Tạp Chí Cơ Học T. VI, 1984 Số 2 (trang 11-15)

LÝ THUYẾT KHUẾCH TÁN SUY RỘNG VỀ CÁC HỖN HỢP RẮN. III – TÍNH DỊ HƯỚNG VÀ SỰ TRUYỀN SÓNG TRONG VẬT LIỆU COMPOZIT

TRƯƠNG MINH CHÁNH

Mô hình vật liệu compozit theo quan điểm khuếch tán suy rộng đã được xây dựng trong [1,2] cho trường hợp nhiều chất, nhiều nhiệt độ và tuyến tính đẳng hướng. Sau đây vẫn trong khuôn khổ mô hình đó ta sẽ mở rộng xét các vật liệu có tính đối xứng phức tạp hơn và làm sáng tỏ hiệu ứng tán sắc của các sóng lan truyền trong đó.

§ 1. TÍNH DỊ HƯỚNG CỦA COMPOZIT

Trong vật liệu compozit tính đối xứng có thể biểu hiện hoặc là ở trong một yếu tố nhỏ của môi trường hoặc là ở toàn cục và do cấu trúc của compozit quyết định và do đó cũng có nhiều công trình xét tính đối xứng của compozit theo các quan điểm khác nhau [3-6]. Do yêu cầu kỹ thuật, các chi tiết làm từ vật liệu compozit (vật liệu xây dựng, các chi tiết máy,...) phải có một tính đối xứng nào đó để chịu lực, nhiệt,... tốt hơn và đòi hỏi đó là nguyên nhân chính cho việc chọn cách sắp xếp, hình thể phân bố, sự định hướng, tính đối xứng riêng,... của các môi trường cốt. Xuất phát từ suy nghĩ đó ở đây tác giả cũng chỉ xét trường hợp khi tính dị hướng của môi trường thể hiện ở toàn cục còn các chất hợp thành hoàn toàn đẳng hướng và chỉ hạn chế xét trường hợp đối xứng trục.

Ta xét một vật liệu compozit được tạo thành từ hai chất rắn khác nhau, không tham gia phản ứng hóa học với nhau. Các phương trình và khái niệm cơ bản đã được trình bày trong [1.2]. Hàm năng lượng tự do chung cho toàn hỗn hợp được giả định khả vi liên tục theo các biến số có dạng :

$$\Psi = \Psi(e^a, \vec{W}_1^a, \nabla\vec{W}_1^a, C_1, T_1, T_2, g, B, \chi_r) \tag{1.1}$$

Đại lượng e^a là tenxơ biến dạng trung bình biểu diễn qua các dịch chuyển trung bình $\vec{W}^a$; $\vec{W}_1^a$ là véc tơ dịch chuyển tương đối của chất thứ nhất so với dịch chuyển trung bình ; C_1 là nồng độ khối lượng của chất hợp thành ; T_1, T_2 là nhiệt độ trung bình ; g là tenxơ đơn vị hạng hai, $B = \vec{d}\,\vec{d} - \frac{1}{3}g$ với $\vec{d}$ là véc tơ đơn vị hướng theo trục đối xứng ; χ_r là các thông số đặc trưng cho hình học của môi trường cốt (kích thước, hình dạng của các cốt sợi...), hình học của sự phân bố môi trường cốt (khoảng cách giữa các cốt sợi, hình thể của sự sắp xếp cốt sợi, sự định hướng của chúng,...) và các hằng số vật chất đặc trưng cho các tính chất cơ lý của các chất hợp thành (chẳng hạn các hệ số Poát xông, môđun Yong, các hệ số truyền nhiệt,...).

Hàm năng lượng tự do Ψ cần phải thỏa mãn điều kiện :

$$\left\{ \vec{W}_1^a \frac{\partial\Psi}{\partial\vec{W}_1^a} + (\vec{W}_1^a\nabla) . \frac{\partial\Psi}{\partial\nabla\vec{W}_1^a} \right\}^A = 0. \tag{1.2}$$

trong đó ký hiệu $\{...\}^{A}$ chỉ việc phản xứng hóa tenxo trong ngoặc.

