Tạp chí Cơ Học T.VI 1984 số 2 (trang 16-22)

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH BIẾN PHÂN THEO BIÊN ĐỘ – PHA CỦA CHẾ ĐỘ CÂN BẰNG

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

Biên độ và pha là hai đại lượng đặc trưng, hai biến chủ yếu trong dao động. Xác định và xét ổn định theo biên độ – pha của các chế độ dao động là nội dung khảo sát cơ bản. Tuy nhiên, riêng khi xét ổn định của chế độ cân bằng, việc lập hệ phương trình biến phân theo biên độ – pha không hoàn toàn đơn giản.

Thực vậy, điển hình là hệ phương trình biến phân (để gọn sẽ chỉ gọi là hệ biến phân) theo biên độ – pha của chế độ cân bằng ở một hệ thông số [1, trang 623], lập từ hệ phương trình vi phân trung bình (để gọn, sẽ chỉ gọi là hệ trung bình) nguyên dạng không chia hai vế của phương trình pha cho biên độ – bằng cách đưa vào các biến phân biên độ – pha như thông thường. Hệ biến phân thu được có dạng lạ gồm một phương trình vi phân của biến phân biên độ và một phương trình lượng giác xác định góc lệch pha chưa biết (biến phân của góc lệch pha không có mặt).

Trong [2, chương IV] đã nhấn mạnh rằng, so với hai biến (a, b) (với tọa độ dao động x, về cơ bản, có liên hệ $x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, ω – tần số) hai biến biên độ pha có ưu điểm cho phép xác định chẳng những chế độ dao động loại (1) không chứa tần số không cộng hưởng mà cả loại (2) chứa tần số đó. Nhưng hệ biến phân chỉ được lập – với phép chia nói trên – cho chế độ dao động loại (2) ; sau đó, chứng minh rằng, bằng cách triệt tiêu biên độ tương ứng tần số không cộng hưởng, sẽ tìm thấy đúng các số đặc trưng của chế độ dao động loại (1) có khi lập hệ biến phân theo hai biến (a, b). Như thế, tuy đặt cơ sở sử dụng phương trình đặc trưng của chế độ động loại (2) để khảo sát ổn định của chế độ dao động loại (1) nhưng chưa thực sự cho biết hệ biến phân của chế độ dao động loại (1). Hơn nữa, trường hợp mà chính tần số cộng hưởng không có mặt trong chế độ dao động (như ở hệ thông số) – trường hợp đáng chú ý vì góc lệch pha có mặt ở vế phải của hệ trung bình – chưa được đề cập đến.

Trong [3], với chế độ cân bằng, hệ biến phân chỉ được lập cho hệ thuần tự chấn và riêng cho biên độ [trang 78] ; ở các hệ khác, tính ổn định của chế độ cân bằng được suy ra từ hệ trung bình nhờ tích phân trực tiếp [trang 181-185, ở một thí dụ] hoặc sau khi đổi về hai biến (a, b) – trường hợp hệ thông số tuyến tính – nhờ phương trình đặc trưng (của hệ trung bình) [trang 211-213]. Tất nhiên phương pháp được lựa chọn tùy thuộc nội dung cần trình bày nhưng ở đây, chắc hẳn có sự thận trọng liên quan đến ý kiến nêu trong [4, trang 978] cho rằng, khi khai triển tiệm cận nghiệm trên siêu điện bất biến, không những sẽ là thừa nếu đưa vào biên độ pha của tất cả các tọa độ (nghĩa là của cả các tọa độ cân bằng) mà còn gây khó khăn vì xuất hiện tính kỳ dị loại cực.

Những nhận xét trên cho thấy việc thành lập hệ biến phân theo biên độ-pha của chế độ cân bằng có những phức tạp nhất định và chưa được nhất trí. Nhằm làm sáng tỏ vấn đề, dưới đây, sẽ xem xét lại để thấy phương pháp lập hệ biến phân trong [1] không có cơ sở và kết quả thu được bị hạn chế và có thể dẫn đến sai lầm.

