Tạp Chí Cơ Học T. VI, 1984 Số 2 (trang 1—4)

DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN CỦA HỆ CƠ HỌC CÓ CHỨA BỘ LỌC TUYẾN TÍNH CÓ SỐ ĐẶC TRƯNG THỰC ÂM

NGUYỄN ĐÔNG ANH

§ MỞ ĐẦU

Hiện nay trong việc khảo sát dao động ngẫu nhiên phương pháp phương trình FPK kết hợp với phương pháp trung bình hóa cho các kết quả khá tốt. Tuy nhiên phương pháp này đòi hỏi kích động ngẫu nhiên phải là «ồn trắng» và như vậy đặt ra vấn đề cần thiết mở rộng phương pháp này cho các kích động ngẫu nhiên dạng khác. Trước hết ta xét một lớp các quá trình ngẫu nhiên dừng chuẩn có mật độ phổ phân số hữu tỉ. Như đã biết các quá trình này có thể coi là kết quả của «ồn trắng» qua một bộ lọc tuyến tính. Trong vấn đề này các phương trình vi phân bậc cao [1] có những ứng dụng tốt.

§ 1. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Xét hệ cơ học một bậc tự do có phương trình chuyển động

$$\ddot{X} + \omega^2 X = \varepsilon f(X, \dot{X}, \omega t) + \sqrt{\varepsilon}\, a q(t) \tag{1.1}$$

trong đó $q(t)$ — kích động ngẫu nhiên được xác định bởi phương trình

$$L_n q(t) \equiv \frac{d^n q(t)}{dt^n} + \sum_{s=0}^{n-1} a_s \frac{d^s}{dt^s} q(t) = b\,\xi(t), \tag{1.2}$$

a, b, a_s = const, $\xi(t)$ — «ồn trắng» có cường độ đơn vị. Ta sẽ giả thiết rằng bộ lọc (1.2) có các số đặc trưng thực âm, tức là các nghiệm của phương trình đặc trưng λ_i

$$l(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{s=0}^{n-1} a_s \lambda^s = 0 \tag{1.3}$$

là các số thực âm khác nhau. Loại $q(t)$ khỏi hệ phương trình (1.1), (1.2) ta có

$$L_n(\ddot{X} + \omega^2 X) = \varepsilon L_n f(X, \dot{X}, \omega t) + \sqrt{\varepsilon}\, ab\,\xi(t) \tag{1.4}$$

Phương trình đặc trưng của hệ tuyến tính tương ứng sẽ là

$$(\lambda^2 + \omega^2)\, l(\lambda) = 0. \tag{1.5}$$

Từ đó nghiệm tổng quát của phương trình suy biến sẽ là

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} + A\cos\psi, \quad \psi = \omega t + \theta. \tag{1.6}$$

Ta thay biến trong phương trình (1.4)

$$\frac{d^kX}{dt^k} = \overset{(k)}{X} = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\lambda_i^k e^{\lambda_i t} + A(t)\frac{d^k}{dt^k}\cos\psi, \quad (1.7)$$

với $A(t)$, $C_i(t)$, $\theta(t)$ — quá trình khuếch tán mác-cốp thỏa mãn hệ phương trình sau

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \varepsilon\alpha_i(t, C, A, \theta) + \sqrt{\varepsilon}\beta_i(t, C, A, \theta)\dot{\xi}(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \varepsilon\alpha_{n+1}(t, C, A, \theta) + \sqrt{\varepsilon}\beta_{n+1}(t, C, A, \theta)\dot{\xi}(t)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \varepsilon\alpha_{n+2}(t, C, A, \theta) + \sqrt{\varepsilon}\beta_{n+2}(t, C, A, \theta)\dot{\xi}(t) \quad (1.8)$$

Vi phân các đẳng thức (1.7) có sử dụng công thức Itô ta nhận được hệ phương trình sau đối với các ẩn số α_i, β_i, α_{n+1}, β_{n+1}, β_{n+2}, α_{n+2} :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e^{\lambda_i t}\beta_i + \frac{\partial^k}{\partial t^k}\cos\psi \,.\, \beta_{n+1} + A\frac{\partial^k}{\partial t^k}(-\sin\psi)\beta_{n+2} = \delta_{n+1}^k ab, \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e^{\lambda_i t}\alpha_i + \frac{\partial^k}{\partial t^k}\cos\Psi\,\alpha_{n+1} + A\frac{\partial^k}{\partial t^k}(-\sin\Psi)\alpha_{n+2} =$$

