Tạp chí Cơ Học T.VI, 1984 số 2 trang (23 – 32)

ĐƠN GIẢN PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA VỎ MỎNG

NGUYỄN XUÂN HÙNG

Trong bài [5] đã đưa ra phương trình dao động tổng quát của vỏ mỏng có tính đến biến dạng trượt và sự thay đổi của Ten-xơ metrik theo phương pháp tuyến với mặt phẳng trung bình của vỏ. Tuy nhiên các phương trình này rất phức tạp cho nên khó sử dụng. Sau đây ta tìm cách đơn giản các phương trình này với điều kiện đảm bảo đến một mức độ chính xác nhất định. Có nhiều phương pháp khác nhau để đơn giản phương trình của vỏ mỏng [3]. Sau đây chúng ta sẽ đơn giản bằng cách bỏ đi một số số hạng trong biểu thức của năng lượng.

§ 4. LÝ THUYẾT ĐƠN GIẢN CỦA VỎ MỎNG THỨ NHẤT

Trong lý thuyết này ta sử dụng các giả thiết sau:

1. Vỏ là mỏng, $h/L_o \ll 1$ (L_o là một đại lượng có thứ nguyên chiều dài sẽ xác định sau)

2. Biến dạng của vỏ là bé

3. Bỏ qua biến dạng trượt của vỏ ($\tilde{\gamma}_{\alpha 3} = 0$). Ta đưa vào một tham số dài L đặc trưng cho tỷ số giữa biến dạng trong mặt phẳng trung bình của vỏ và biến dạng uốn

$$L = V_\alpha / \overset{1}{V}_\alpha \tag{4.1}$$

Theo (2.12), (2.13), (4.1) ta có thể viết biểu thức của $\tilde{\gamma}_{\beta\gamma}, \rho_{\beta\gamma}, \overset{1}{\gamma}_{\beta\gamma}$ như sau:

$$\tilde{\gamma}_{\beta\gamma} = (\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{tuyến\ tính} + (\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{phi\ tuyến}$$

$$\rho_{\beta\gamma} \approx \frac{1}{L}(\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{tuyến\ tính} + \frac{1}{R}(\tilde{\gamma}_{\beta\rho})_{phi\ tuyến} + \frac{2}{L}(\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{phi\ tuyến}$$

$$\overset{1}{\gamma}_{\beta\gamma} \approx \frac{1}{R^2}(\tilde{\gamma}_{\beta\rho})_{phi\ tuyến} + \frac{2}{R.L}(\tilde{\gamma}_{\beta\rho})_{phi\ tuyến} + \frac{1}{L^2}(\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{phi\ tuyến} \tag{4.2}$$

với:

$$(\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{tuyến\ tính} = e_{\beta\gamma}$$

$$(\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{phi\ tuyến} = \frac{1}{2}(a^{\lambda\nu} e_{\beta\lambda} e_{\gamma\nu} + \omega_\beta \omega_\gamma) \tag{4.3}$$

R là bán kính cong bé nhất của vỏ,

$A^{\alpha\beta\delta\mu}$ trong (2.5) là một tenxơ không gian, theo (1.15) nó được xác định như sau:

$$A^{\alpha\beta\delta\mu} = (\mu^{-1})^{\alpha}_{\nu}(\mu^{-1})^{\beta}_{\rho}(\mu^{-1})^{\delta}_{\omega}(\mu^{-1})^{\mu}_{\eta}\,\hat{A}^{\nu\rho\omega\eta}, \tag{4.4}$$

với $\overset{\circ}{A}^{\gamma\rho\omega\eta}$ là tenxơ mặt.

Từ (4.4), (2.19), (1.11) sau một số biến đổi ta nhận được các biểu thức

$$ {}_{0}B^{\mu\beta\lambda\eta} = h\overset{\circ}{A}^{\mu\rho\lambda\delta}\left\{\delta^{\beta}_{\rho}\,\delta^{\eta}_{\delta} + \frac{h^2}{12}\,I^{\beta\eta}_{\rho\nu}\,b^{\nu}_{\delta} + 0\left(\frac{h^4}{R^4}\right)\right\}, \qquad (4.5)$$

$$ {}_{1}B^{\mu\beta\lambda\eta} = h\overset{\circ}{A}^{\mu\rho\lambda\eta}\left\{\frac{h^2}{12}\,I^{\beta\eta}_{\rho\delta} + 0\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right\},$$

$$ {}_{2}B^{\mu\beta\lambda\eta} = h\overset{\circ}{A}^{\mu\rho\lambda\eta}\left\{\frac{h^2}{12}\,\delta^{\beta}_{\rho}\,\delta^{\eta}_{\delta} + 0\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right\},$$

$$ I^{\beta\nu}_{\eta\rho} = \delta^{\beta}_{\eta}\,b^{\nu}_{\rho} + b^{\beta}_{\eta}\,\delta^{\nu}_{\rho} - 2H\delta^{\beta}_{\eta}\,\delta^{\nu}_{\rho}, \qquad (4.6)$$

$$ I^{\beta\eta}_{\rho\nu}\,b^{\nu}_{\delta} = b^{\beta}_{\rho}\,b^{\eta}_{\delta} - K\delta^{\beta}_{\rho}\,\delta^{\eta}_{\delta}.$$

Với các giả thiết 1 và 2 bằng cách đưa vào một tham số bé ε ta có thể viết

$$ (\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{tuyến\ tính} = 0(\varepsilon),$$

$$ (\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{phi\ tuyến} = 0(\varepsilon^2), \qquad (4.7)$$

$$ \frac{h}{L_{o}} = 0(\varepsilon),\ (L_{o} = \min\,(L, R)).$$

Trong đó ta hiểu $\lim \dfrac{0(\varepsilon^n)}{\varepsilon^n}$ = hằng số.