§ 1. MỘT PHƯƠNG PHÁP LẬP HỆ BIẾN PHÂN

Xét hệ dao động á tuyến thông số cộng hưởng thứ điều hòa mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\Delta x - h\dot{x} - kx^3 + 2fx\cos 2\omega t) \tag{1.1}$$

trong đó: ε – ký hiệu tham số bé; $x, \dot{x}, \ddot{x}$ – tọa độ, tốc độ và gia tốc dao động; 1 – – tần số riêng; 2ω – tần số kích động; $\Delta = (\omega^2 - 1)$ – hệ số đặc trưng cho độ lệch tần; h, k, f – những hệ số tương ứng hệ số cản, hệ số phi tuyến đàn hồi (giả thiết loại cứng) và cường độ kích động.

Đưa vào biên độ r và góc lệch pha φ theo hệ thức:

$$x = r\cos(\omega t - \varphi)\,;\quad \dot{x} = -r\omega\sin(\omega t - \varphi) \tag{1.2}$$

và lập hệ trung bình:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\varepsilon r}{2\omega}(-h\omega + f\sin 2\varphi) \\ r\dot{\varphi} &= \frac{\varepsilon r}{2\omega}\left(\Delta - \frac{3}{4}kr^2 + f\cos 2\varphi\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Khi hệ số cản đủ nhỏ, chế độ dao động dừng tồn tại và có biên độ xác định từ hệ thức:

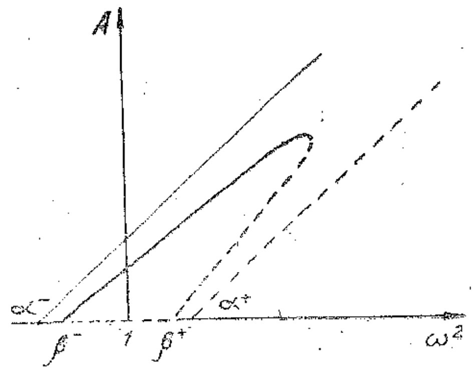
$$A = \frac{3}{4}kr^2 = \Delta \pm \sqrt{f^2 - h^2\omega^2} = (\omega^2 - 1) \pm \sqrt{f^2 - h^2\omega^2} \tag{1.4}$$

Đồ thị A cắt trục hoành ω^2 ở hai điểm β^-, β^+ tương ứng các giá trị ω^2 xác định từ phương trình $(\omega^2 - 1)^2 = f^2 - h^2\omega^2$. Khi $h \to 0$, đồ thị A suy biến thành hai đường song song, độ dốc 1, cắt trục hoành ở hai điểm α^-, α^+ nằm ở hai phía của khoảng (β^-, β^+) và tương ứng các giá trị $\omega^2 = 1 \mp f$ hay $\Delta = \mp f$ (h.1)

Ngoài ra hệ luôn có chế độ cân bằng $x = 0$ tương ứng nghiệm $r = 0$ của hệ (1.3). Trong [1], với ký hiệu khác, đã khảo sát ổn định của chế độ này như sau:

Xem chế độ cân bằng là chế độ dao động có biên độ $r_o = 0$ và có góc lệch pha bằng φ_o. Đặt các biến phân $r = r_o + \delta r$, $\varphi = \varphi_o + \delta\varphi$; thay vào hệ (1.3) – không chia hai vế của phương trình pha cho biên độ – chúng ta được hệ biến phân:

$$\begin{aligned} (\delta r)^{\cdot} &= \frac{\varepsilon}{2\omega}\delta r(-h\omega + f\sin 2\varphi_o), \\ o &= \frac{\varepsilon}{2\omega}\delta r(\Delta + f\cos 2\varphi_o). \end{aligned} \tag{1.5}$$



Hình 1

Phương trình thứ hai quy về phương trình lượng giác xác định góc lệch pha:

$$\cos 2\varphi_o = -\frac{\Delta}{f}\,,\ \sin 2\varphi_o = \pm\sqrt{1 - \Delta^2/f^2} \tag{1.6}$$

(trong [1] chỉ giữ lại dấu + ; ở đây giữ cả dấu − với lý do sẽ thấy rõ ở § 2)

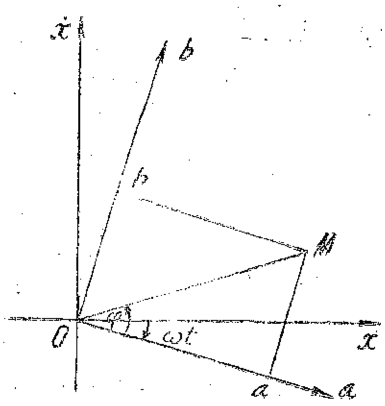
Thay sin $2\varphi_e$ bởi giá trị của nó, phương trình thứ nhất của hệ (1.5) trở thành:

$$(\delta r)^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{2\omega}\,\delta r\,(-h\omega \pm \sqrt{f^2 - \Delta^2}) \tag{1.7}$$

