Tạp Chí Cơ Học T. VI, 1984. Số 3 (Trang 1 – 6)

CẤU TRÚC TOÁN HỌC CỦA CÁC VẬT THỂ ĐÀN HỒI III – CÁC TRẠNG THÁI RIÊNG CỦA CÁC VẬT THỂ ĐẲNG HƯỚNG NGANG

RYCHLEWSKI J

Chúng ta xét ba lớp đơn giản nhất của các vật thể đàn hồi : lý tưởng, đẳng hướng và đẳng hướng ngang.

A — CÁC VẬT THỂ ĐÀN HỒI LÍ TƯỞNG

Định nghĩa 1 : *Một vật thể đàn hồi được gọi là vật thể đàn hồi lí tưởng nếu như mọi tenxơ bậc 2 đối xứng đều là trạng thái đàn hồi riêng của nó.*

Ta nhận thấy rằng nếu biểu thức cấu trúc (1.12) chứa nhiều hơn một thành phần thì sẽ tồn tại những tenxơ không phải là tenxơ riêng. Vì vậy khi $\rho = 1$, tenxơ độ cứng và định luật Hooke có dạng :

$$\underline{C} = \lambda \underline{E}, \ \underline{\sigma} = \lambda \underline{\varepsilon}, \ \lambda > 0 \tag{3.1}$$

Các chỉ số cấu ttúc sẽ nhận những giá trị tới hạn :

$$<6>, \ [1 + 0 + 0].$$

Những vật thể này có thể tồn tại trên lý thuyết, nhưng chưa chắc là sự lý tưởng hóa tốt cách đối xử thực tế của vật liệu.

B — CÁC VẬT THỂ ĐÀN HỒI ĐẲNG HƯỚNG

Định nghĩa 2 : *Một vật thể đàn hồi được gọi là vật thể đàn hồi đẳng hướng nếu như mọi phép trượt thuần túy đều là trạng thái đàn hồi riêng của nó.*

Định lý 1 : *Đối với vật thể đẳng hướng, phép khai triển vật chất(1.11) sẽ có dạng :*

$$\mathcal{S} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$$

trong đó $\mathcal{P}$ là không gian một chiều các tenxơ cầu, $\mathcal{D}$ — không gian 5 chiều các tenxơ lệch.

Do ta đã biết các phép chiếu xuống không gian các tenxơ cầu và không gian các tenxơ lệch dạng

$$\underline{E}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{3} \underline{\delta} \otimes \underline{\delta} \ ; \ \underline{E}_{\mathcal{D}} = \underline{E} - \frac{1}{3} \underline{\delta} \otimes \underline{\delta}$$

cho nên tenxơ độ cứng của vật thể đẳng hướng sẽ là :

$$\underline{C} = \lambda_{\mathcal{P}} \underline{E}_{\mathcal{P}} + \lambda_{\mathcal{D}} \underline{E}_{\mathcal{D}} = \frac{\lambda_{\mathcal{P}} - \lambda_{\mathcal{D}}}{3} \underline{\delta} \otimes \underline{\delta} + \lambda_{\mathcal{D}} \underline{E}. \tag{3.2}$$

Phép khai triển (2.2) sẽ trở thành

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{\mathcal{P}} + \underline{\sigma}_{\mathcal{D}} \; ; \; \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_{\mathcal{P}} + \underline{\varepsilon}_{\mathcal{D}} \qquad (3.3)$$

Ở đây có thể lấy

$$\underline{\sigma}_{\mathcal{P}} \equiv \underline{E}_{\mathcal{P}} \cdot \underline{\sigma} = \left(\frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma\right)\underline{\delta} \; ; \; \underline{\sigma}_{\mathcal{D}} \equiv \underline{E}_{\mathcal{D}} \cdot \underline{\sigma} = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_{\mathcal{P}}$$

Phép khai triển trực giao định luật Hooke (3.3) có dạng sau

$$\underline{\sigma}_{\mathcal{P}} = \lambda_{\mathcal{P}} \underline{\varepsilon}_{\mathcal{P}} ; \; \underline{\sigma}_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{D}} \underline{\varepsilon}_{\mathcal{D}}$$

Có thể thấy rằng tất cả các biểu thức đã quá quen thuộc đối với vật thể đẳng hướng này thực tế chỉ là các trường hợp riêng của các hệ thức tổng quát của chúng tôi.

