Tạp Chí Cơ Học T.VI, 1984 Số 2 (trang 5–10)

VỀ ĐỊNH LÝ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN ĐỘNG VỚI MÔ HÌNH VẬT LIỆU THEO THUYẾT BIẾN DẠNG ĐÀN DẺO NHỎ

NGUYỄN ĐĂNG BÍCH

Định lý duy nhất nghiệm của bài toán động, với mô hình vật liệu đàn hồi trình bày trong [1], với mô hình vật liệu cứng dẻo trình bày trong [2]. Định lý về duy nhất nghiệm của bài toán biên tĩnh, với mô hình vật liệu theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ, trình bày trong [3].

Trong bài này trình bày định lý về duy nhất nghiệm của bài toán động, với mô hình vật liệu theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ.

§ 1. ĐẶT BÀI TOÁN

Xét vật có mật độ khối lượng ρ, bao quanh bởi một mặt trơn từng khúc S, mặt S gồm hai phần, S_p trên đó cho lực phụ thuộc tọa độ không gian x_i và thời gian t: $\sigma_{ij}n_j = F_i$ ngược lại trên S_u cho trước chuyển dịch $v_i(x_i, t) = v_{is}$. Nếu bỏ qua sự thay đổi hình dáng của vật thể, thì tại thời điểm t nào đó dưới tác dụng của tải trọng mặt và lực khối $K_i(x_i, t)$ trong vật thể sẽ phát sinh một trường dịch chuyển, một trường biến dạng và một trường ứng suất, được đặc trưng bởi ten xơ biến dạng nhỏ ε_{ij} và ten xơ ứng suất σ_{ij}. Về phương diện toán học, bài toán xác định trường biến dạng và ứng suất của vật thể dưới tác dụng của ngoại lực, với các điều kiện ràng buộc như đã trình bày ở trên, được mô tả bởi các phương trình sau:

a) Phương trình chuyển động.

$$\sigma_{ij,j} + \rho K_i = \rho \ddot{v}_i \tag{1.1}$$

b) Các hệ thức hình học.

Ten xơ biến dạng nhỏ được xác định qua dịch chuyển như sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{1.2}$$

c) Các quan hệ vật lý.

Giả thiết rằng vật thể làm việc trong trạng thái đàn dẻo, theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ chúng ta có hệ thức cơ bản sau:

$$\sigma'_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3e_u}\varepsilon'_{ij}, \tag{1.3}$$

$$\sigma = 3K\varepsilon, \tag{1.4}$$

$$\sigma_u = 3Ge_u[1 - \omega(e_u)], \tag{1.5}$$

trong đó:

$$\sigma_u = \left(\frac{2}{3}\sigma_{ij}\sigma_{ij}\right)^{1/2}, \quad e_u = \left(\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right)^{1/2},$$

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad , \qquad \varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}.$$

Đường cong biến dạng duy nhất (1.5) tuân theo những giả thiết

$$\frac{d\sigma_u}{de_u} > 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{d^2\sigma_u}{de_u^2} \leqslant 0. \tag{1.7}$$

Bằng tính toán đơn giản từ mô hình vật liệu ta có được các kết quả bổ ích sau :

$$\dot{e}_u > 0, \tag{1.8}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{e}_u}{e_u}\varepsilon_{ij}, \tag{1.9}$$

$$\frac{\dot{\sigma}_u}{\sigma_u} \leqslant \frac{\dot{e}_u}{e_u}. \tag{1.10}$$

d) Điều kiện biên :

$$\sigma_{ij}n_j = F_i \text{ trên } S_p; \quad v_i = v_{is} \text{ trên } S_u, \tag{1.11}$$

trong đó $\quad S = S_p \bigcup S_u; \quad S_p \bigcap S_u = 0.$

e) Điều kiện đầu :

Trạng thái của vật thể khi bắt đầu khảo sát được xác định bởi các điều kiện :

$$v_i(x_i, t)\big|_{t=0} = v_{io}; \quad \dot{v}_i(x_i, t)\big|_{t=0} = \dot{v}_{io}. \tag{1.12}$$