Đây là hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số của biến phân biên độ. Theo [1] nếu phần trong móc () ở vế phải của phương trình (1.7) có phần thực âm hoặc bằng không, chế độ cân bằng ổn định. Điều kiện đó tương ứng các giá trị ω^2 ngoài khoảng (β^-, β^+) ; trong khoảng đó, chế độ cân bằng không ổn định.

§ 2. NHẬN XÉT VỀ CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Dễ dàng nhận thấy, cơ sở của phương pháp lập hệ biến phân vừa sơ lược trình bày trên là: 1/ xem chế độ cân bằng có góc lệch pha hằng: 2/ quan niệm ổn định của chế độ cân bằng theo cả hai biến biên độ và pha. Nhưng với chế độ cân bằng, góc pha và do đó khái niệm ổn định của góc pha không còn ý nghĩa. Điều đó dễ nhận thấy khi tìm hiểu các dao động lân cận chế độ cân bằng. Thực vậy, đưa vào hai biến (a, b) theo hệ thức:



Hình 2

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ \dot{x} &= -\omega(a\sin\omega t - b\cos\omega t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Gọi M là điểm ảnh có tọa độ $(x, \dot{x})$ trên mặt pha $ox\dot{x}$. Hai biến (a, b) là tọa độ của M trên mặt oab quay đều quanh 0 với vận tốc góc ω theo chiều quay từ trục $\dot{x}$ đến trục x ; :góc lệch pha $\varphi = \widehat{aoM}$ (h.2).

Hệ trung bình theo (a, b) là:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\varepsilon}{2\omega}\left[-h\omega a + (f-\Delta)b + \frac{3}{4}kb\,(a^2+b^2)\right] \\ \dot{b} &= \frac{\varepsilon}{2\omega}\left[(f+\Delta)a - h\omega b - \frac{3}{4}ka\,(a^2+b^2)\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Hệ tuyến tính tương ứng là:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\varepsilon}{2\omega}\left[-h\omega a + (f-\Delta)\,b\right] \\ \dot{b} &= \frac{\varepsilon}{2\omega}\left[(f+\Delta)\,a - h\omega b\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + Ch\lambda + \frac{\varepsilon^2}{4\omega^2}\,[(\omega^2-1)^2 - (f^2 - h^2\omega^2)] = 0 \tag{2.4}$$

có hai nghiệm (giá trị riêng):

$$\lambda_{+,-} = \frac{\varepsilon}{2\omega}(-h\omega \pm \sqrt{f^2-\Delta^2}) \tag{2.5}$$

Hạn chế xét các trường hợp gốc 0 (chế độ cân bằng) là không suy biến [5; chương V, 30], dáng điệu dao động lân cận gốc 0 của hệ (2.2) được quyết định bởi hệ tuyến tính (2.3) nên ngoài điều kiện $h > 0$ chúng ta giả thiết thêm:

$$(\omega^2 - 1)^2 - (f^2 - h^2\omega^2) \neq 0\,; \tag{2.6}$$

$$\Delta^2 \neq f^2 \tag{2.7}$$

nghĩa là tương ứng loại ra không khảo sát trên trục ω^2 các điểm β^-, β^+ ($\lambda_+ = 0$, giao điểm của đồ thị A với trục hoành ω^2) và α^-, α^+ $\left(\text{số đặc trưng kép } \lambda_- = \lambda_+ = -\varepsilon \dfrac{h}{2}\right)$.