Các hằng số Lamé được biểu diễn qua các mô đun độ cứng như sau

$$\lambda = \lambda_{\mathcal{P}} - \lambda_{\mathcal{D}} \; ; \; \mu = \frac{1}{2} \lambda_{\mathcal{D}}$$

Mô đun nén thể tích và hệ số Poatxông bằng

$$K = \frac{1}{3} \lambda_{\mathcal{P}} ; \; \nu = \frac{\lambda_{\mathcal{P}} - \lambda_{\mathcal{D}}}{2\lambda_{\mathcal{P}} + \lambda_{\mathcal{D}}}$$

Các chỉ số cấu trúc của lớp các vật thể đẳng hướng sẽ là :

$$\langle 1 + 5 \rangle ; \; [2 + 0 + 0]$$

Các tham số phân bố lại độ cứng $\eta_1, \ldots, \eta_{12}$ và các góc ứng với thí nghiệm $\varphi_1, \ldots, \varphi_3$ sẽ không xuất hiện trong trường hợp này, bởi vì trong vật thể không tồn tại một sợi vật chất nổi bật nào, cho nên không có lý do gì để phân bố lại, không có mốc nào để định hướng.

So sách (3.1) với (3.2) ta thấy rằng vật thể đàn hồi lý tưởng là vật thể đàn hồi đẳng hướng với hệ số Poatxông bằng không, $\nu = 0 (\lambda_{\mathcal{P}} = \lambda_{\mathcal{D}})$.

C — CÁC VẬT THỂ ĐÀN HỒI ĐẲNG HƯỚNG NGANG.

Ta sẽ bắt đầu bằng một thí dụ riêng.

Hãy mô tả tính chất đàn hồi của một vật Compozit cho trên hình 1. Một matrise đẳng hướng có cốt là họ song phẳng các tấm mỏng làm từ vật liệu đẳng hướng khác và bó các sợi mềm đặt vuông góc với các tấm. Hướng của các sợi được xác định bởi điat $\underline{k} \otimes \underline{k}$. Ta sử dụng cơ sở trực chuẩn $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3 = \underline{k}$.

Nhận xét thứ nhất : rõ ràng rằng vì chiều dày của các tấm là mỏng, mối liên kết giữa các tấm và các sợi không phải là cứng, nên với mọi biến dạng trượt (nhưng là biến dạng nhỏ) loại :

$$\begin{pmatrix} o & o & p \\ o & o & q \\ p & q & o \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

Các tấm và các sợi sẽ dịch chuyển như các vật cứng, như thế chỉ còn có matrise là làm việc. Do tính đẳng hướng của matrise nên bất kỳ phép trượt nào cũng là trạng thái riêng của nó với cùng một môđun độ cứng. Vì vậy mọi phép trượt dạng (3.4) đều là trạng thái đàn hồi riêng của vật thể Compozit đang xét. Ta đã nhận được không gian con $\mathcal{P}_3$ — không gian 2 chiều các phép trượt dạng (3.4).