Từ (4.7) và từ (2.15), (2.16), (4.5) với độ chính xác đến $O(\varepsilon^4)$ ta có thể viết biểu thức của $\Pi\sigma$ dưới dạng :

$$ \prod\nolimits_{\sigma} = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m}(\overset{*}{N}^{\beta\gamma}\overset{*}{\gamma}_{\beta\gamma} + \overset{*}{M}^{\beta\gamma}\overset{*}{\rho}_{\beta\gamma})\sqrt{a}\,dx^1dx^2 \qquad (4.8)$$

với

$$ \overset{*}{N}^{\beta\gamma} = {}_{0}\overset{*}{B}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\overset{*}{\gamma}_{\varphi\varkappa} + {}_{1}\overset{*}{B}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\overset{*}{\rho}_{\varphi\varkappa},$$

$$ \overset{*}{M}^{\beta\gamma} = {}_{1}\overset{*}{B}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\overset{*}{\gamma}_{\varphi\varkappa} + {}_{2}\overset{*}{B}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\overset{*}{\rho}_{\varphi\varkappa}. \qquad (4.9)$$

$$ \overset{*}{\gamma}_{\beta\gamma} = (\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{tuyến\ tính} + (\tilde{\gamma}_{\beta\gamma})_{phi\ tuyến} = \tilde{\gamma}_{\beta\gamma},$$

$$ \overset{*}{\rho}_{\beta\gamma} = (\rho_{\beta\gamma})_{tuyến\ tính} = (\overset{1}{e}_{\beta\gamma})_{tuyến\ tính} \qquad (4.10)$$

$$ {}_{0}\overset{*}{B}^{\mu\beta\lambda\eta} = h\overset{\circ}{A}^{\mu\rho\lambda\delta}\left(\delta^{\beta}_{\rho}\,\delta^{\eta}_{\delta} + \frac{h^2}{12}\,I^{\beta\eta}_{\rho\nu}\,b^{\nu}_{\delta}\right),$$

$$ {}_{1}\overset{*}{B}^{\mu\beta\lambda\eta} = h\overset{\circ}{A}^{\mu\rho\lambda\delta}\,\frac{h^2}{12}\,I^{\beta\eta}_{\rho\delta},$$

$$ {}_{2}\overset{*}{B}^{\mu\beta\lambda\eta} = h\overset{\circ}{A}^{\mu\rho\delta\lambda}\,\frac{h^2}{12}\,\delta^{\beta}_{\rho}\,\delta^{\eta}_{\delta}. \qquad (4.11)$$

Từ giả thiết 3 và (2.22) ta có

$$\prod_\tau = 0,$$

$$\overset{1}{v}_\alpha = \omega_\alpha - \overset{1}{v}_\lambda e^\lambda_\alpha. \tag{4.12}$$

Từ (4.10) ta nhận được

$$\overset{*}{\rho}_{\beta\gamma} = -\omega_\gamma|_\beta \tag{4.13}$$

Với độ chính xác $O(\varepsilon^4)$ biểu thức của T có dạng

$$\overset{*}{T} = \frac{1}{2}\rho h \int\limits_{\Omega_m} \Big[(\dot{v}_\alpha \dot{v}^\alpha + \dot{W}^2)\left(1 + \frac{h^2}{12}K\right) +$$

$$+ \frac{h^2}{12}(\dot{\omega}_\beta \dot{\omega}^\alpha + 4H\dot{v}^\alpha \dot{\omega}_\alpha)\Big]\sqrt{a}\, dx^1 dx^2. \tag{4.14}$$

Với chú ý đến sự đối xứng của ${}_n\overset{*}{B}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}$ ta có

$$\delta \prod_\sigma = \int\limits_{\Omega_m} (\overset{*}{N}{}^{\beta\gamma}\delta\overset{*}{\gamma}_{\beta\gamma} + \overset{*}{M}{}^{\beta\gamma}\delta\rho_{\beta\gamma})\sqrt{a}\, dx^1 dx^2. \tag{4.15}$$

Từ nguyên lý Hamiltôn (3.1) sau một số phép biến đổi ta nhận được các phương trình chuyển động

$$\overset{*}{N}{}^{\alpha\beta}|_\alpha + \frac{1}{2}(e^\beta_\alpha \overset{*}{N}{}^{\alpha\gamma})\Big|_\gamma + \frac{1}{2}(e^\beta_\alpha \overset{*}{N}{}^{\alpha\beta})\Big|_\alpha - \frac{1}{2}(b^\beta_\gamma \omega_\alpha + b^\beta_\alpha \omega_\gamma)\overset{*}{N}{}^{\alpha\gamma} - b^\beta_\gamma \overset{*}{Q}{}^\gamma +$$

$$+ p^\beta + R^\beta(\dot{v}_\alpha) - \rho h\left[\ddot{v}^\beta\left(1 + \frac{h^2}{12}K\right) + b^\beta_\alpha \frac{h^2}{12}\ddot{\omega}^\alpha + \frac{h^2 H}{6}(\ddot{\omega}^\beta + b^\beta_\alpha \ddot{v}^\alpha)\right] = 0$$