$$-\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\cos\psi\right)\beta_{n+1}\beta_{n+2} - \frac{1}{2}A\frac{\partial^k}{\partial t^k}(-\cos\psi)\beta_{n+2}^2 +$$

$$\delta_{n+1}^k\,[L_n f(X, \dot{X}, \omega t)]_1, \quad (1.10)$$

$$\delta_{n+1}^k = \begin{cases} 0, & k \neq n+1 \\ 1, & k = n+1 \end{cases}, \quad k = \overline{0, n+1},$$

$$[L_n f(X, \dot{X}, \omega t)]_1 = L_n f(X, \dot{X}, \omega t) \mid \overset{(k)}{X} = \sum_{i=1}^{n} C_i\lambda_i^k e^{\lambda_i(t)} + A(t)\frac{d^k}{dt^k}\cos\psi.$$

Từ (1.9), (1.10) ta thấy các hệ phương trình này sẽ xác định duy nhất các ẩn α_i, β_i α_{n+1}, α_{n+2}, β_{n+1}, β_{n+2}, vì định thức của chúng là định thức Vronski của phương trình suy biến tuyến tính $W(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}, \cos\Psi, -A\sin\psi)$ và luôn luôn khác không. Sau khi xác định các ẩn trong phương trình (1.8) ta thay biến

$$D_i = C_i e^{\lambda_i t} \quad (1.11)$$

và đưa hệ (1.8) về dạng chuẩn

$$\frac{dD_i}{dt} = -\lambda_i D_i + \varepsilon\alpha_i e^{-\lambda_i t} + \sqrt{\varepsilon}\beta_i e^{-\lambda_i t}\dot{\xi}(t),$$

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon\alpha_{n+1} + \sqrt{\varepsilon}\beta_{n+1}\dot{\xi}(t), \quad \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\alpha_{n+2} + \sqrt{\varepsilon}\beta_{n+2}\dot{\xi}(t) \quad (1.12)$$

Trong hệ (1.12) các biến D_i — là các biến nhanh. Theo định lý về sự phụ thuộc liên tục của nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên vào tham số, với t đủ lớn ta sẽ xấp xỉ $D_i \approx 0$. Từ đó thay cho hệ (1.12) ta xét hệ

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon\alpha_{n+1} + \sqrt{\varepsilon}\beta_{n+1}\dot{\xi}(t),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\alpha_{n+2} + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_{n+2}\,\dot{\xi}(t), \quad D_i = 0. \tag{1.13}$$

Đối với hệ phương trình (1.13) ta có thể lập phương trình trung bình hóa FPK sau

$$\frac{\partial}{\partial A}(K_1W) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2W) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial A^2}(K_{11}W) + \frac{\partial^2}{\partial A\partial\theta}(K_{12}W) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W) \tag{1.14}$$

trong đó

$$K_1(A,\theta) = \underset{t}{M}(\alpha_{n+1}), \quad K_2(A,\theta) = \underset{t}{M}(\alpha_{n+2})$$

$$K_{11}(A,\theta) = \underset{t}{M}(\beta^2_{n+1}), \quad K_{12} = \underset{t}{M}(\beta_{n+1}\beta_{n+2}), \quad K_{22}(A,\theta) = \underset{t}{M}(\beta^2_{n+2}). \tag{1.15}$$

Đối với hệ ôtômôn phương trình FPK (1.14) cho nghiệm dừng sau

$$W(A) = \frac{C}{K_{11}(A)}\exp\left\{-2\int^{A}\frac{K_1(A)}{K_{11}(A)}\,dA\right\} \tag{1.16}$$

Hàm mật độ xác suất này sẽ đạt cực trị ở các điểm $\partial W/\partial A = 0$ (1.17)

hay là $2K_1(A) = dK_{11}(A)/dA$ (1.18)

§ 2. VÍ DỤ

Ta xét phương trình
$$\ddot{X} + \omega^2 X = \varepsilon f(X, \dot{X}, \omega t) + \sqrt{\varepsilon}\,a\,q(t) \tag{2.1}$$

trong đó $q(t)$ – quá trình ngẫu nhiên hỗ liên dạng mũ có hàm mật độ phổ và hàm tương quan sau

$$S_q(\omega) = \frac{\sigma_o^2}{\Pi}\,\frac{\eta}{\eta^2+\omega^2}, \quad K(\tau) = \sigma_o^2\,e^{-\eta|\tau|}, \ \eta > 0, \sigma_o > 0. \tag{2.2}$$