Cơ sở trực chuẩn trong $\mathcal{P}_3$ sẽ là một cặp các đại lượng sau :

$$\underline{\omega}_{III} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{n}_1 \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{n}_1) \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega}_{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{n}_2 \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{n}_2) \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Phép chiếu xuống $\mathcal{P}_3$ có dạng

$$\underline{P}_3 = \underline{\omega}_{III} \otimes \underline{\omega}_{III} + \underline{\omega}_{IV} \otimes \underline{\omega}_{IV} = \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \varepsilon) \times [\underline{\delta} \otimes \underline{\delta} - \underline{\delta} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} - \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{\delta}] +$$

$$+ \frac{1}{2}\underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k}.$$

trong đó

$$\varepsilon \equiv (1\ 2\ 3\ 4)\ ;\ \sigma_1 \equiv (1\ 3\ 2\ 4)\ ;\ \sigma_2 \equiv (1\ 4\ 3\ 2).$$

Nhận xét thứ hai : Với mọi biến dạng trượt trong mặt phẳng các tấm, nghĩa là với mọi biến dạng sau

$$\begin{pmatrix} u & v & o \\ v & -u & o \\ o & o & o \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

các sợi sẽ chuyển động như các vật cứng, chỉ có matrise và các tấm là làm việc. Cả matrise và cả các tấm đều là đẳng hướng, cho nên các biến dạng trượt (3.6) là các trạng thái riêng của chúng. Vì vậy mọi phép trượt dạng (3.6) đều là trạng thái đàn hồi riêng của vật liệu Compozit đang xét. Chúng ta đã nhận được không gian con $\mathcal{P}_4$ — không gian 2 chiều các phép trượt riêng dạng (3.6), ở đây $\mathcal{P}_3 \perp \mathcal{P}_4$

Cơ sở trực chuẩn trong $\mathcal{P}_4$ có thể lấy như sau

$$\underline{\omega}_V = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{n}_1 \otimes \underline{n}_1 - \underline{n}_2 \otimes \underline{n}_2) \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\omega}_{VI} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{n}_1 \otimes \underline{n}_2 - \underline{n}_2 \otimes \underline{n}_1) \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Phép chiếu xuống $\mathcal{P}_4$ có dạng

$$\underline{P}_4 = \underline{\omega}_V \otimes \underline{\omega}_V + \underline{\omega}_{VI} \otimes \underline{\omega}_{VI} =$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \times [\underline{\delta} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} - \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{\delta}] - 2\underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k}. \tag{3.7}$$

Ở đây

$$\sigma_1 \equiv (1\ 3\ 2\ 4),\ \sigma_2 \equiv (1\ 4\ 3\ 2).$$

Nhận xét thứ ba : Lấy $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_3 \oplus \mathcal{P}_4)^{\perp}$. Nếu nhớ lại các định nghĩa (3.4), (3.6) về các không gian $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$, thì chúng ta thấy ngay phần phụ trực giao $\mathcal{P}$ sẽ là không gian 2 chiều và nó bao gồm các tenxơ dạng

$$\begin{pmatrix} a & o & o \\ o & a & o \\ o & o & b \end{pmatrix}$$

Đối với vật thể Compozit của chúng ta cũng như đối với mọi vật đàn hồi khác, phép khai triển không gian $\mathcal{S}$ ra tổng các không gian các trạng thái riêng phải là phép khai triển đầy đủ. Vì vậy, hoặc là $\mathcal{P}$ bao gồm các trạng thái đàn hồi riêng, hoặc là $\mathcal{P}$ được tách ra thành 2 không gian con một chiều của các trạng thái riêng, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$. Trong trường hợp chung, nghĩa là với một tổ hợp bất kỳ, các độ cứng của matrise, của các tấm, các sợi và tổ hợp bất kỳ các thể tích riêng của các tấm, các sợi, khả năng thứ nhất không có cơ sở. Vì vậy cần thiết phải xét tất cả các phép tách trực giao của $\mathcal{P}$, hay là tất cả các cặp trực chuẩn ω_I, ω_{II} trong $\mathcal{P}$. Dễ nhận thấy rằng chúng họp thành tập hợp một thông số có thể biểu diễn ở dạng thuận tiện sau (+)

$$\underline{\omega_I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\eta\underline{\delta} + \sqrt{3}\sin(\eta_o - \eta)\underline{k}\otimes\underline{k}\right] \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\sin\eta & & \\ & \sin\eta & \\ & & \sin\eta\end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega_{II}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\eta\underline{\delta} - \sqrt{3}\cos(\eta_o - \eta)\underline{k}\otimes\underline{k}\right] \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\cos\eta & & \\ & \cos\eta & \\ & & -\sqrt{2}\sin\eta\end{pmatrix}$$

