - e^{-L_1 S_1} < 1$. Phương trình (1.6) tồn tại duy nhất nghiệm liên tục trên đoạn $[0, S_1]$.

Chuyển sang chứng minh phần thứ hai: các góc định hướng và cường độ ứng suất phụ thuộc liên tục vào độ cong quỹ đạo.

Gọi θ_1, θ_2 là các nghiệm của (1.6) tương ứng với các hàm độ cong bên vế phải $\varkappa_1(S)$, $\varkappa_2(S)$. Ta có đánh giá

$$|\theta_1(S) - \theta_2(S)| \leqslant \int_0^S |F(\theta_1(t), \varkappa_1(t), t) - F(\theta_2(t), \varkappa_2(t), t| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^S |F(\theta_1(t), \varkappa_1(t), t) - F(\theta_2(t) \varkappa_1(t), t| dt + \int_0^S |F(\theta_2(t), \varkappa_1(t), t) - F(\theta_2(t), \varkappa_2(t), t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant L \int_0^S |\theta_1(t) - \theta_2(t)| dt + M \int_0^S |\varkappa_1(t) - \varkappa_2(t)| dt$$

Xét trong chuẩn $\|\cdot\|_*$, sau một số biến đổi ta được đánh giá

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_* < \frac{L}{L_1}(1 - e^{-L_1 S_1}) \|\theta_1 - \theta_2\|_* + \frac{M}{L_1}(1 - e^{-L_1 S_1}) \|\varkappa_1 - \varkappa_2\|_*.$$

Đặt $L_1 = L$ ta có

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_* < C \|\varkappa_1 - \varkappa_2\|_* \quad (1.10)$$

trong đó

$$C = \frac{M}{L}(e^{LS_1} - 1) = \text{const} > 0.$$

Từ bất đẳng thức này suy ra điều cần chứng minh.

Từ giả thiết (1.8) suy ra, nếu $\varkappa_p = 0$, thì $\theta_i = 0$, $\varphi_u = 0$ hay là $\sigma_u = \Phi(S)$. Kết hợp điều này với bất đẳng thức (1.10) ta được

$$\|\theta\| \to 0 \text{ khi } \|\varkappa\| \to 0.$$

Những kết quả nhận được cho phép xây dựng hoàn chỉnh một hệ kín các phương trình xác định của lý thuyết dẻo tổng quát có sử dụng giả thiết xác định địa phương. Nó cũng bảo đảm cho tính đúng dắn trong các khai triển xấp xỉ sau này để xây dựng các mô hình lý thuyết quá trình biến dạng dẻo với độ cong nhỏ, độ cong trung bình và tính ổn định của các mô hình đó đối với sự thay đổi độ cong của quỹ đạo.

Các kết quả trên không chỉ đúng cho các quá trình trơn toàn bộ, mà còn cho cả các quá trình trơn từng khúc.

§2. VỀ TÍNH CHẤT CỦA CÁC HÀM VẬT LIỆU

Bây giờ chuyển sang khảo sát cấu trúc các hàm f_i, Ψ trong (1.4), (1.5) theo sự phụ thuộc vào các đối số của nó, đặc biệt quan trọng là việc xây dựng các dạng xấp xỉ của những hàm này. Đối với quá trình đặt tải đơn giản ta có

$$\theta_1 = \pi/2,\ \theta_i(S) = 0,\ \varkappa_p = 0,\ \sigma_u = \Phi(S),\ (i = \overline{2,5}),\ 0 \leqslant S \leqslant S_1.$$

Trong các quá trình biến dạng gần với quá trình đặt tải đơn giản, các đại lượng θ_i, $\varkappa_p$, $\varphi_u = \sigma_u - \Phi(S)$ đều là các tham số bé và dáng điệu của các hàm f_i, ψ phụ thuộc chủ yếu vào các số hạng đầu trong khai triển Taylo của chúng tại lân cận điểm: $\theta_i = 0$, $\varkappa_p = 0$, $\varphi_u = 0$ hay là $\sigma_u = \Phi(S)$.