Trong trường hợp khi các dịch chuyển $\vec{W}^{a}$, $\vec{W}_1^{a}$ và các gradient dịch chuyển của chúng, $C_1 = C_1 - C_1^{o}$, $\theta_\alpha = T_\alpha - T_\alpha^{o}$ có giá trị rất nhỏ (C_1^{o}, T_α^{o} là các đại lượng tương ứng của các chất ở trạng thái tự nhiên ban đầu) ta có thể khai triển hàm năng lượng tự do ra chuỗi Maccloren và chỉ hạn chế xét tới các số hạng bậc hai theo các biến; sử dụng phép khai triển tenxo ra thành tổng các tenxo trực giao và khái niệm hàm tựa đẳng hướng, đẳng phương ta có biểu thức khai triển ở dạng:

$$
\begin{aligned}
\rho^{o}\Psi = {} & \rho^{o}\mu_1^{o}C_1 - \sum_{\alpha=1}^{2}\rho^{o}\eta_\alpha^{o}\theta_\alpha + \frac{1}{2}k^{1}e_o^{2} + \frac{1}{2}k^{2}e_2 : e_2 + \frac{1}{2}k_{11}^{3}\vec{W}_1^{a}\cdot\vec{W}_1^{a} + \\
& + \frac{1}{2}k_{11}^{4}(\nabla\cdot\vec{W}_1^{a})^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}k_{\alpha\beta}^{5}\theta_\alpha\theta_\beta + \sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{6}e_o\theta_\alpha + \frac{1}{2}k_{11}^{7}C_1^{2} + k_1^{8}e_oC_1 + \\
& \sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{9}\theta_\alpha C_1 + k^{10}e_oe_2 : B + k^{11}C_1e_2 : B + \sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{12}\theta_\alpha e_2 : B + \frac{1}{2}k^{13}(e_2\cdot e_2) : B + \\
& + \frac{1}{2}k^{14}(e_2 : B)^2 + \frac{1}{2}k^{15}\vec{\Omega}_1^{w}\cdot\vec{\Omega}_1^{w} + \frac{1}{2}k^{16}D_1^{w} : D_1^{w} + k^{17}(\nabla\cdot\vec{W}_1^{a})C_1 + \\
& + k^{18}e_o(\nabla\cdot\vec{W}_1^{a}) + k^{19}e_2 : D_1^{w} + \sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{20}\theta_\alpha\nabla\cdot\vec{W}_1^{a} + k^{21}(\nabla\cdot\vec{W}_1^{a})e_2 : B + \\
& + k^{22}e_oD_1^{w} : B + k^{23}(\nabla\cdot\vec{W}_1^{a})D_1^{w} : B + k^{24}C_1D_1^{w} : B + \sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{25}\theta_\alpha D_1^{w} : B + \\
& + \frac{1}{2}k^{26}(D_1^{w}\cdot D_1^{w}) : B + \frac{1}{2}k^{27}(\vec{W}_1^{a}\cdot\vec{W}_1^{a}) : B + \frac{1}{2}k^{28}\vec{\Omega}_1^{w}\vec{\Omega}_1^{w} : B + \\
& + k^{29}[(\vec{\Omega}_1^{w}\cdot E)\cdot D_1^{w}] : B + k^{30}[(\vec{\Omega}_1^{w}\cdot E)\cdot e_2] : B + k^{31}(e_2\cdot D_1^{w}) : B] + \\
& + \frac{1}{2}k^{32}(D_1^{w} : B)^2 + k^{33}(e_2 : B)(D_1^{w} : B),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

trong đó $e_o = \frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{W}^{a}$, e_2 và $\vec{\Omega}_1^{w} = \frac{1}{2}\nabla\times\vec{W}_1^{a}$, D_1^{w} tương ứng là lượng vô hướng, véc tơ và tenxo lệch của $\nabla\vec{W}^{a}$ và $\nabla\vec{W}_1^{a}$.