Ba trường hợp có thể xảy ra:

1. Hai số đặc trưng thực và ngược dấu $\lambda_- < 0 < \lambda_+$.

Khi đó:

$$f^2 > \Delta^2 \text{ hay } 1 - f < \omega^2 < 1 + f\,; \tag{2.8}$$

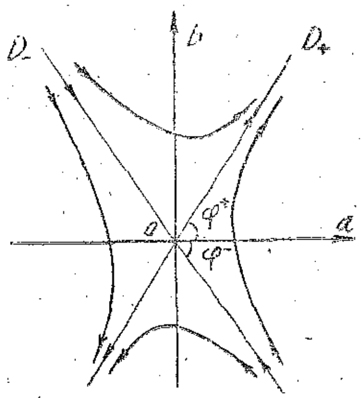
$$-h\omega + \sqrt{f^2 - \Delta^2} > 0 \text{ hay } (\omega^2 - 1)^2 - (f^2 - h^2\omega^2) < 0 \tag{2.9}$$

Các giá trị tương ứng ω^2 nằm trong khoảng (β^-, β^+). Trên mặt oab gốc 0 là điểm yên và điểm M chuyển động theo phương trình:

$$a = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t}$$
$$b = \chi(C_+ e^{\lambda_+ t} - C_- e^{\lambda_- t}) \tag{2.10}$$

trong đó:

$$\chi = \sqrt{\frac{f + \Delta}{f - \Delta}} \tag{2.11}$$



Hình 3

Khi $t \to \infty$, phần lớn các chuyển động rời xa gốc trên hoặc tiệm cận đến đường OD_+ có độ dốc $tg\varphi_+ = \chi$; một số chuyển động tiến đến gốc trên đường OD_- có độ dốc $tg\varphi_- = -\chi$ (hình 3.)

Dễ dàng nhận ra φ_+ và φ_- chính là hai góc lệch pha φ_0 ở §1 vì:

$$\cos 2\varphi_{+,-} = \frac{1 - tg^2\varphi_{+,-}}{1 + tg^2\varphi_{+,-}} = -\frac{\Delta}{f}\,;\ \sin 2\varphi_{+,-} = \frac{2tg\varphi_{+,-}}{1 + tg^2\varphi_{+,-}} = \pm\sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{f^2}} \tag{2.12}$$

(chú ý rằng khi $\Delta > 0$, $\varphi_+ > 45°$; khi $\Delta < 0$, $\varphi_+ < 45°$)

Trên mặt pha, khi $t \to \infty$ các chuyển động là hoặc tiệm cận đến dạng xoắn, chu kỳ một vòng quay là $2\pi/\omega$; phần lớn có biên độ tăng và góc lệch pha bằng hoặc tiệm cận đến giá trị $\varphi_+ (\varphi_+ + \pi)$; một số có biên độ giảm và có góc lệch pha $\varphi_- (\varphi_- + \pi)$. Chế độ cân bằng không ổn định.

2. Hai số đặc trưng thực âm và phân biệt: $\lambda_- < \lambda_+ < 0$.

Khi đó điều kiện (2.8) thỏa mãn và:

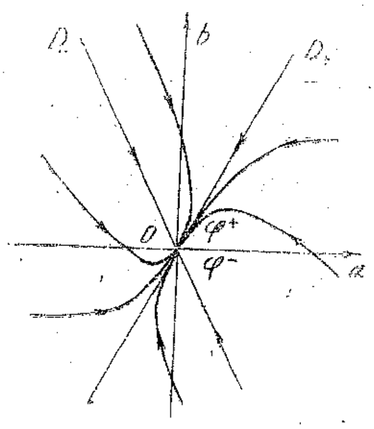
$$-h\omega + \sqrt{f^2 - \Delta^2} < 0 \text{ hay } (\omega^2 - 1)^2 - (f^2 - h^2\omega^2) > 0. \tag{2.13}$$

Các giá trị tương ứng ω^2 nằm trong khoảng (α^-, β^-) hoặc (β^+, α^+). Trên mặt oab, gốc o là điểm nút ổn định. Chuyển động của M được biểu diễn trên h.4. Từ đó dễ dàng hình dung ra các chuyển động xoắn trên mặt pha: tất cả đều tiến tới gốc o; chu kỳ *một vòng quay* bằng hoặc tiến đến $2\pi/\omega$ phần lớn có góc lệch pha bằng hoặc tiệm cận đến φ_+; một số có góc lệch pha bằng φ_-.

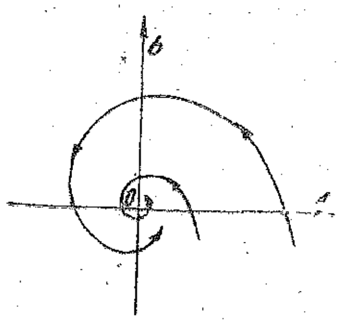
3. Hai số đặc trưng phức liên hợp với phần thực âm.