$$(\beta = 1,2), \tag{4.16}$$

$$\overset{*}{Q}{}^\alpha\Big|_\alpha + b_{\alpha\beta}\overset{*}{N}{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\omega_\alpha \overset{*}{N}{}^{\alpha\beta})\Big|_\beta + \frac{1}{2}(\omega_\beta \overset{*}{N}{}^{\alpha\beta})\Big|_\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}(b_{\beta\nu}e^\nu_\alpha + b_{\alpha\lambda}e^\lambda_\beta)\overset{*}{N}{}^{\alpha\beta} + q + R^w(\dot{W}) - \rho h\Bigg[\left(1 + \frac{h^2}{12}K\right)\ddot{W} -$$

$$- \left(\frac{h^2}{12}\ddot{\omega}^\alpha + \frac{Hh^2}{6}\ddot{v}^\alpha\right)\Big|_\alpha\Bigg] = 0 \tag{4.17}$$

và các điều kiện biên sau

$$\overset{*}{N}{}^{\alpha\beta}n_\alpha - \overset{*}{M}{}^{\alpha\beta}b^\gamma_\alpha n_\gamma + \frac{1}{2}(e^\beta_\alpha n_\gamma + e^\beta_\gamma n_\alpha)\overset{*}{N}{}^{\alpha\gamma} + b^{\gamma\beta}(\widetilde{M}_n n_\gamma + \widetilde{M}_\tau \tau_\gamma) - \widetilde{N}^\beta = 0, \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{2}(\omega_\alpha n_\beta + \omega_\beta n_\alpha)\overset{*}{N}{}^{\alpha\beta} + \overset{*}{Q}{}^\beta n_\beta + (\overset{*}{M}{}^{\alpha\beta}n_\alpha \tau_\beta)_{,s} - \widetilde{M}_{\tau,s} - \widetilde{Q} = 0, \tag{4.19}$$

$$\overset{*}{M}{}^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta - \widetilde{M}_n = 0 \tag{4.20}$$

Trong đó lực cắt được xác định bằng biểu thức:

$$\overset{*}{Q}_\beta = \overset{*}{M}{}^{\alpha\beta}\Big|_\alpha \tag{4.21}$$

s là tọa độ cong của biên C, $\vec{\tau} = \tau_\alpha \vec{a}^\alpha$ là vec-tơ đơn vị tiếp tuyến của C

Đối với vật liệu isotrop ta có

$$A^{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu a^{\alpha\beta}a^{\gamma\eta} + \frac{1-\nu}{2}\left(a^{\alpha\eta}a^{\beta\gamma} + a^{\alpha\gamma}a^{\beta\eta}\right)\right] \tag{4.22}$$

Đối với hệ toạ độ cong trực giao và chuyển sang các thành phần vật lý của các Ten-xơ, các biểu thức (4.9) có dạng:

$$\overset{*}{N}{}^{(11)} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\overset{*}{\gamma}_{(11)} + \nu\overset{*}{\gamma}_{(22)} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\overset{*}{\gamma}_{(11)}}{R_1} + \overset{*}{\rho}_{(11)}\right)\right]$$

$$\overset{*}{N}{}^{(22)} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\overset{*}{\gamma}_{(22)} + \nu\overset{*}{\gamma}_{(11)} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{\overset{*}{\gamma}_{(22)}}{R_2} + \overset{*}{\rho}_{(22)}\right)\right]$$

$$\overset{*}{N}{}^{(12)} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\overset{*}{\gamma}_{(12)} + \overset{*}{\gamma}_{(21)} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\overset{*}{\gamma}_{(21)}}{R_1} + \overset{*}{\rho}_{(21)}\right)\right]$$

$$\overset{*}{N}{}^{(21)} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\overset{*}{\gamma}_{(12)} + \overset{*}{\gamma}_{(21)} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{\overset{*}{\gamma}_{(12)}}{R_2} + \overset{*}{\rho}_{(12)}\right)\right]$$

$$\overset{*}{M}{}^{(11)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\overset{*}{\rho}_{(11)} + \nu\overset{*}{\rho}_{(22)} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\overset{*}{\gamma}_{(11)}\right]$$

$$\overset{*}{M}{}^{(22)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\overset{*}{\rho}_{(22)} + \nu\overset{*}{\rho}_{(11)} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\gamma_{(22)}\right]$$

$$\overset{*}{M}{}^{(12)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\overset{*}{\rho}_{(12)} + \overset{*}{\rho}_{(21)} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\overset{*}{\gamma}_{(21)}\right]$$

$$\overset{*}{M}{}^{(21)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\overset{*}{\rho}_{(12)} + \overset{*}{\rho}_{(21)} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\overset{*}{\gamma}_{(12)}\right] \tag{4.23}$$

Trong đó quan hệ giữa các đại lượng $\gamma_{(\alpha\beta)}$, $\rho_{(\alpha\beta)}$ với các chuyển dịch $v_{(\alpha)}$, W theo (4.10) (4.13) bây giờ trở thành

$$\overset{*}{\gamma}_{(11)} = \frac{1}{2}\left(l_{11}^2 + 2l_{11} + l_{21}^2 + l_{31}^2\right)$$

$$\overset{*}{\gamma}_{(22)} = \frac{1}{2}\left(l_{22}^2 + 2l_{22} + l_{12}^2 + l_{32}^2\right)$$

$$\overset{*}{\gamma}_{(12)} = \frac{1}{2}\left(2l_{21} + l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32}\right)$$

$$\overset{*}{\gamma}_{(21)} = \frac{1}{2}\left(2l_{12} + l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32}\right)$$