Bài toán toán học trên đây là đầy đủ và cho phép chúng ta xác định được lời giải. Cần chỉ ra rằng lời giải của bài toán trên là duy nhất. Thật vậy nghịch lý sẽ xảy ra khi sự duy nhất không được khẳng định. Để chứng minh chúng ta giả thiết rằng tồn tại hai nghiệm $v^{(1)}_i$, $\varepsilon^{(1)}_{ij}$, $\sigma^{(1)}_{ij}$, và $v^{(2)}_i$, $\varepsilon^{(2)}_{ij}$, $\sigma^{(2)}_{ij}$ cùng thỏa mãn điều kiện biên (1.11), điều kiện đầu (1.12). Hiển nhiên là hiệu $u_i = v^{(2)}_i - v^{(1)}_i$, $e_{ij} = \varepsilon^{(ij)}_{2} - \varepsilon^{(1)}_{ij}$, $\tau_{ij} = \sigma^{(2)}_{ij} - \sigma^{(1)}_{ij}$ là nghiệm của bài toán thuần nhất sau :

$$\tau_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i \tag{1.13}$$

với :

$$\tau_{ij}n_j = 0 \text{ trên } S_p,$$
$$u_i = u_{is} = 0 \text{ trên } S_u, \tag{1.14}$$

$$u_i\big|_{t=0} = \dot{u}_i\big|_{t=0} = 0. \tag{1.15}$$

Từ điều kiện đầu thuần nhất của dịch chuyển (1.5), dựa vào mô hình vật liệu ta suy ra ứng suất ban đầu cũng thuần nhất :

$$\tau_{ij}\big|_{t=0} = \dot{\tau}_{ij}\big|_{t=0} = 0. \tag{1.16}$$

§ 2. ĐỊNH LÝ DUY NHẤT NGHIỆM

1. CÁC HỆ THỨC CƠ BẢN

Nhân hai vế của phương trình (1.13) với $\dot{u}_i$ rồi lấy tích phân theo t từ 0 đến τ và theo thể tích V của vật thể ta được :

$$\int_V\int_0^\tau \tau_{ij,j}\,\dot{u}_i\,dtdV = \int_V\int_0^\tau \rho\dot{u}_i\,\ddot{u}_i\,dtdV. \tag{2.1}$$

Áp dụng công thức Oxtrôgratxki đối với vế trái của phương trình (2.1) và lấy tích phân theo t đối với vế phải, chú ý đến điều kiện biên (1.14) điều kiện đầu (1.15) ta được:

$$-\int_V\int_0^\tau \tau_{ij}\dot{e}_{ij}\,dtdV = \frac{1}{2}\int_V \rho\,\dot{u}_i\dot{u}_i dV. \tag{2.2}$$

Áp dụng tích phân từng phần theo thời gian, đối với vế trái của phương trình (2.2) chú ý đến điều kiện đầu (1.16) ta có:

$$\int_V\left(\tau_{ij}e_{ij} + \frac{1}{2}\rho\,\dot{u}_i\dot{u}_i\right)dV = \int_V\int_0^\tau \dot{\tau}_{ij}e_{ij}\,dtdV. \tag{2.3}$$

Dựa vào (2.2), (2.3) ta suy ra:

$$\int_V(\tau_{ij}e_{ij} + \rho\,\dot{u}_i\dot{u}_i)\,dV = \int_V\int_0^\tau(\dot{\tau}_{ij}e_{ij} - \tau_{ij}\dot{e}_{ij})\,dtdV. \tag{2.4}$$

Nếu ứng suất và biến dạng liên hệ với nhau theo quy luật đàn hồi thì vế phải của (2.4) bằng không và khi đó ta có:

$$\int_V(\tau_{ij}e_{ij} + \rho\,\dot{u}_i\dot{u}_i)dV = 0. \tag{2.5}$$

Dựa vào (2.5) ta chứng minh được định lý về duy nhất nghiệm trong trường hợp đàn hồi. Nếu ứng suất và biến dạng liên hệ với nhau theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ thì theo [3] vế trái của (2.4) không âm. Ta sẽ chứng minh vế phải của (2.4) không dương. Vậy dấu bằng trong (2.4) chỉ xảy ra, khi cả hai vế đều bằng không và ta lại có (2.5), từ đó sẽ chứng minh được định lý về duy nhất nghiệm, theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ.

2. CHỨNG MINH VẾ PHẢI CỦA (2.4) KHÔNG DƯƠNG

Vế phải của (2.4) không dương khi:

$$A = \dot{\tau}_{ij}e_{ij} - \tau_{ij}\dot{e}_{ij} \leqslant 0 \tag{2.6}$$

sao cho (2.6) xảy ra đối với mọi biến không gian và thời gian trong miền được xét.