Ở đây η — tham số họ, thêm vào đó không sợ mất tính tổng quát ta có thể coi

$$0 \leqslant \eta < \pi/2$$

còn η_o được xác định từ điều kiện $\underline{\omega_I} = \frac{\sqrt{3}}{3}\underline{\delta}$ nghĩa là $\operatorname{tg}\eta_o = \sqrt{2}$. Như vậy, đối với vật thể Compozit đang xét ta đã nhận được $\mathcal{P}_1$ — không gian một chiều các trạng thái riêng tỉ lệ với $\underline{\omega_I}$; $\mathcal{P}_2$ — không gian một chiều các trạng thái riêng tỉ lệ với $\underline{\omega_{II}}$.

Phép chiếu xuống $\mathcal{P}_1$ có dạng

$$\underline{P_1} = \underline{\omega_I}\otimes\underline{\omega_I} = \frac{1}{2}\sin^2\eta(\underline{\delta}\otimes\underline{\delta}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\eta\sin(\eta_o - \eta) \times [\underline{\delta}\otimes\underline{k}\otimes\underline{k} + \underline{k}\otimes\underline{k}\otimes\underline{\delta}] + $$
$$+ \frac{3}{2}\sin^2(\eta_o - \eta)\underline{k}\otimes\underline{k}\otimes\underline{k}\otimes\underline{k}. \qquad (3.8)$$

Còn phép chiếu xuống $\mathcal{P}_2$ sẽ là

$$\underline{P_2} = \underline{\omega_{II}}\otimes\underline{\omega_{II}} = \frac{1}{2}\cos^2\eta(\underline{\delta}\otimes\underline{\delta}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\eta\cos(\eta_o - \eta) \times [\underline{\delta}\otimes\underline{k}\otimes\underline{k} + \underline{k}\otimes\underline{k}\otimes\underline{\delta}] + $$
$$+ \frac{3}{2}\cos^2(\eta_o - \eta)\underline{k}\otimes\underline{k}\otimes\underline{k}\otimes\underline{k} \qquad (3.9)$$

Như vậy, tất cả các trạng thái đàn hồi riêng của vật thể Compozit đang xét đã được xác định.

Trong khi tìm các trạng thái đàn hồi, ta đã dựa vào các hình dung cơ học gắn với vật thể Compozit được trình bày trên hình 1. Nhưng nếu để ý kỹ một chút ta có thể nhận thấy rằng việc tách các không gian của các phép trượt riêng (3.4), (3.5) sẽ đúng cho mọi cấu trúc có đối xứng trục. Điều này đã được chứng minh một cách chặt chẽ trong [3], nhưng do cách trình bày thống nhất ở đây, ta công nhận định nghĩa sau :

Định nghĩa 3 : *Ta gọi một vật thể đàn hồi là vật thể đàn hồi đẳng hướng ngang nếu như có thể chỉ ra một phương được xác định bởi điat* $\underline{k}\otimes\underline{k}$ *sao cho bất kỳ phép trượt dạng:*

$$\underline{\tau} = \underline{a}\otimes\underline{k} + \underline{k}\otimes\underline{a};\ \underline{a}\underline{k} = 0 \qquad (3.10)$$

và bất kỳ phép trượt dạng

$$\underline{\tau} = \underline{a}\otimes\underline{b} + \underline{b}\otimes\underline{a};\ \underline{a}\underline{k} = \underline{b}\underline{k} = \underline{a}\underline{b} = 0 \qquad (3.11)$$