$$\overset{*}{\rho}_{(11)} = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial l_{31}}{\partial x^1} + \frac{l_{32}}{AB}\frac{\partial A}{\partial x^2}\right)$$

$$\overset{*}{\rho}_{(22)} = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial l_{32}}{\partial x^2} + \frac{l_{31}}{AB}\frac{\partial B}{\partial x^1}\right)$$

$$\overset{*}{\rho}_{(12)} = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial l_{32}}{\partial x^1} - \frac{l_{31}}{AB}\frac{\partial A}{\partial x^2}\right)$$

$$\overset{*}{\rho}_{(21)} = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial l_{31}}{\partial x^2} - \frac{l_{32}}{AB}\frac{\partial B}{\partial x^1}\right) \tag{4.24}$$

với

$$l_{11} = \frac{1}{A}\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{v_{(2)}}{AB}\frac{\partial A}{\partial x^2} - \frac{W}{R_1}$$

$$l_{22} = \frac{1}{B}\frac{\partial v_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{v_{(1)}}{AB}\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{W}{R_2}$$

$$l_{12} = \frac{1}{B}\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{v_{(2)}}{AB}\frac{\partial B}{\partial x^1}$$

$$l_{21} = \frac{1}{A}\frac{\partial v_{(2)}}{\partial x^1} - \frac{v_{(1)}}{AB}\frac{\partial A}{\partial x^2}$$

$$l_{31} = \frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x^1} + \frac{v_{(1)}}{R_1}$$

$$l_{32} = \frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{v_{(2)}}{R_2} \tag{4.25}$$

Trong (4.23), (4.24), (4.25) $N^{(\alpha\beta)}$, $M^{(\alpha\beta)}$, $\gamma_{(\alpha\beta)}$, $\rho_{(\alpha\beta)}$, $v_{(\alpha)}$ là các thành phần vật lý của $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$, v_α. A,B là các hệ số Lamé, R_1, R_2 là các bán kính cong chính của mặt trung bình của vỏ.

Các biểu thức (4.23) đã được Flugge (1934) đối với vỏ trụ và Lure (1940), byrne (1944) thành lập đối với lý thuyết tuyến tính của vỏ.

Các phương trình chuyển động (4.15), (4.16) trong hệ tọa độ cong trực giao có dạng

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big[B(\overset{*}{N}{}^{(11)} + \overset{*}{N}{}^{(11)}l_{11} + \frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{12})\Big] + \frac{\partial}{\partial x^2}\Big[A(\overset{*}{N}{}^{(21)} + \overset{*}{N}{}^{(22)}l_{12} +$$

$$+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{11})\Big] + \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big[\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(11)}l_{21} + \frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{22}\Big] -$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x^1}\Big[\overset{*}{N}{}^{(22)} + \overset{*}{N}{}^{(22)}l_{22} + \frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(21)} + \overset{*}{N}{}^{(12)})l_{21}\Big] - \frac{AB}{R_1}\Big[\overset{*}{Q}{}^{(1)} + \overset{*}{N}{}^{(11)}l_{31} +$$

$$+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{32}\Big] + AB\,[p^{(1)} + R^{(1)}(\dot{v}^{(\alpha)})] -$$

$$-\rho hAB\Big[\Big(1 + \frac{h^2}{12}K + \frac{1}{R_1^2}\frac{h^2}{12} + \frac{Hh^2}{3R_1}\Big)\ddot{v}_{(1)} +$$

$$+\Big(\frac{1}{AR_1}\frac{h^2}{12} + \frac{H}{R_1}\frac{h^2}{6}\Big)\frac{\partial \ddot{w}}{\partial x^1}\Big] = 0, \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\Big[A\Big(\overset{*}{N}{}^{(22)} + \overset{*}{N}_{22}\,l_{22} + \frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{21}\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial x^1}\Big[B\Big(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(11)}l_{21}$$

$$+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{11}\Big)\Big] + \frac{\partial B}{\partial x^1}\Big[\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(22)}l_{12} + \frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{11}\Big]$$

$$-\frac{\partial A}{\partial x^2}\Big[\overset{*}{N}{}^{(21)} + \overset{*}{N}{}^{(11)}l_{11} + \frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{12}\Big] - \frac{AB}{R_2}\Big(\overset{*}{Q}{}^{(2)} + \overset{*}{N}{}^{(22)}l_{32} +$$

$$+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)})\,l_{31}\Big] + AB[p^{(2)} + R^{(2)}(\dot{v}^{(\alpha)})]$$

$$-\rho hAB\left[\left(1+\frac{h^2}{12}K+\frac{1}{R_2^2}\frac{h^2}{12}+\frac{Hh^2}{3R_2}\right)\ddot{v}_{(2)}+\left(\frac{h^2}{12}\frac{1}{AR_2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{h^2}{6}\frac{H}{R_2}\right)\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x^2}\right]=0, \qquad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left[B\left(\overset{*}{Q}^{(1)}+\overset{*}{N}^{(11)}l_{31}+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}^{(12)}+\overset{*}{N}^{(21)})l_{32}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[A(\overset{*}{Q}^{(2)}+\right.$$

$$\left.+\overset{*}{N}^{(22)}l_{32}+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}^{(12)}+\overset{*}{N}^{(21)})l_{31})\right]+\frac{AB}{R_1}\left[\overset{*}{N}^{(11)}+\overset{*}{N}^{(11)}l_{11}+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}^{(12)}+\right.$$