Chúng ta bắt đầu khảo sát trường hợp hai chiều.

A — TRƯỜNG HỢP HAI CHIỀU

Trong trường hợp quỹ đạo biến dạng phẳng, phương trình của thuyết xác định địa phương cho đặc trưng véctơ có dạng:

$$d\theta_2/dS = f(\theta_2, S) \mp \varkappa_1(S),\ \theta_2(0) = 0. \tag{2.1}$$

Hệ thức này cho kết quả tổng quát hơn kết quả suy từ các lý thuyết chảy [7], ở đó $f(\theta_2, S) = C\sin\theta_2$.

Thực hiện phép chiếu phản xạ theo siêu mặt có véctơ pháp tuyến $\overline{P}_2$ ta có: $\widehat{\alpha}^{(2)}$: $\overline{\Im}(S) \to \overline{\Im}^*(S)$, với: $\varkappa_1^*(S) = -\varkappa_1(S)$; $\theta_2^*(S) = -\theta_2(S)$.

Thay vào (2.1) chúng ta đi đến nhận xét sau:

Nhận xét 2: Hàm $f(\theta_2, S)$ trong (2.1) là hàm lẻ của đối số θ_2.

Khai triển Taylo của hàm $f(\theta_2, S)$ tại lân cận $\theta_2 = 0$ có dạng:

$$f(\theta_2, S) = -k(S)\theta_2 + \sum_i k_i(S)\theta_2^{2i+1} \tag{2.2}$$

trong đó

$$-k(S) = \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_2 = 0}, \qquad k_i(S) = \frac{1}{(2i+1)!}\left.\frac{\partial^{2i+1} f}{\partial \theta_2^{2i+1}}\right|_{\theta_2 = 0}$$

Từ thực nghiệm ta có $k(S) > 0$.

Đối với tính chất vô hướng

$$d\varphi_u/dS = \Psi(\theta_2, \varkappa_1, \varphi_u, S) \tag{2.3}$$

Khai triển hàm bên vế phải theo chuỗi Taylo trong lân cận điểm $\theta_2 = 0$, $\varkappa_1 = 0$, $\varphi_u = 0$ và thực hiện phép chiếu như trên kết quả ta có:

$$\psi(\theta_2, \varkappa_1, \varphi_u, S) = \sum_{m,n,p \neq 0,1}^{\infty} [h_{2m,2n,p}(S)\theta_2^{2m}\varkappa_1^{2n}\varphi_u^p + h_{2m+1,2n+1,p}(S)\theta_2^{2m+1}\varkappa_1^{2n+1}\varphi_u^p]. \tag{2.4}$$

Nếu chú ý thêm rằng θ_2 là phiếm hàm lẽ của $\varkappa_1$, φ_u là chẵn với $\varkappa_1$, và chọn $\varkappa_1$ là tham số bé cơ bản. Khi đó bậc xấp xỉ đầu tiên của hàm $f(\theta_2, S)$ có dạng: $f(\theta_2, S) \approx -k(S)\theta_2$. Bậc xấp xỉ đầu tiên của hàm ψ có dạng

$$\psi(\theta_2, \varkappa_1, \varphi_u, S) \approx h(S)\varphi_u + h_1(S)\varkappa_1^2 + h_2(S)\theta_2\varkappa_1 + h_3(S)\theta_2^2. \qquad (2.5)$$

Vế phải có bậc vô cùng bé cấp hai đối với $\varkappa_1$, ở đây $h(s)$, $h_i(s)$ là các hệ số trong khai triển Taylo của ψ.

Có thể thấy rằng, trong trường hợp phẳng mô hình xấp xỉ độ cong trung bình nếu dừng lại ở xấp xỉ bậc 1 với $\varkappa_1$ có dạng:

$$d\theta_2/dS = -k(S)\theta_2 \mp \varkappa_1(S)$$
$$d\varphi_u/dS = 0 \text{ hay là } \sigma_u = \Phi(S)$$

B – TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT NĂM CHIỀU

Trong trường hợp tổng quát với quỹ đạo biến dạng năm chiều, phương trình của thuyết xác định địa phương có dạng: (1.4), (1.5).