Do các đại lượng e_o, $\nabla\cdot\vec{W}_1^{a}$, $\vec{W}_1^{a}$, $\vec{\Omega}_1^{w}$, e_2, D_1^{w}, C_1, θ_1, θ_2 là những đại lượng độc lập lẫn nhau nên điều kiện (1.2) tương ứng với các hạn chế sau:

$$2k^{16} = k^{15} = 6k_{11}^{4},\ k^{\alpha} = 0\ (\alpha = 17, 18, ..., 33) \tag{1.4}$$

Thay các giá trị ở (1.4) vào (1.3) ta nhận được dạng Ψ đơn giản. Các hàm cấu trúc không hao tán được xác định như sau:

$$\rho^\circ\eta_\alpha = -\rho^\circ \frac{\partial\psi}{\partial\theta_\alpha} = \rho^\circ\eta^\circ - \sum_{\beta=1}^{2} k^5_{\alpha\beta}\theta_\beta - k^6_\alpha e_o - k^9_{1\alpha}C_1 - k^{12}_\alpha e_2 : B$$

$$\rho^\circ\mu_1 = \rho^\circ \frac{\partial\Psi}{\partial C_1} = \rho^\circ\mu_1^\circ + k^7_{11}C_1 + k^8_1 e_o + \sum_{\alpha=1}^{2} k^9_{1\alpha}\theta_\alpha + k^{11}e_2 : B,$$

$$t = \rho^\circ\left(\frac{\partial\psi}{\partial e^a}\right)^C = \frac{1}{3}\left(k^1 e_o + \sum_{\alpha=1}^{2} k^6_\alpha\theta_\alpha + k^8_1 C_1 + k^{10}e_2 : B\right) g +$$

$$k^2 e_2 + \left(k^{10}e_o + k^{11}C_1 + \sum_{\alpha=1}^{2} k^{12}_\alpha\theta_\alpha + k^{14}e_2 : B\right) B +$$

$$+ k^{13}\left[(e_2 : B)^C - \frac{1}{3}e_2 : Bg\right]$$

$$^E\vec{F}^a_1 - \nabla\mu_1 + \left(1 - \frac{\rho_2 a_1}{\rho_1 a_2}\right)C^\circ_1\nabla\mu_1 = \frac{k^3_{11}}{\rho_1}\vec{W}^a_1 = \frac{\rho^\circ}{\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{W}^a_1},$$

$$^E R_1 = 3k^4_{11}\nabla\vec{W}^a_1 = \rho^\circ\frac{\partial\psi}{\partial\nabla\vec{W}^a_1} \qquad (1.5)$$

Như vậy điều kiện(1.2) cho ta những hạn chế mạnh vào dạng hàm năng lượng tự do và các đại lượng đặc trưng cho tương tác giữa các pha do chuyển động tương đối của chúng gây ra. Các biểu thức của $^E\vec{F}_1$ và $^E R_1$ có dạng không thay đổi như trong trường hợp đẳng hướng [2]. Đây là một điểm khác biệt của mô hình compozit theo quan điểm khuếch tán suy rộng so với mô hình được xây dựng trong [5].

Các hàm cấu trúc hao tán cũng xây dựng tương tự theo phương pháp Zigler.

§2. SỰ TRUYỀN SÓNG TRONG VẬT LIỆU COMPOZIT ĐÀN HỒI NHIỆT

Hiệu ứng tán sắc của các sóng lan truyền trong vật liệu compozit là một trong những hiệu ứng động lực mà mô hình đàn hồi dị hướng đồng chất của compozit không thể giải thích được [6]. Trong khuôn khổ lý thuyết hỗn hợp, hiệu ứng tán sắc của các sóng lan truyền trong vật liệu compozit đã được nghiên cứu bằng mô hình một tốc độ [5] và bằng mô hình nhiều tốc độ [4] cho compozit đàn hồi tuyến tính đẳng hướng không tính tới các hiệu ứng nhiệt. Sau đây ta sẽ mô tả hiệu ứng trên bằng mô hình compozit đàn hồi nhiệt theo quan điểm khuếch tán suy rộng.

Để đơn giản ta chỉ xét hỗn hợp hai chất, đẳng hướng tuyến tính trong đó bỏ qua không tính các phần hao tán của $\vec{F}^a_1$, R^a_1, Q^m_α và các lực khối, nguồn nhiệt khối. Ta chọn vận tốc tâm khối lượng $\vec{U}^a = \vec{U}^m (a_\alpha = C_\alpha,\ \alpha = 1,\ 2)$ làm vận tốc trung bình đặc trưng. Để tuyến tính hóa các phương trình cân bằng ta giả định rằng $\vec{U}^m, \bar{\rho}(\rho = \rho^\circ + \bar{\rho})$ có giá tr rất bé, khi đó cùng với các giả định đã đưa ra khi xây dựng các phương trình cấu trúc ta có các phương trình cân bằng ở dạng tuyến tính sau:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^\circ \nabla . \frac{\partial \overrightarrow{W}^m}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial t} + C_1^\circ \nabla . \frac{\partial \overrightarrow{W}_1^m}{\partial t} = 0,$$