$$\left.+\overset{*}{N}^{(21)})l_{12}\right]+\frac{AB}{R_2}\left[\overset{*}{N}^{(22)}+\overset{*}{N}^{(22)}l_{22}+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}^{(12)}+\overset{*}{N}^{(21)})l_{21}\right]+AB\left[q+\right.$$

$$\left.+R^w(\dot{w})-\rho h\ddot{w}\left(1+\frac{h^2}{12}K\right)\right]+\frac{\rho h^3}{12}\left[B\frac{\partial\ddot{\omega}_{(1)}}{\partial x^1}+A\frac{\partial\ddot{\omega}_{(2)}}{\partial x^2}+\ddot{\omega}_{(2)}\frac{\partial A}{\partial x^2}+\right.$$

$$\ddot{\omega}_{(1)}\frac{\partial B}{\partial x^1}+2B\frac{\partial H}{\partial x^1}\ddot{v}_{(1)}+2A\frac{\partial H}{\partial x^2}\ddot{v}_{(2)}+2H\left(B\frac{\partial\ddot{v}_{(1)}}{\partial x^1}+\right.$$

$$\left.\left.+A\frac{\partial\ddot{v}_{(2)}}{\partial x^2}+\frac{\partial A}{\partial x^2}\ddot{v}_{(2)}+\frac{\partial B}{\partial x^1}\ddot{v}_{(1)}\right)\right]=0. \qquad (4.28)$$

Trong các phương trình này lực cắt $\overset{*}{Q}^{(\alpha)}$ được xác định từ (4.21) như sau :

$$\overset{*}{Q}^{(1)}=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(B\overset{*}{M}^{(21)})+\frac{\partial}{\partial x^2}(A\overset{*}{M}^{(21)})+\frac{\partial A}{\partial x^2}\overset{*}{M}^{(12)}-\frac{\partial B}{\partial x^1}\overset{*}{M}^{(22)}\right],$$

$$\overset{*}{Q}^{(2)}=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}(A\overset{*}{M}^{(22)})+\frac{\partial}{\partial x^1}(B\overset{*}{M}^{(12)})+\frac{\partial B}{\partial x^1}\overset{*}{M}^{(21)}-\frac{\partial A}{\partial x^2}\overset{*}{M}^{(11)}\right]. \qquad (4.29)$$

Các điều kiện biên (4.17) đến (4.19) bây giờ có dạng

$$\left[\overset{*}{N}^{(11)}+\overset{*}{N}^{(11)}l_{11}+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}^{(12)}+\overset{*}{N}^{(21)})l_{12}\right]n_{(1)}+\left[\overset{*}{N}^{(21)}+\overset{*}{N}^{(22)}l_{12}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(\overset{*}{N}^{(12)}+\overset{*}{N}^{(21)})l_{11}\right]n_{(2)}-\frac{1}{R_1}\left[\overset{*}{M}^{(11)}n_{(1)}+\overset{*}{M}^{(21)}n_2\right]+\frac{1}{R_1}\left[\tilde{M}_n n_1+\right.$$

$$\left.+\tilde{M}_\tau\tau_{(1)}\right]-\tilde{N}^{(1)}=0, \qquad (4.30)$$

$$\left[\overset{*}{N}^{(11)}l_{21}+\overset{*}{N}^{(12)}+\frac{1}{2}(\overset{*}{N}^{(12)}+\overset{*}{N}^{(21)})l_{22}\right]n_{(1)}+\left[\overset{*}{N}^{(22)}+\overset{*}{N}^{(22)}l_{22}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(\overset{*}{N}^{(12)}+\overset{*}{N}^{(21)})l_{21}\right]n_{(2)}-\frac{1}{R_2}\left[\overset{*}{M}^{(22)}n_{(2)}+\overset{*}{M}^{(12)}n_{(1)}\right]+$$

$$\frac{1}{R_2}\left[\tilde{M}_n n_{(2)}+\tilde{M}_\tau\tau_{(2)}\right]-\tilde{N}^{(2)}=0, \qquad (4.31)$$

$$\left[\overset{*}{Q}{}^{(1)} + \overset{*}{N}{}^{(11)} l_{31} + \frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)}) l_{32}\right] n_{(1)} + \left[\overset{*}{Q}{}^{(2)} + \overset{*}{N}{}^{(22)} l_{32} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\overset{*}{N}{}^{(12)} + \overset{*}{N}{}^{(21)}) l_{31}\right] n_{(2)} + \frac{\partial}{\partial s}(\overset{*}{M}{}^{(\alpha\beta)} n_{(\alpha)} \tau_{(\beta)}) - \frac{\partial}{\partial s}\widetilde{M}^{\tau} - \widetilde{Q} = 0, \tag{4.32}$$

$$\overset{*}{M}{}^{(\alpha\beta)} n_{(\alpha)} n_{(\beta)} - \widetilde{M}_n = 0. \tag{4.33}$$

Bỏ qua các số hạng quán tính và các số hạng kể đến sự thay đổi của Tenxơ metrik dọc theo chiều dày của vỏ ta nhận được phương trình chuyển động của Koitêr [3]

§ 5. LÝ THUYẾT ĐƠN GIẢN THỨ HAI CỦA VỎ MỎNG

Nếu ngoài các giả thiết của lý thuyết trước ta còn giả thiết

$$\frac{L}{R} \ll 1 \tag{5.1}$$

ta sẽ nhận được lý thuyết đơn giản thứ hai của vỏ mỏng. Giả thiết (5.1) tương ứng với giả thiết biến dạng uốn lớn hơn so với biến dạng trong mặt phẳng trung bình của vỏ