Biến đổi (2.6) có chú ý đến (1.3) – (1.5) và (1.9) ta được:

$$A = -\left\{\left[\left(\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)}\right)\left(\dot{e}_u^{(2)} - \dot{e}_u^{(1)}\right) - \left(\dot{\sigma}_u^{(2)} - \dot{\sigma}_u^{(1)}\right)\left(e_u^{(2)} - e_u^{(1)}\right)\right] + \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\dot{e}_u^{(2)}}{e_u^{(2)}} - \frac{\dot{\sigma}_u^{(1)}}{\sigma_u^{(1)}}\right)\frac{\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(1)}} + \left(\frac{\dot{e}_u^{(1)}}{e_u^{(1)}} - \frac{\dot{\sigma}_u^{(2)}}{\sigma_u^{(2)}}\right)\frac{\sigma_u^{(2)}}{e_u^{(2)}}\right] \times \left(\frac{3}{2}e_u^{(2)}e_u^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\right)\right\} \tag{2.7}$$

Gọi biểu thức trong móc vuông thứ nhất và thứ hai ở vế phải của (2.7) là B và C và vì $\frac{3}{2}e_u^{(2)}e_u^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)} \geqslant 0$ theo bất đẳng thức Svac. Nên để chứng minh vế phải của (2.4) không dương ta cần chứng minh B và C không âm:

a) Chứng minh B không âm:

Từ giả thiết (1.6) suy ra: $\dfrac{\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)}}{e_u^{(2)} - e_u^{(1)}} > 0$ vì thế biểu thức $l_n\ \dfrac{\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)}}{e_u^{(2)} - e_u^{(1)}}$

có nghĩa, nên B có thể viết:

$$B = \left(\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)}\right)\left(\dot{e}_u^{(2)} - \dot{e}_u^{(1)}\right) - \left(\dot{\sigma}_u^{(2)} - \dot{\sigma}_u^{(1)}\right)\left(e_u^{(2)} - e_u^{(1)}\right) =$$

$$- \left(\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)}\right)\left(e_u^{(2)} - e_u^{(1)}\right)\frac{d}{dt}\left[\ln \frac{\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)}}{e_u^{(2)} - e_u^{(1)}}\right] \tag{2.8}$$

Áp dụng công thức số gia giới nội

$$\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)} = \frac{d\sigma_u}{de_u}\Bigg|_{e_u^*}\left(e_u^{(2)} - e_u^{(1)}\right)$$

Trong đó $e_u^* \in \left[e_u^{(1)}, e_u^{(2)}\right]$ khi đó (2.8) có thể viết:

$$\frac{1}{\left.\frac{d\sigma u}{deu}\right|_{e_u^*}}\left(\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)}\right)\left(e_u^{(2)} - e_u^{(1)}\right)\dot{e}_u^*\left.\frac{d^2\sigma_u}{de_u^2}\right|_{e_u^*} = -B \tag{2.9}$$

Dựa vào (1.6), (1.7), (1.8) từ (2.9) rút ra $B \geqslant 0$ (2.10)

b) Chứng minh C không âm

$$C = \left(\frac{\dot{e}_u^{(2)}}{e_u^{(2)}} - \frac{\dot{\sigma}_u^{(1)}}{\sigma_u^{(1)}}\right)\frac{\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(1)}} - \left(\frac{\dot{e}_u^{(1)}}{e_u^{(1)}} - \frac{\dot{\sigma}_u^{(2)}}{\sigma_u^{(2)}}\right)\frac{\sigma_u^{(2)}}{e_u^{(2)}}$$

Khảo sát dấu của C đưa về xét dấu của hai đại lượng

$$a = \frac{\dot{e}_u^{(2)}}{e_u^{(2)}} - \frac{\dot{\sigma}_u^{(1)}}{\sigma_u^{(1)}} \quad ; \quad b = \frac{\dot{e}_u^{(1)}}{e_u^{(1)}} - \frac{\dot{\sigma}_u^{(2)}}{\sigma_u^{(2)}}$$

Dấu của a và b theo logic có thể xảy ra như sau:

1. $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$
2. $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$
3. $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$
4. $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$

Từ (1.10) ta suy ra·

$$\frac{\dot{e}_u^{(2)}}{e_u^{(2)}} + \frac{\dot{e}^{(1)}}{e_u^{(1)}} \geqslant \frac{\dot{\sigma}_u^{(2)}}{\sigma_u^{(2)}} + \frac{\dot{\sigma}_u^{(1)}}{\sigma_u^{(1)}} \tag{2.11}$$

hay $a + b \geqslant 0$

Trường hợp 1 không thể xảy ra, vì trái với (2.12). (2.12)

Trường hợp 3 xảy ra ta có ngay $C \geqslant 0$.