$$\rho^\circ \frac{\partial^2 \overrightarrow{W}^m}{\partial t^2} = \frac{1}{18}(2k^1 + 3k^2)\nabla\nabla.\overrightarrow{W}^m + \frac{1}{2}k^2\nabla^2\overrightarrow{W}^m +$$

$$+ \frac{1}{3}k_1^8\nabla C_1 + \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^6 \nabla\theta_\alpha,$$

$$\rho^\circ C_1^\circ . \frac{\partial^2 \overrightarrow{W}_1^m}{\partial t^2} = - C_1^\circ k_{11}^7 \nabla C_1 - \frac{1}{3} C_1^\circ k_1^8 \nabla\nabla.\overrightarrow{W}^m - C_1^\circ \sum_{\alpha=1}^{2} k_{1\alpha}^9 \nabla\theta_\alpha -$$

$$- k_{11}^3 \overrightarrow{W}_1^m + 3k_{11}^4 \nabla^2 \overrightarrow{W}_1^m, - \left(k_{11}^5 + k_{12}^5\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial t} - (k_{12}^5 + k_{22}^5)\frac{\partial\theta_2}{\partial t} =$$

$$\frac{1}{3}(k_1^6 + k_2^6)\nabla . \frac{\partial \overrightarrow{W}^m}{\partial t} + (k_{11}^9 + k_{12}^9)\frac{\partial C_1}{\partial t} + l_1 \nabla^2 \theta_2 .$$

$$k_{11}^5 \frac{\partial\theta_1}{\partial t} - k_{12}^5 \frac{\partial\theta_2}{\partial t} = \frac{1}{3} k_1^6 \nabla . \frac{\partial \overrightarrow{W}^m}{\partial t} + k_{11}^9 \frac{\partial C_1}{\partial t} + l_2(\theta_2 - \theta_1) \qquad (2.2)$$

Với

$$k^1 > 0,\ k^2 > 0,\ k_{11}^3 > 0,\ k_{11}^4 > 0,\ k_{11}^7 > 0,\ k_{\alpha\beta}^5 = k_{\beta\alpha}^5,$$

$$k^1 k_{11}^7 > (k_1^8)^2;\ l_{11}^1 \geqslant 0,\ l^4 \geqslant 0,$$

$$l_1 = \frac{l^4}{T^\circ (T)^2} = \text{const},\ l_2 = \frac{l_{11}^1}{T^\circ T_2 T_2} = \text{const}. \qquad (2.3)$$

Lần lượt tác động các toán tử rot và div vào hệ phương trình (2.2) ta nhận được hai hệ phương trình mô tả sự lan truyền của hai sóng ngang và các sóng dọc. Các hiệu ứng nhiệt hoàn toàn không ảnh hưởng tới sự lan truyền của hai sóng ngang. Thêm vào đó, hai phương trình mô tả hai sóng này có thể giải độc lập. Kết quả thu được là một sóng ngang lan truyền với vận tốc $C = \sqrt{k^2/2\rho^\circ}$ thông thường như trong lý thuyết đàn hồi và không tán sắc, điều này khác với kết quả ở [5]. Sóng ngang phẳng dạng

$$\overrightarrow{\Omega}_1^r = \overrightarrow{\Omega}_1^* \exp[i(\xi x - \omega t)]$$

là một sóng tán sắc với tương quan:

$$\omega^2 = \frac{k_{11}^3 + 3k_{11}^4 \xi^2}{\rho^\circ C_1^\circ},\ \xi^2 = \frac{\rho^\circ C_1^\circ \omega^2 - k_{11}^3}{3k_{11}^4}. \qquad (2.4)$$

Từ (2.4) ta thấy ngay rằng khi cho trước ω thực ta có $\rho^\circ C_1^\circ \omega^2 \geqslant k_{11}^3$ nên ξ cũng thực. Vậy sóng tán sắc ngang cũng là sóng điều hòa với biên độ không đổi.