Thay cho biểu thức (4.10) ta đưa vào các Tenxơ đối xứng sau đây

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\overset{*}{\rho}_{\alpha\beta} + \overset{*}{\rho}_{\beta\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} e_{\beta\lambda} - b_{\beta}^{\lambda} e_{\alpha\lambda}), \\ \bar{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} + \overset{*}{\gamma}_{\beta\alpha}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Với độ chính xác $0(\varepsilon^4)$ như ở phần trước, sau một số phép biến đổi công biến dạng có thể biểu diễn bằng biểu thức sau

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega_m} \left[\frac{1}{2}\, {}_0\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} \bar{\gamma}_{\beta\gamma} \bar{\gamma}_{\varphi\varkappa} + {}_1\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} \bar{\gamma}_{\beta\gamma} \bar{\rho}_{\varphi\varkappa} + {}_2\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} \bar{\rho}_{\beta\gamma} \bar{\rho}_{\varphi\varkappa}\right] \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 \tag{5.3}$$

trong đó :

$$\begin{aligned} {}_0\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} &= {}_0B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} + b_{\rho}^{\varphi}\, {}_1B^{\gamma\beta\varkappa\rho} + b_{\rho}^{\gamma}\, {}_1B^{\varkappa\varphi\beta\rho} + b_{\rho}^{\gamma} b_{\eta}^{\varkappa}\, {}_2B^{\beta\rho\varphi\eta}, \\ {}_1\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} &= \frac{1}{2}\left[{}_1B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} + {}_1B^{\gamma\beta\varphi\varkappa} + \frac{1}{2} b_{\rho}^{\gamma}\, ({}_2B^{\varkappa\varphi\beta\rho} + {}_2B^{\beta\rho\lambda\eta}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b_{\rho}^{\gamma}\, ({}_2B^{\varphi\varkappa\beta\rho} + {}_2B^{\beta\rho\varkappa\varphi})\right], \\ {}_2\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} &= \frac{1}{4}\left[{}_2B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} + {}_2B^{\beta\gamma\varkappa\varphi} + {}_2B^{\gamma\beta\varphi\varkappa} + {}_2B^{\beta\gamma\varphi\varkappa}\right]. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Từ (5.4) và (4.5) ta có

$$\begin{aligned} {}_0\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} &= h\overset{\circ}{A}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\left[1 + 0\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right], \\ {}_1\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} &= \overset{\circ}{A}{}^{\beta\gamma\varkappa\varphi}\, 0\left(\frac{h^3}{R}\right), \\ {}_2\mathfrak{D}^{\gamma\beta\varkappa\varphi} &= \frac{h^3}{12}\, \overset{\circ}{A}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\left[1 + 0\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{5.5}$$

và biểu thức (5.3) trở thành

$$\prod = \int_{\Omega_m}\left\{\frac{1}{2} h \overset{\circ}{A}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\bar{\gamma}_{\beta\gamma}\bar{\gamma}_{\varphi\varkappa}\left[1 + 0\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{h^3}{12}\overset{\circ}{A}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\bar{\rho}_{\varphi\varkappa}\left[\bar{\rho}_{\beta\gamma} + 0\left(\frac{\bar{\gamma}_{\beta\gamma}}{R}\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{h^3}{12}\overset{\circ}{A}{}^{\alpha\beta\varkappa\varphi}\bar{\rho}_{\varphi\varkappa}\bar{\rho}_{\beta\alpha}0\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right\}\sqrt{a}\,dx^1dx^2. \tag{5.6}$$

Từ giả thiết (5.1) và từ (4.2) ta có thể bỏ qua số hạng $0(\bar{\gamma}_{\beta\gamma}/R)$ so với $\bar{\rho}_{\beta\gamma}$ trong thành phần thứ hai của (5.6) và nhận được biểu thức sau đây của công biến dạng đối với vỏ mỏng $\left(\frac{h}{R} \ll 1\right)$:

$$\prod = \frac{1}{2}\int_{\Omega m}\left(h\overset{\circ}{A}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\bar{\gamma}_{\alpha\beta}\bar{\gamma}_{\varphi\varkappa} + \frac{h^3}{12}\overset{\circ}{A}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\bar{\rho}_{\beta\gamma}\bar{\rho}_{\varphi\varkappa}\right)\sqrt{a}\,dx^1dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega m}\left(\bar{N}^{\beta\gamma}\bar{\gamma}_{\beta\gamma} + \bar{M}^{\beta\gamma}\bar{\rho}_{\beta\gamma}\right)\sqrt{a}\,dx^1dx^2 \tag{5.7}$$

với

$$\bar{N}^{\beta\gamma} = h\overset{\circ}{A}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\bar{\gamma}_{\varphi\varkappa}, \quad \bar{M}^{\beta\gamma} = \frac{h^3}{12}\overset{\circ}{A}{}^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\bar{\rho}_{\varphi\varkappa}. \tag{5.8}$$

Trong trường hợp tuyến tính các phương trình (5.8) trùng với các phương trình gần đúng của Novoschilov [1]

Từ (4.14) và giả thiết (5.1) biểu thức của T có dạng

$$T = \frac{1}{2}\rho h\int_{\Omega m}\left[(\dot{v}^{\alpha}\dot{v}_{\alpha} + \dot{W}^2)\left(1 + \frac{h^2}{12}K\right) + \frac{h^2}{12}\dot{\omega}^{\alpha}\dot{\omega}_{\alpha}\right]\sqrt{a}\,dx^1dx^2. \tag{5.9}$$