Theo giả thiết (1.6) có hai khả năng xảy ra:

$$e_u^{(2)} \geqslant e_u^{(1)} \;;\; \sigma_u^{(2)} \geqslant \sigma_u^{(1)} \tag{2.13}$$

Hoặc $$e_u^{(2)} \leqslant e_u^{(1)} \;;\; \sigma_u^{(2)} \leqslant \sigma_u^{(1)} \tag{2.14}$$

Nếu (2.13) xảy ra thì $\ln \frac{e_u^{(1)}\,\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(2)}\,\sigma_u^{(2)}} \leqslant 0$ (2.15)

Dấu bằng trong (2.15) xảy ra khi $t = 0$. Vì khi đó theo (1.15), (1.16)

$$e_u^{(1)}\sigma_u^{(1)} = e_u^{(2)}\sigma_u^{(2)}$$

Giả sử trường hợp 2 xảy ra, khi đó $b - a \geqslant 0$ (2.10)

Mặt khác ta thấy :

$$b - a = \frac{d}{dt}\left[\ln\frac{e_u^{(1)}\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(2)}\sigma_u^{(2)}}\right]$$

Theo (2.16) thì $\frac{d}{dt}\left[\ln\frac{e_u^{(1)}\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(2)}\sigma_u^{(2)}}\right] \geqslant 0$

Như vậy $\ln\frac{e_u^{(1)}\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(2)}\sigma_u^{(2)}}$ là hàm đồng biến theo t, hơn nữa lại đồng biến từ giá trị không nên

$$\ln\frac{e_u^{(1)}\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(2)}\sigma_u^{(2)}} \geqslant 0 \tag{2.17}$$

Kết quả (2.17) trái với (2.15). Vậy trường hợp thứ hai không thể xảy ra. Dựa vào (2.13) và (1.7) ta suy ra :

$$\frac{\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(1)}} \geqslant \frac{\sigma_u^{(2)}}{e_u^{(2)}} \tag{2.18}$$

Trường hợp 4 xảy ra theo (2.18) ta có :

$$a\,\frac{\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(1)}} \geqslant a\,\frac{\sigma_u^{(2)}}{e_u^{(2)}} \tag{2.19}$$

Từ (2.19) suy ra

$$C \geqslant \frac{\sigma_u^{(2)}}{e_u^{(2)}}(a + b) \tag{2.20}$$

Dựa vào (2.12) ta đi đến kết luận $C \geqslant 0$ (2.21)

Nếu (2.14) xảy ra, bằng cách chứng minh tương tự sẽ chứng tỏ được rằng trường hợp 4 không thể xảy ra, trường hợp 2 có thể xảy ra nhưng khi đó bất đẳng thức (2.21) cũng được nghiệm đúng. Vậy ta luôn luôn có C không âm.

Dựa vào (2.10), (2.21) từ (2.7) ta suy ra $A \leqslant 0$ (2.22)

Trên cơ sở (2.22) theo lý luận ở cuối phần 1, (2.4) sẽ xảy ra khi cả hai vế đều bằng không. Do đó ta có :

$$\int_V \left(\tau_{ij}e_{ij} + \rho\dot{u}_i u_i\right) dV = 0 \tag{2.23}$$

Theo [3] đẳng thức (2.23) có thể viết :

$$\int_V \rho\dot{u}_i u_i\, dV + \int_V \left[(\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)})(e_u^{(2)} - e_u^{(1)}) + 3(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})(\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)})\right] dV +$$

$$\frac{2}{3}\int_V \frac{\sigma_u^{(1)}e_u^{(2)} + \sigma_u^{(2)}e_u^{(1)}}{e_u^{(1)}e_u^{(2)}}\left(\frac{3}{2}e_u^{(2)}e_u^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{\prime(2)}\varepsilon_{ij}^{\prime(1)}\right) dV = 0 \tag{2.24}$$

Cũng theo [3] đẳng thức (2.24) được nghiệm đúng khi

$$\dot{u}_i = 0, \quad e_u^{(1)} = e_u^{(2)}, \quad \varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}.$$

Dựa vào mô hình vật liệu theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ ta suy ra:

$$\sigma_u^{(1)} = \sigma_u^{(2)}, \quad \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}.$$

Định lý về duy nhất nghiệm được chứng minh.

Địa chỉ

Trường đại học Tổng hợp Hà Nội

Nhận ngày 20/10/1983

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. НОВАЦКИЙ В. Теория упругости. Изд. Мир, Москва, 1975.
2. ЕРХОВ М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. «Наука», Москва, 1978.
3. ĐÀO HUY BÍCH. Cơ Sở lý thuyết dẻo. Nxb. ĐH và THCN. Hà Nội, 1975.

SUMMARY

ON THE THEOREM WITH UNIQUENESS OF SOLUTION IN DYNAMICS PROBLEM ACCORDING TO THE THEORY OF SMALL ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS

In dynamics, the uniqueness of solutions was presented for elastic problem [1] and for rigid plastic problem based on the theory of plastic flow [2]. In this paper the theorem with uniqueness of solutions in the dynamics problem according to the theory of small elastoplastic deformations is presented for a class of bodies subjected to time-dependent surface tractions with two impotant assumptions so that the theory of small elastoplastic deformations may be used.

First, displacements will be assumed sufficiently small, that the original geometry may be used in writing the equilibrium equations.

Second, external loads from the moment of their application increase proportionaly to the single parameter.