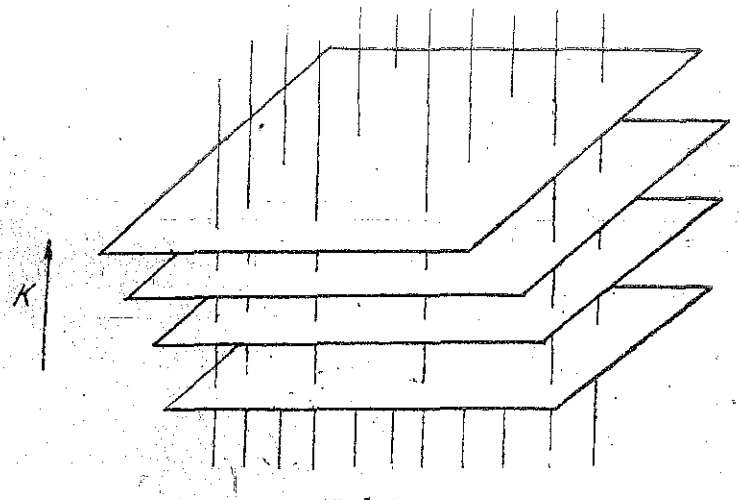
đều là các trạng thái đàn hồi riêng của nó.

(+) Cũng có thể trong dạng không kém phần thuận tiện sau :

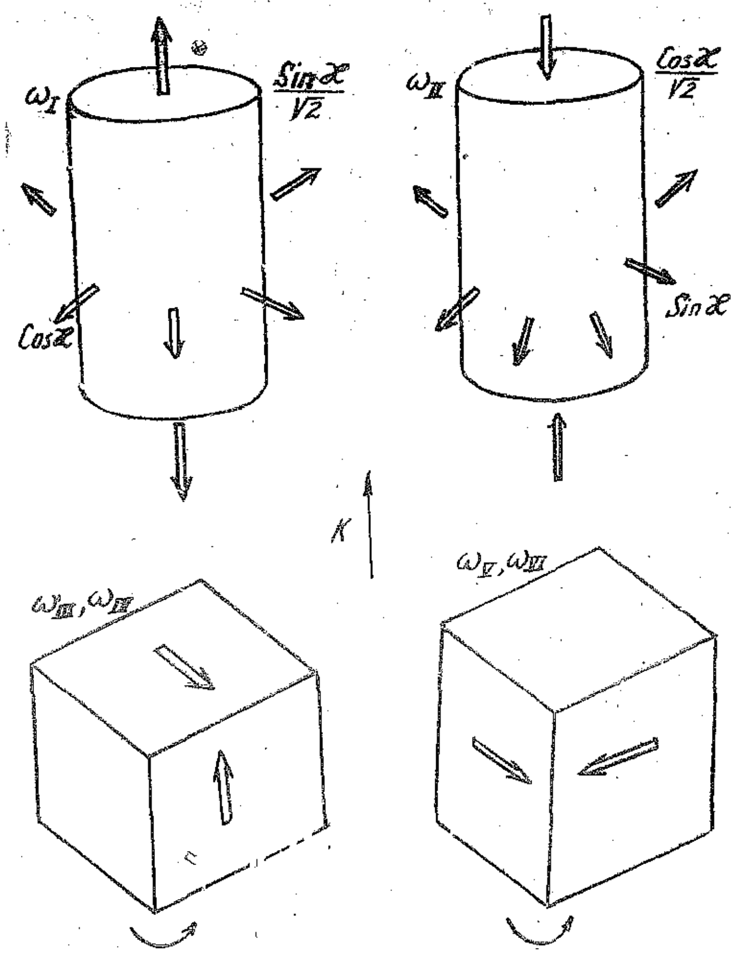
$$\underline{\omega_I} = g(S)[\underline{\delta} + S\underline{k}\otimes\underline{k}] \quad \underline{\omega_{II}} = g(t)[\underline{\delta} + t\underline{k}\otimes\underline{k}];$$