Xuất phát từ nguyên lý Hamilton (3.1) tương tự như trước kia ta nhận được các phương trình chuyển động của vỏ trong lý thuyết đơn giản thứ hai

$$\bar{N}^{\alpha\beta}\Big|_{\alpha} + (e^{\beta}_{\alpha}\bar{N}^{\alpha\gamma})\Big|_{\gamma} - b^{\beta}_{\gamma}\omega_{\alpha}\bar{N}^{\alpha\gamma} - (b^{\beta}_{\alpha}\bar{M}^{\alpha\gamma})\Big|_{\gamma} - b^{\beta}_{\gamma}\bar{Q}^{\gamma} + p^{\beta} +$$

$$+ R^{\beta}(\dot{v}^{\alpha}) - \rho h\left[\ddot{v}^{\beta}\left(1 + \frac{h^2}{12}K\right) - \frac{Hh^2}{6}\ddot{\omega}^{\beta} + b^{\beta}_{\alpha}\frac{h^2}{12}\ddot{\omega}^{\alpha}\right] = 0 \tag{5.10}$$

$$\bar{Q}^{\alpha}\Big|_{\alpha} + b_{\alpha\beta}\bar{N}^{\alpha\beta} + (\omega_{\alpha}\bar{N}^{\alpha\beta})\Big|_{\beta} + b_{\beta\gamma}e^{\gamma}_{\alpha}\bar{N}^{\alpha\beta} - b_{\beta}b^{\lambda}_{\gamma\lambda}M^{\beta\gamma} +$$

$$q + R^{w}(\dot{W}) - \rho h\left[\left(1 + \frac{h^2}{12}K\right)\ddot{W} - \frac{h^2}{12}\ddot{\omega}^{\alpha}\Big|_{\alpha}\right] = 0 \tag{5.11}$$

và các điều kiện biên

$$\bar{N}^{\alpha\beta}n_{\alpha} - \bar{M}^{\alpha\beta}b^{\beta}_{\gamma}n_{\alpha} + e^{\beta}_{\alpha}n_{\alpha}\bar{N}^{\alpha\beta} - b^{\beta}_{\alpha}\bar{M}^{\alpha\gamma}n_{\gamma} +$$

$$b^{\gamma\beta}(\tilde{M}_n n_{\gamma} + \tilde{M}_{\tau}\tau_{\gamma}) - \tilde{N}^{\beta} = 0, \tag{5.12}$$

$$\frac{1}{2}(\omega_{\alpha}n_{\beta} + \omega_{\beta}n_{\alpha})\bar{N}^{\alpha\beta} + \bar{Q}^{\beta}n_{\beta} + (\bar{M}^{\alpha\beta}n_{\alpha}\tau_{\beta})_{,s} - \tilde{M}_{\tau,s} - \tilde{Q} = 0, \tag{5.13}$$

$$\overline{Q}^{\beta} = \overline{M}^{\alpha\beta}|_{\alpha} \tag{5.14}$$

trong đó

Đối với vỏ có vật liệu isotrop, trong hệ tọa độ cong trực giao các biểu thức (5.8) có dạng

$$\overline{N}^{(11)} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\overline{\gamma}_{(11)} + \nu\,\overline{\gamma}_{(22)}),\quad \overline{M}^{(11)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\overline{\rho}_{(11)} + \nu\,\overline{\rho}_{(22)}),$$

$$\overline{N}^{(22)} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\overline{\gamma}_{(22)} + \nu\,\overline{\gamma}_{(11)}),\quad \overline{M}^{(22)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\overline{\rho}_{(22)} + \nu\,\overline{\rho}_{(11)});$$

$$\overline{N}^{(12)} = \overline{N}^{(21)} = \frac{Eh}{1+\nu}\,\overline{\gamma}_{(12)},\quad \overline{M}^{(12)} = \overline{M}^{(21)} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\,\overline{\rho}_{(12)}. \tag{5.15}$$

Trong đó các biểu thức của $\overline{\gamma}_{(ij)}$, $\overline{\rho}_{(ij)}$, được xác định từ (5.2)

$$\overline{\gamma}_{(11)} = \frac{1}{2}(l_{11}^2 + 2l_{11} + l_{21}^2 + l_{31}^2),$$

$$\overline{\gamma}_{(22)} = \frac{1}{2}(l_{22}^2 + 2l_{22} + l_{12}^2 + l_{32}^2),$$

$$\overline{\gamma}_{(12)} = \overline{\gamma}_{(21)} = \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21} + l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32}), \tag{5.16}$$

$$\overline{\rho}_{(11)} = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial l_{31}}{\partial x^1} + \frac{l_{32}}{AB}\frac{\partial A}{\partial x^2}\right) - \frac{l_{11}}{R_1},$$

$$\overline{\rho}_{(22)} = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial l_{32}}{\partial x^2} + \frac{l_{31}}{AB}\frac{\partial B}{\partial x^1}\right) - \frac{l_{22}}{R_2},$$

$$\overline{\rho}_{(12)} = \overline{\rho}_{(21)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial l_{32}}{\partial x^1} + \frac{1}{B}\frac{\partial l_{31}}{\partial x^2} - \frac{l_{31}}{AB}\frac{\partial A}{\partial x^2} - \frac{l_{32}}{AB}\frac{\partial B}{\partial x^1} + \frac{l_{12}}{R_1} + \frac{l_{21}}{R_2}\right).$$