Giả thiết rằng các hàm f_i, ψ có thể khai triển thành chuỗi Taylo theo các đối số của nó trong lân cận $\theta_i = 0$, $\varkappa_p = 0$, $\varphi_u = 0$, $(i = \overline{2,5};\ p = \overline{1,4})$.

Thực hiện lần lượt các phép chiếu phản xạ

$\widehat{\alpha}^{5432}$: $\overline{\ni}(S) \to \overline{\ni}^*(S)$ với:

$$\varkappa_1^*(S) = -\varkappa_1(S),\ \varkappa_i^*(S) = \varkappa_i(S)\ ;\ (i = \overline{2,4}),$$
$$\theta_i^*(S) = -\theta_i(S),\ (i = \overline{2,5}).$$

$\widehat{\alpha}^{543}$: $\overline{\ni}(S) \to \overline{\ni}^*(S)$ với:

$$k_1^*(S) = \varkappa_1(S),\ \varkappa_2^*(S) = -\varkappa_2(S),$$
$$\varkappa_i^*(S) = \varkappa_i(S),\ (i = 3,4);$$
$$\theta_2^*(S) = \theta_2(S);\ \theta_i^*(S) = -\theta_i(S),\ (i = 3, 4, 5).$$

Kết quả chúng ta sẽ lược bỏ đi một số số hạng trong các khai triển của các hàm f_i, ψ và nhận được cấu trúc của các hàm này trong sự phụ thuộc vào các đối số của nó:

Xấp xỉ đầu tiên của hàm f_2 có dạng: (cùng bậc $\varkappa_1$)

$$f_2(\theta_m, \varkappa_p, S) \approx k_1^{(2)}(S)\varkappa_1 + k_2^{(2)}(S)\theta_2.$$

Xấp xỉ đầu tiên của hàm f_3 là cùng bậc với tích $\varkappa_1\varkappa_2$ có dạng:

$$f_3(\theta_m, \varkappa_p, S) \approx k_1^{(3)}(S)\theta_3 + k_2^{(3)}(S)\varkappa_1\varkappa_2 + k_3^{(3)}(S)\theta_2\varkappa_2.$$

Xấp xỉ đầu tiên của hàm f_4 là cùng bậc với tích $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$ có dạng:

$$f_4(\theta_m, \varkappa_p, S) \approx k_1^{(4)}(S)\theta_4 + k_2^{(4)}(S)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + k_3^{(4)}(S)\theta_2\varkappa_2\varkappa_3 + k_4^{(4)}(S)\theta_3\varkappa_3.$$

Xấp xỉ đầu tiên của hàm f_5 là cùng bậc với tích $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4$:

$$f_5(\theta_m, \varkappa_p, S) \approx k_1^{(5)}(S)\theta_5 + k_2^{(5)}(S)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 + k_3^{(5)}(S)\theta_2\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 +$$
$$+ k_4^{(5)}(S)\theta_3\varkappa_3\varkappa_4 + k_5^{(5)}(S)\theta_4\varkappa_4$$

Xấp xỉ đầu tiên của hàm ψ có dạng (cùng bậc với $\varkappa_1^2, \varkappa_2^2, \varkappa_3^2, \varkappa_4^2$):

$$\psi(\theta_m, \varkappa_p, \varphi_u, S) \approx h(S)\varphi_u + \sum_{i=1}^{4} h_i(S)\varkappa_i^2(S) + h_5(S)\theta_2^2 + h_6(S)\theta_2\varkappa_1.$$

Nhận xét 3: Nếu bỏ qua các vô cùng bé bậc cao, có thể xem rằng:

a) Các hàm f_i không phụ thuộc vào đối số φ_u, tức là sự biến thiên các góc định hướng của véctơ ứng suất dọc theo quỹ đạo biến dạng trơn không phụ thuộc vào σ_u.

b) Biến thiên của góc θ_2 độc lập với các góc $\theta_i (i \neq 2)$. Biến thiên của góc θ_3 phụ thuộc chủ yếu vào θ_2, θ_3, của θ_4 phụ thuộc chủ yếu vào θ_2, θ_3, θ_4, của θ_5 phụ thuộc chủ yếu vào θ_2, θ_3, θ_4, θ_5.