Để làm sáng tỏ ảnh hưởng của trường nhiệt vào sự lan truyền sóng dọc ta giới hạn chỉ xét khi $T_1 = T_2 = T$ và khi ξ có giá trị rất nhỏ so với đơn vị. Giả thuyết sau hợp lý do giả định là kích thước đặc trưng của bài toán phải lớn hơn nhiều so với kích thước của sự không đồng nhất, nghĩa là độ dài sóng đang xét phải đủ lớn hoặc số sóng ξ có giá trị đủ nhỏ.

Nghiệm sóng phẳng dọc điều hòa tìm ở dạng:

$$\overline{\rho} = \rho^* \exp [i (\xi x - \omega t)] ; \theta = \theta^* \exp [i (\xi x - \omega t)],$$

$$C_1 = C^* \exp [i (\xi x - \omega t)] ; e_o = e_o^* \exp [i (\xi x - \omega t)],$$

$$e_1 = \frac{1}{3} \nabla . \overrightarrow{W}_1^m = e_1^* \exp [i (\xi x - \omega t)]. \tag{2.5}$$

Là một sóng tán sắc và khi bỏ qua các số hạng bậc lớn hơn hai theo ξ ta có tương quan tán sắc dạng:

$$9(\rho^\circ)^2 C_1^\circ \omega^4 - \{9\rho^\circ k_{11}^3 + [(3k_{11}^4 + (C_1^\circ)^2 k_{11}^7) (1 + K_2) + \rho^\circ C_1^\circ (k^1 +$$

$$+ 6k^2) (1 + K_1)] \xi^2\} \omega^2 + k_{11}^3 (k^1 + 6k^2) (1 + K_1) \xi^2 = 0. \tag{2.6}$$

Trong đó các số không thứ nguyên

$$K_1 = \frac{(k_2^6)^2}{-k_{22}^5(k_2 + 6k^2)} > 0, K_2 = - \frac{(C_1^\circ)^2 (k_{12}^9)^2}{k_{22}^5 [3k_{11}^4 + (C_1^\circ)^2 k_{11}^7]} > 0 \tag{2.7}$$

khi $k_{22}^5 < 0$ là những chuẩn số tương ứng đặc trưng ảnh hưởng qua lại của trường nhiệt và trường biến dạng trung bình ; của trường nhiệt và trường nồng độ với trường biến dạng tương đối. Như vậy trong trường hợp giới hạn này tương tác giữa trường nhiệt độ với các trường khác đặc trưng bởi các hệ số $K_3 = - \frac{k_2^6 k_{12}^9}{k_{22}^5 k_1^8}$ và l_1 hoàn toàn không có ảnh hưởng gì tới sự lan truyền sóng dọc có bước sóng khá lớn. Từ (2.7) ta thấy tồn tại hai sóng dọc tán sắc ứng với các tương quan:

$$\omega_1^2 = \frac{k^1 + 6k^2}{9\rho^\circ} (1 + K_1) \xi^2 + 0 (\xi^4),$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_{11}^3 + (3k_{11}^4 + (C_1^\circ)^2 k_{11}^7) (1 + K_2) \xi^2}{\rho^\circ C_1^\circ} + 0(\xi^4) \tag{2.8}$$

So sánh với kết quả nhận được ở [5] ta thấy ngay rằng trong xấp xỉ đã cho tương tác giữa trường nhiệt độ với trường biến dạng và trường nồng độ chỉ đưa lại một hiệu đính nhỏ so với khi không xét các hiệu ứng đó.

Địa chỉ

Trường Đại học Tổng hợp HN

nhận ngày 2/10/1982

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. TRƯƠNG MINH CHÁNH, Lý thuyết khuếch tán suy rộng về các hỗn hợp rắn. I. Hỗn hợp đồng thể đàn hồi-nhiệt. Tạp chí Cơ học Số 2, 1982
2. TRƯƠNG MINH CHÁNH, Lý thuyết khuếch tán suy rộng về các hỗn hợp rắn, II. Vật liệu compozit đàn hồi-nhiệt. Tạp chí Cơ Học. Số 3, 1982.
3. BEDFORD A., STERN M. Acta Mech. 14, 85-102, 1972.
4. BEDFORD A., SUTHERLAND H.J., LINGLE R. Trans. ASME, J. Appl. Mech. 39, 2, 597 – 598, 1972.

(Xem tiếp trang 22)