Khi đó :

$$f^2 < \Delta^2 \quad \text{nghĩa là } \omega^2 < 1 - f \text{ hoặc } \omega^2 > 1 + f \qquad (2.14)$$



Hình 4



Hình 5

Các giá trị tương ứng ω^2 nằm ngoài đoạn $[\alpha^-, \alpha^+]$. Trên mặt oab, gốc o là điểm tiêu ổn định, điểm M chuyển động theo phương trình :

$$a = e^{-\varepsilon h t/2}(C_+ \cos\varepsilon pt + C_- \sin\varepsilon pt)$$
$$b = \mu e^{-\varepsilon h t/2}(C_+ \sin\varepsilon pt - C_- \cos\varepsilon pt) \qquad (2.15)$$

trong đó : $p = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\Delta^2 - f^2}$; $\mu = \pm\sqrt{\frac{\Delta + f}{\Delta - f}}$ (dấu $+(-)$ khi $\Delta > 0$ (< 0)).

Góc lệch pha biến thiên theo quy luật :

$$\operatorname{tg}\varphi = \mu \operatorname{tg}(\varepsilon pt + \theta) \qquad (1.16)$$

trong đó θ phụ thuộc điều kiện đầu.

Góc φ tăng hay giảm tùy theo $\Delta > 0$ hay $\Delta < 0$ và gồm hai thành phần : thành phần biến thiên đều một góc π trong mỗi khoảng thời gian $\pi/\varepsilon p$; – thành phần tuần hoàn chu kỳ $\pi/\varepsilon p$ (vì ε nằm ở mẫu số, chu kỳ này dài). Trên h.5, biểu diễn chuyển động của M khi $\Delta > 0$; chiều xoắn ngược lại khi $\Delta < 0$.

Trên mặt pha, có chuyển động xoắn tiến về gốc o – tổng hợp của chuyển động xoắn nói trên với chuyển động quay đều của mặt oab. Chế độ cân bằng ổn định tiệm cận.

Những kết quả phân tích trên cho thấy góc lệch pha biến thiên rất đa dạng : có thể tiến đến các giá trị hằng (trường hợp 1 và 2) nhưng cũng có thể biến thiên đều kèm theo phần tuần hoàn và không có giới hạn chung (trường hợp 3). Chú ý rằng, tuy cùng được gọi là ổn định tiệm cận, quy luật biến thiên của góc lệch pha ở trường hợp 2 và 3 hoàn toàn khác nhau. Vì vậy quan niệm chế độ cân bằng tương ứng góc lệch pha hằng là không có cơ sở.

Mặt khác, khái niệm ổn định của chế độ cân bằng rõ ràng chỉ liên quan đến quy luật biến thiên của biên độ, góc lệch pha không giữ vai trò gì nên cũng không hợp lý khi khảo sát ổn định của chế độ cân bằng theo cả hai biến biên độ và pha.

§3. NHỮNG HẠN CHẾ VÀ SAI LẦM TRONG KẾT QUẢ TÍNH TOÁN

Có thể củng cố những nhận định trên qua việc xem xét các kết quả thu được khi áp dụng phương pháp lập hệ biến phân trong [1].

Trước hết, theo (1.6), phương pháp và kết quả thu được chỉ có giá trị khi:

$$|\Delta| \leqslant f \text{ hay } 1 - f \leqslant \omega^2 \leqslant 1 + f \tag{3.1}$$

tương ứng khoảng tần số thuộc đoạn $[\alpha^-, \alpha^+]$ (thực ra, tương ứng hai điểm β^- và β^+ một số đặc trưng bằng không trong khi số kia âm, từ tính ổn định không tiệm cận của hệ biến phân, chúng ta không thể rút ra kết luận về tính ổn định của hệ trung bình). Đoạn trên chỉ là một phần của vùng cộng hưởng; ngoài đoạn trên, chưa có kết luận về ổn định.