ở đây

$$g(x) \equiv (x^2 + 2x + 3)^{1/3};\quad 3 + (t + S) + St = 0,$$


K

Hình 1


ω_I
$\frac{Sin\,\varkappa}{\sqrt{2}}$
$Cos\,\varkappa$
ω_{II}
$\frac{Cos\,\varkappa}{\sqrt{2}}$
$Sin\,\varkappa$
K
$\omega_{III}, \omega_{IV}$
ω_{V}, ω_{VI}

Hình 2

Từ định nghĩa này ta sẽ đưa ra dạng của tenxơ độ cứng. Trước tiên có thể nhận thấy rằng các phép trượt (3.10) hợp thành không gian con tuyến tính trong $\mathcal{S}$. Tương tự vậy, các phép trượt (3.11) cũng hợp thành không gian con tuyến tính trong $\mathcal{S}$. Các không gian con này chính là $\mathcal{P}_3$ và $\mathcal{P}_4$. Có thể chứng minh được rằng các phép trượt (3.10) có môđun độ cứng chung và các phép trượt (3.11) cũng có môđun độ cứng chung. Nói khác đi $\mathcal{P}_3$ và $\mathcal{P}_4$ là các không gian các trạng thái riêng. Nhưng khi ấy cả $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ ứng với một tham số η nào đó phụ thuộc vào vật thể cho trước cũng là các không gian các trạng thái riêng. Như thế ta có định lý sau :

Đối với một vật thể đẳng hướng ngang bất kỳ phép khai triển cấu trúc có dạng

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3 \oplus \mathcal{P}_4$$

ở đây $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ phụ thuộc vào η và $\underline{k} \otimes \underline{k}$, còn $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ phụ thuộc vào $\underline{k} \otimes \underline{k}$; điều này có nghĩa là tenxơ độ cứng được xác định bởi công thức :

$$\underline{C} = \lambda_1 \underline{P}_1(\eta, \underline{k} \otimes \underline{k}) + \lambda_2 \underline{P}_2(\eta, \underline{k} \otimes \underline{k}) + \lambda_3 \underline{P}_3(\underline{k} \otimes \underline{k}) + \lambda_4 \underline{P}_4(\underline{k} \otimes \underline{k})$$

trong đó $\underline{P}_1, \ldots, \underline{P}_4$ cho trước từ (3.5), (3.7), (3.8), (3.9). Thay thế cho đối số $\underline{k} \otimes \underline{k}$ có thể đưa vào hai góc φ_1, φ_2 xác định $\underline{k} \otimes \underline{k}$ trong phòng thí nghiệm.

Trong trường hợp tổng quát, các chỉ số cấu trúc của lớp các vật thể đẳng hướng ngang sẽ bằng

$$(1 + 1 + 2 + 2), [4 + 1 + 2]$$

Các trạng thái đàn hồi riêng của vật thể đẳng hướng ngang được chỉ ra trên hình 2.

Ta đã tìm được 5 hằng số vật liệu của vật thể đàn hồi đẳng hướng ngang λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, η.

Ý nghĩa của 4 hằng số đầu tự nó khá rõ, thí dụ như λ_3, λ_4 chỉ là các môđun trượt của (3.10), (3.11). Nội dung cơ học của bộ phận bố độ cứng η có phần nào phức tạp hơn.

(Nguyễn Văn Điệp lược dịch) *Nhận ngày 28/2/1984*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. RYCHLEWSKI J. Cấu trúc toán học của các vật thể đàn hồi. I. Các trạng thái đàn hồi riêng, Tạp chí Cơ học số 4, 1983.

2. RYCHLEWSKI J. Cấu trúc toán học của các vật thể đàn hồi. II. Các hằng số đàn hồi ; Tạp chí Cơ học số 1, 1984.

3. РЫХЛЕВСКИЙ Я. Собственные упругие состояния кристаллов. (в печати).

РЕЗЮМЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УПРУГИХ ТЕЛ
III. СОБСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Указаны все собственные упругие состояния трансверсально изотропных тел, Наидена новая система упругих констант непрерывно описывающая этот класс материалов. Система содержит четыре модуля жесткости и один дистрибутор жесткости.