Bỏ qua $e_{\beta\gamma}$ so với $\overline{\omega}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(e_{\beta\alpha} - e_{\alpha\beta})$ trong biểu thức thứ nhất của (5.2), biểu thức (5.7) sẽ có dạng

$$\prod = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} h\overset{\circ}{A}{}^{\alpha\beta\varkappa\varphi}\left(\overline{\gamma}_{\beta\gamma}\overline{\gamma}_{\varphi\varkappa} + \frac{h^2}{12}\tilde{\rho}_{\beta\gamma}\tilde{\rho}_{\varkappa\varphi}\right)\sqrt{a}\,dx^1dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_m}(\tilde{N}^{\beta\gamma}\overline{\gamma}_{\beta\gamma} + \tilde{M}^{\beta\gamma}\tilde{\rho}_{\beta\gamma})\sqrt{a}\,dx^1dx^2, \tag{5.17}$$

trong đó

$$\tilde{N}^{\beta\gamma} = h\overset{\circ}{A}{}^{\alpha\beta\varkappa\varphi}\overline{\gamma}_{\varphi\varkappa},\quad \tilde{M}^{\beta\gamma} = \frac{h^3}{12}\overset{\circ}{A}{}^{\alpha\beta\varkappa\varphi}\tilde{\rho}_{\varphi\varkappa} \tag{5.18}$$

với

$$\tilde{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{*}{\rho}_{\alpha\beta} + \overset{*}{\rho}_{\beta\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda}\overline{\omega}_{\lambda\beta} - b_{\beta}^{\lambda}\overline{\omega}_{\lambda\alpha}). \tag{5.19}$$

Các phương trình (5.18), (5.19) trong trường hợp tuyến tính trùng với các phương trình cấu trúc của Koiter

Nhận ngày 20/1/1982

Địa chỉ
Trường Đại học Bách khoa HN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NAGHDI P. M. Foundation of elastic shell theory progress in Solid Mechanics Volum 4 North Holland publishing company 1963
2. GRREN A.E and ZERNA W. Theoretical Elasticity
3. KOITER W.T. On the nonlinear theory of thin elastic shells 1, 2, 3 Kouicki Nederi. AKad. vonWetenschappen Amsterdam
Proc Ser. 1, S 1-54, B (1966).
4. KOITER W.T. Proc. IUTAM Symposium on the theory of thin elastic shells (North-Horlland Publ. Co.) 12, 1960.
5. NGUYỄN XUÂN HÙNG. Về phương trình dao động của vỏ mỏng. Tạp chí cơ học số. 4/1983.

ZUSAMMENFASSUNG

VEREINFACHUNG DER SCHWINGUNGSGLEICHUNGEN VON DEN DUENNEN SCHALEN

Auf der Grundlage der Arbeit werden zwei vereinfachte Schalentheorien durch Vernachlaessigung einiger Glieder in Energieausdruck angegeben. Im linearen Fall uebereinstimmt die erste Theorie mit der Schalentheorie von Flugge, Lure, und Byrne und die zweite mit der Schalentheorie von Novoshilov.

THÔNG BÁO XÊMINA TOÁN CƠ

(Thứ sáu hàng tuần tại tổ Toán Cơ phòng Toán học ứng dụng, phân viện Khoa học việt Nam, 1 Mạc đỉnh Chi C. 1, TP Hồ Chi Minh)
Các báo cáo trình bày trong năm 1983

1. Đặng Đình Áng, Đinh Ngọc Thanh (ĐHTH) bất đẳng thức biến phân trong một bài toán thấm.
2. Phạm Ngọc Chí (Phòng THUD) Hệ phương trình hypecbolic á tuyến tính.
3. Phạm Hữu Trí (Phòng THUD) Cơ sở lý thuyết bất đẳng thức biến phân và bất phương trình biến phân.
4. Nguyễn Ba (Việt kiều ở tây Đức) Một số kết quả giải số các bài toán thủy lực.
5. Lê Dũng Tráng (Việt kiều ở Pháp) Dòng chảy rối.
6. Đào Minh Ngọc (Phòng THUD) Về một bài toán hai chiều của lý thuyết thấm.
7. Lê Hùng Dũng, Tô Quốc Dũng, Lê Anh Hiền, Nguyên Ngọc Tráng (Phòng Địa Học, PVKHVN) Về khí tượng, thủy văn, địa hình, thổ nhưỡng tỉnh Đồng Tháp.
8. Trần Gia Lịch (Viện toán học) phương pháp đặc trưng cho dòng chảy hai chiều.
9. Đào Minh Ngọc (Phòng THUD) Một mô hình toán học cho việc nghiên cứu cân bằng và chất lượng nước ở Đồng Tháp Mười.
10. URBANIK (Giáo sư Ba Lan) Vài nét về lý thuyết xác suất hiện đại.
11. IVETTE AMICE (Giáo sư Pháp) Sơ lược về nền toán học Pháp hiện nay.
12. G.P. EPIKHOP a) Liên kết giữa dòng chảy trong hệ thống sông và dòng thấm phẳng. b) Bài toán xả lũ.
13. Lê Mậu Long, Trần Thành Trai (Phòng THUD) Dòng chảy và truyền mặn trong hệ thống sông.
14. Trần Văn Lang, Đào Minh Ngọc (Phòng THUD) Cân bằng và chất lượng nước dưới đất vào mùa khô.
15. Đào Minh Ngọc, Lê Văn Thiêm, Phạm Hữu Trí (Phòng THUD) Cân bằng và chất lượng nước dưới đất vào mùa mưa. (Mô hình hai chiều).