Nếu dừng lại ở xấp xỉ bậc nhất, phương trình của thuyết xác định địa phương có dạng :

$$d\theta_2/dS = k_1^{(2)}(S)\theta_2 + k_2^{(2)}(S)\varkappa_1, \tag{2.6}$$

$$d\theta_3/dS = 0,\ d\theta_4/dS = 0,\ d\theta_5/dS = 0.\ d\varphi_u/dS = 0.$$

Với $k_1^{(2)}(S)$, $k_2^{(2)}(S)$ là các hàm vật liệu, không phụ thuộc vào quá trình đặt tải. Từ hệ thức đối với trường hợp hai chiều [6, 7], ta có :

$$k_2^{(2)}(S) = \mp 1,\ k_1^{(2)}(S) = -k(S) \text{ với } k(S) > 0.$$

Tích phân hệ thức (2.6) với các điều kiện ban đầu

$$\theta_i(0) = 0,\ \sigma_u(0) = \Phi(0) = 0$$

ta được :

$$\theta_2 = \int_0^S \exp\left(-\int_\tau^S k(t)dt\right)\varkappa_1(\tau)d\tau,\ \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0,\ \sigma_u = \Phi(S).$$

Từ hệ thức $\sum_{i=1}^{5} \sin^2\theta_i = 1$ ta xác định được $\theta_1 = \pi/2 - \theta_2$. Ta nhận lại kết quả véc tơ ứng suất nằm trong mặt phẳng mật tiếp của quỹ đạo.

Đặt
$$A(t, \tau) = A^{-1}(t)\,A(\tau) = \exp\left(-\int_\tau^t k(S)dS\right)$$

chúng ta thu lại được hệ thức độ cong trung bình do V. I. Malưi đã xây dựng [5], nhưng ở đó phải dùng giả thiết biến dạng đơn giản địa phương.

Nếu dừng lại cho tới xấp xỉ bậc hai trong các hệ thức của thuyết xác định địa phương, ta thu được mô hình sau:

$$d\theta_2/dS = -k(S)\theta_2 \mp \varkappa_1(S), \tag{2.7}$$

$$d\theta_3/dS = k_1^{(3)}(S)\theta_3 + k_2^{(3)}(S)\varkappa_1\varkappa_2 + k_3^{(3)}(S)\theta_2\varkappa_2,$$

$$d\theta_4/dS = 0$$

$$d\theta_5/dS = 0,$$

$$d\varphi_u/dS = h(S)\varphi_u + h_1(S)\varkappa_1^2 + h_2(S)\varkappa_2^2 + h_3(S)\varkappa_3^2 + h_4(S)\varkappa_4^2 + h_5(S)\theta_2^2 + h_6(S)\theta_2\varkappa_1.$$

Một đặc trưng cơ học cơ bản của vật liệu biến dạng đàn dẻo là tính chậm trễ của vật liệu, trong phạm vi của thuyết xác định địa phương, đặc trưng chậm trễ có thể hiểu như sau : ảnh hưởng của lịch sử biến dạng trên phần quỹ đạo $S < S_0$ (biểu thị thông qua góc định hướng ban đầu $\theta_i(S) = \theta_{i_0}$ tại $S = S_0$) lên sự biến thiên của góc định hướng tại một thời điểm bất kỳ $S' > S_0$ giảm dần khi $S' - S_0$ tăng.

Xét trường hợp hai quỹ đạo biến dạng $\overline{\Im}_1(S)$, $\overline{\Im}_2(S)$ khác nhau khi $S < S_0$ và trùng nhau khi $S \geqslant S_0$. Từ hệ quả của nguyên lý chậm trễ suy ra rằng góc lệch giữa hai véctơ ứng suất tương ứng của hai quá trình biến dạng đó phải giảm dần khi $S' - S_0$ tăng.