Dễ dàng đưa ra một thí dụ trong đó đoạn $[\alpha^-, \alpha^+]$ quy về một điểm, hệ biến phân lập theo [1] dẫn đến những kết luận không thể chấp nhận được. Thực vậy, xét hệ:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon[\Delta x - h\dot{x} - \beta x^3 + 2fx^3\cos 2\omega t] \tag{3.2}$$

Hệ trung bình là:

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon r}{2\omega}\left(-h\omega + \frac{1}{2}fr^2\sin 2\varphi\right); \; r\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon r}{2\omega}\left(\Delta - \frac{3}{4}kr^2 + fr^2\cos 2\varphi\right) \tag{3.3}$$

Từ đó dễ dàng lập hệ biến phân của chế độ cân bằng:

$$(\delta r)^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{2}h(\delta r); \; 0 = \frac{\varepsilon}{2\omega}\Delta(\delta r), \tag{3.4}$$

trong đó phương trình thứ hai cho $\Delta = 0$ nghĩa là tần số kích động $\omega^2 = 1$ (!). Xét thí dụ hệ hai bậc tự do không chịu kích động ngoại lực:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \varepsilon[h_1\dot{x}_1 - k_1\dot{x}_1^3 + (m_1 x_1 + n_1\dot{x}_1)x_2^2] \tag{3.5}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \varepsilon[h_2\dot{x}_2 - k_2\dot{x}_2^3(m_2 x_2 + n_2\dot{x}_2)x_1^2]$$

trong đó: ω_1, ω_2 — các tần số riêng không cộng hưởng;
h_i, k_i, m_i, n_i $(i = 1,2)$ — các hằng số dương.

Đưa vào các biến biên độ — pha $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$ và lập hệ trung bình:

$$\dot{r}_1 = \frac{\varepsilon r_1}{2}\left[h_1 - \frac{3}{4}k_1\omega_1^2 r_1^2 + \frac{n_1}{2}r_2^2\right]; \; r_1\dot{\varphi}_1 = \frac{\varepsilon m_1}{4\omega_1}r_2^2 r_1, \tag{3.6}$$

$$\dot{r}_2 = \frac{\varepsilon r_2}{2}\left[h_2 - \frac{3}{4}k_2\omega_2^2 r_2^2 + \frac{n_2}{2}r_1^2\right]; \; r_2\dot{\varphi}_2 = \frac{\varepsilon m_2}{4\omega_2}r_1^2 r_2.$$

Chế độ dao động của riêng x_1 tương ứng nghiệm dừng:

$$\frac{3}{4}k_1\omega_1^2 r_1^2 = h_1; \; \varphi_1 = \text{hằng}; \; r_2 = 0 \tag{3.7}$$

Nếu lập hệ biến phân theo [1], phương trình biến phân cuối sẽ cho biên độ $r_1 = 0$ (!)

Địa chỉ:
Đại học Bách khoa HN

Nhận ngày 6/4/1983

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. КАУДЕРЕР Г. Нелинейная механика. И.Л., Москва, 1961.
2. МАЛКИН И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Госуд. изд., Москва, 1956.
3. БОГОЛЮБОВ Н.Н., МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Госуд. изд Москва, 1963.

4. МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А., САМОЙЛЕНКО А.М. Асимптотические методы в теории многочастотных колебаний. Proceedings of the VIII[th] International Conference on Nonliear oscillations. Prague 1978.

5. ПОНТРЯГИН Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Госуд. Изд., Москва, 1961.

РЕЗЮМЕ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ ПО АМПЛИТУДО-ФАЗЕ ДЛЯ РЕЖИМА РАВНОВЕСИЯ.

Анализируется изложений в [1] метод построения системы уравнений в вариациях по амплитудо-фазе для режима равновесия в параметрической системе. Было отмечено, что предложения о постоянном значении фазы и об устойчивости по фазе не основаны. Приведены некоторые примеры, в которых появляются очевидные ощибки.

LÝ THUYẾT KHUẾCH TÁN SUY RỘNG

(tiếp trang 15)

5. TIERSTEN H.F., JAHAMIN M. Arch. Rat. Mech. Anal. 1977

6. AXENBAX.Д.Д trong tập Механика композиционных материалов. Изд. Мир. М, 1978.

SUMMARY

GENERALIZED – DIFFUSIVE THEORY OF SOLID MIXTURES

III. ANISOTROPY AND WAVE PROPAGATION IN COMPOZITE MATERIAL

In this paper the linear elastic constitutive equations for anisotropic compozite material are obtained. The wave propagation in this material is discussed.