Về mặt toán học, điều kiện trên chính là điều kiện ổn định tiệm cận theo góc định hướng ban đầu (ổn định theo Liapunôp). Từ đó chúng ta nhận được các hạn chế sau đây với các hàm f_i để thỏa mãn tính chất trên.

Từ các kết quả trong phần trước, xem ràng các hàm f_i phụ thuộc chủ yếu vào σ_u, ta có thể viết hệ phương trình (1.4) về dạng

$$d\theta_i/dS = k^{(i)}(S)\theta_i + g_i(\theta_m, \varkappa_p, S), \ (i = \overline{2,5}) \tag{2.8}$$

với

$$k^{(i)}(S) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_m = 0,\ \varkappa_p = 0},$$

$$g_i(\theta_m, \varkappa_p, S) = f_i(\theta_m, \varkappa_p, S) - k^{(i)}(S)\theta_i$$

Hay viết dưới dạng véctơ :

$$d\bar{\theta}/dS = A(S)\bar{\theta} + G(\bar{\theta}, \varkappa, S)$$

$$A = \begin{pmatrix} k^{(2)}(S) & & & O \\ & k^{(3)}(S) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & k^{(5)}(S) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_2 \\ \vdots \\ g_5 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

đưa vào $|\bar{\theta}|$ là độ dài véctơ $\bar{\theta}$

Nhận xét 4 : Nếu tồn tại λ, L = const > 0 sao cho

a) $-k^{(i)}(S) \geqslant \lambda > 0$, $(i = \overline{2,5})$, $\forall S \geqslant S_o$

b) $|G(o), \varkappa_p, S)| < M$ = const, $G(o, o, S) \equiv 0$

c) $|G(\bar{\theta}_1, \varkappa_p, S) - G(\bar{\theta}_2, \varkappa_p, S)| < L|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2|$, $\forall \theta_1, \theta_2, S$.

Khi đó các góc $\theta_i(S)$ là giới nội khi $S \geqslant S_o$ với góc định hướng ban đầu θ_{i_o} giới nội và ổn định theo luật mũ khi thỏa mãn $\lambda > L$.

Việc chứng minh ở đây tương tự như trong [10], viết dưới dạng tích phân ta có

$$\theta_i(S) = \theta_{i_o}\exp\left(-\int_{S_o}^{S} k^{(i)}(S)dS\right) + \int_{S_o}^{S}\exp\left(-\int_{S'}^{S} k^{(i)}(S)dS\right)g_i(\theta_m(S')\varkappa_p(S'), S')dS'$$

Vậy :

$$|\bar{\theta}(S)| < |\bar{\theta}_o|e^{-\lambda(S - S_o)} + \int_{S_o}^{S} e^{-\lambda(S - \tau)}(|G(o, \varkappa_p(\tau), \tau)| + L|\bar{\theta}(\tau)|)d\tau,$$

$$|\bar{\theta}(S)| < |\bar{\theta}_o|e^{-\lambda(S - S_o)} + \int_{S_o}^{S} e^{-\lambda(S - \tau)}(M + L|\bar{\theta}(\tau)|)d\tau.$$

Đặt :

$$z(S) = |\bar{\theta}_o|e^{-\lambda(S - S_o)} + \int_{S_o}^{S} e^{-\lambda(S - \tau)}(M + L\,z(\tau))d\tau,$$

$$z(S_o) = |\bar{\theta}_o|.$$

Từ đó suy ra đánh giá

$$|\bar{\theta}(S)| \leqslant z(S) = \frac{M}{\lambda - L} + |\bar{\theta}_o|e^{-(\lambda - L)(S - S_o)} \tag{2.10}$$

Khi $\lambda > L$, $\bar{\theta}(S)$ sẽ giới nội với điều kiện ban đầu $\bar{\theta}_o$ giới nội $\forall S \geqslant S_o \geqslant 0$

Nếu giả thiết $\bar{\theta}'$, $\bar{\theta}''$ tương ứng là nghiệm của phương trình (2.9) ứng với các điều kiện ban đầu $\bar{\theta}_o'$, $\bar{\theta}_o''$. Độ lệch giữa chúng dọc theo đoạn quỹ đạo $S \geqslant S_o$ có đánh giá

$$|\bar{\theta}'(S) - \bar{\theta}''(S)| < e^{-(\lambda - L)}|\bar{\theta}_o' - \bar{\theta}_o''|$$

Khi $\lambda > L$ các góc định hướng là ổn định đều theo luật mũ.

§ 3. CÁCH ĐẶT BÀI TOÁN BIÊN

Trong [3] đã phát biểu bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp, trong :oi $\sigma_u = \Phi(S)$ là hàm vạn năng.

Như trên đã phân tích hệ thức này chỉ đúng ở gần đúng thứ không đổi với $\varkappa_1$, tức là quá trình có độ cong nhỏ. Do vậy với quá trình đặt tải bất kỳ bài toán biên của lý ·ết dẻo sử dụng giả thiết xác định địa phương được thiết lập như sau:

Cho trước lực khối $K_i(x, t)$, lực mặt $F_i(x, t)$ trên S_σ và chuyển dịch $u_{i_o}(x, t)$ trên ủa vật thể, cần xác định $u_i(x,t)$, $\varepsilon_{ij}(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$ từ các phương trình:

– Phương trình cân bằng

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j + \rho K_i = 0 \text{ trong } \Omega \tag{3.1}$$

– Phương trình Côsi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \text{ trong } \Omega \cup S \tag{3.2}$$

– Phương trình xác định

$$\overline{\sigma} = \sigma_u \sin\theta_k \overline{P_k}, \ (k = \overline{1,5}) \text{ trong } \Omega \cup S \tag{3.3}$$

$$d\theta_i/dS = f_i(\theta_j, \varkappa_p, \sigma_u, S) \tag{3.4}$$

$$d\sigma_u/dS = \psi(\theta_j, \varkappa_p, \sigma_u, S)$$

$$\sigma_u(S_o) = \sigma_{u_o}, \theta_j(S_o) = \theta_{j_o}, \ (i,j = \overline{2,5}, \ p = \overline{1,4}). \tag{3.5}$$

$$\sigma = 3K\varepsilon \tag{3.6}$$

– Điều kiện biên

$$\sigma_{ij}n_j = F_i \text{ trên } S_\sigma$$

$$u_i = u_{i_o} \text{ trên } S_u \tag{3.7}$$

Bằng cách kết hợp các phương trình xác địn (3.3) – (3.5) vào chung hệ thức ta có phát biểu bài toán biên dưới một dạng khác. Cụ thể hóa theo hướng này có thể phát ı bài toán cho các quá trình độ cong nhỏ, độ cong trung bình và các quá trình phức tạp hoặc ba chiều [8.9].

Địa chỉ:

ờng Đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 2/1/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

ИЛЬЮШИН. А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред. ПММ. Т. 18, Вып. 6, 1954.

ЛЕНСКИЙ В. С. Гипотеза локальной определённости в теории пластичности. Изв. АН СССР, ОТН, N°5, 1962.

ЛЕНСКИЙ В. С. О постановке краевой задачи общей теории пластичности. Вестн. МГУ, Сер. Мат. Мех. N°6, 1979.

ОхАШИ И. и другие. Некоторые экспериментальные данные об общем законе Пластичности Ильюшина. Изв. АН СССР, МТТ, N° 6, 1981.

МАЛЫЙ В. И. Исследование некоторых функционалов теории упруго – пластических процессов. в кн. Упругость и неупругость. Изд. МГУ, Вып-5, 1978.

ЦАО ЗУЙ БЙК. О гипотезе локальной определённости в теории пластичности. Вест. МГУ, Сер. Мат., Мех, N°2, 1965.

7. ДАО ЗУЙ БЙК. экспериментальная проверка упрощённых вариантов теории пластичности. Вест., МГУ, Сер. Мат., Мех. N°1, 1966.

8. ДАО ЗУЙ БИК. О теореме единственности краевой задачи теории пластичности с использованием гипотезы локальной определённости. Изв. АН СССР, МТТ, N°1, 1982.

9. ĐÀO HUY BÍCH. Về bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp. Tuyển tập công trình hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 3. Huế 1982, Viện khoa học Việt Nam, Hà nội 1983.

10. DƯƠNG TẤT THẮNG. Về các hàm vật liệu trong thuyết xác định địa phương. Thông báo Hội nghị khóa học Khoa Toán cơ, ĐHTH, Hà nội 1983 (đang in).

SUMMARY

ON THE BASIS OF THE HYPOTHESIS OF LOCAL DETERMINANCY IN THE THEORY OF ELASTO – PLASTIC PROCESSES

The hypothesis of local determinancy gives concrete relations of elasto – plastic processes, where functionals of the orientation and the capacity of stresses vector can be represented as a solution of the set of non – linear ordinary differential equations. The behaviours of these functionals are studied in the general case. On this basis the boundary valuable problem in the theory of plasticity is exactly formulated.

THÔNG BÁO CỦA BAN CHẤP HÀNH TRUNG ƯƠNG HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM

Ngày 2 tháng 7 năm 1984, BCHTU Hội cơ học VN khóa I đã họp phiên thường kỳ lần thứ 4 tại Sầm Sơn, Thanh Hóa dưới sự chủ trì của Chủ tịch Nguyễn Văn Đạo.

1. BCHTU đã nghe Tổng thư ký Phạm Huyền báo cáo về hoạt động của Hội trong 6 tháng đầu 1984: Đã thành lập Chi hội Cơ học Hà Nội, bảo trợ 9 xêmina cơ học, tổ chức một lớp bồi dưỡng (cùng với Bộ Đại học), thực hiện một số hợp đồng kinh tế để gây quỹ, duy trì câu lạc bộ cơ học tại Hà Nội, hình thành một số nhóm yêu thích, đăng ký trao đổi 1 báo cáo viên với Hội kiến thức Bungari. Chưa phát thẻ được cho hội viên, chưa ban hành được các qui định, qui chế về công tác hội như dự kiến.

BCH nhận thấy hoạt động của Hội trong 6 tháng qua là đúng hướng và có kết quả, nhất là về sinh hoạt khoa học, các hoạt động gây quỹ có tác dụng tích cực đối với các hoạt động chung của Hội, tuy nhiên các ủy viên chấp hành còn hoạt động chưa đều tay, việc phát triển hội viên còn chậm.

2. Trong 6 tháng cuối 1984, Hội Cơ học sẽ phát thẻ hội viên, tổ chức thêm các chi hội địa phương và chi hội cơ sở, tăng cường phát triển hội viên qua BCHTU và các chi hội. Duy trì các xêmina đã có, tổ chức thêm xêmina cơ học máy nông nghiệp, cơ học máy xây dựng, cơ học kết cấu, cơ học trong năng lượng nhỏ, cơ học đất-đá-môi trường rời, các xêmina cơ học ở các tỉnh phía Nam. Xây dựng thêm Qui chế và thanh toán hợp đồng kinh tế, ban hành các Qui định, Qui chế đã có, thực hiện một số hợp đồng hỗ trợ nghiên cứu và ứng dụng cơ học, còn các hợp đồng khác để gây quỹ. Duy trì Câu lạc bộ cơ học tại Hà Nội, tổ chức Câu lạc bộ tại một vài điểm khác. Tổ chức việc thu thập tin tức hoạt động cơ học để thông báo rộng rãi. Đăng ký trao đổi báo cáo viên với các nước bạn.

3. BCHTU quyết định miễn nhiệm ủy viên chấp hành các đ/c Nguyễn Công Mẫn và Nguyễn Trường vì lý do đi công tác dài hạn ở nước ngoài và bổ sung các đ/c Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Văn Hồi vào BCHTU khóa I.