Phương trình vi phân cho $q(t)$ sẽ là $\dot{q}(t) + \eta q(t) = \sqrt{2\eta}\,\sigma_o\,\dot{\xi}(t)$ (2.3)

trong trường hợp này $\lambda_1 = -\eta$. Loại q ta được phương trình sau

$$\dddot{X} + \eta\ddot{X} + \omega^2\dot{X} + \eta\omega^2 X = 2\left[f + \eta\frac{d}{dt}f\right] + \sqrt{\varepsilon}\,a\,\sigma_o\sqrt{2\eta}\,\dot{\xi}(t) \tag{2.4}$$

Sau khi tính toán ta có hệ phương trình sau ([2]) :

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon\alpha_3(0, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(0, A, \psi)\,\dot{\xi}(t)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\alpha_4(0, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_4(0, A, \psi)\,\dot{\xi}(t) \tag{2.5}$$

trong đó

$$\alpha_3 = \frac{\eta\sigma_o^2a^2(\omega\sin\psi - \eta\cos\psi)^2}{A\omega^2(\omega^2+\eta^2)^2} - \frac{\omega\cos\psi + \eta\sin\psi}{A(\omega^2+\eta^2)}\left[L_1 f(X, \dot{X}, \omega t)\right]_o,$$

$$\alpha_4 = \frac{\omega\sin\psi - \eta\cos\psi}{A\omega(\omega^2+\eta^2)}\left[L_1 f(X, \dot{X}, \omega t)\right]_o + \frac{2\eta\sigma_o^2a^2(\omega\cos\psi + \eta\sin\psi)(\omega\sin\psi - \eta\cos\psi)}{A^2\omega^2(\omega^2+\eta^2)^2}, \tag{2.6}$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{2\eta}\,a\sigma_o(\omega\cos\psi + \eta\sin\psi)}{\omega(\omega^2+\eta^2)}, \quad \beta_4 = \frac{\sqrt{2\eta}\,a\sigma_o(\omega\sin\psi - \eta\cos\psi)}{A\omega(\omega^2+\eta^2)},$$

$$[L_1 f(X,\dot{X})]_o = \left[f + \eta \frac{d}{dt} f\right] \Bigg|_{\substack{X = A\cos\psi,\ \dot{X} = -A\omega\sin\psi \\ \ddot{X} = -A\omega^2\cos\psi.}}$$

Ta hãy ứng dụng kết quả trên cho phương trình Van Der Pol chịu kích động ngẫu nhiên hỗ liên dạng mũ

$$\ddot{X} + \omega^2 X = \varepsilon(1 - \gamma X^2)\dot{X} + \sqrt{\varepsilon}\, a q(t),$$

$$\dot{q}(t) + \eta q(t) = \sqrt{2\eta}\,\sigma_o\,\dot{\xi}(t). \tag{2.7}$$

Những tính toán cho thấy

$$K_1(A) = \frac{\eta a^2 \sigma_o^2}{A\omega^2(\omega^2 + \eta^2)} - \frac{\gamma A^3}{8} + \frac{A}{2} \tag{2.8}$$

Thay vào (1.18) ta thu được giá trị trung bình của biên độ

$$A = \sqrt{\frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{4}{\gamma^2} + \frac{8\eta a^2 \sigma_o^2}{(\omega^2 + \eta^2)\gamma\omega^2}}}. \tag{2.9}$$

Đối với trường hợp tiền định ($a = 0$) từ (2.9) ta thu được giá trị đã biết của biên độ

$$A = 2/\sqrt{\gamma} \tag{2.10}$$

Ta chú ý rằng khi $q(t)$ – kích động « ồn trắng » giá trị trung bình của biên độ sẽ là

$$A = \sqrt{\frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{4}{\gamma^2} + \frac{2a^2}{\gamma\omega^2}}} \tag{2.11}$$

Địa chỉ : Viện Cơ học Viện KHVN *Nhận ngày 15/11/1982*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN ĐẠO, Non-linear Oscillations of high order systems. Hà nội 1979.
2. KIỀU THẾ ĐỨC, NGUYỄN ĐÔNG ANH. Dao động ngẫu nhiên trong hệ cấp ba dưới kích động ngẫu nhiên ồn trắng. TC Cơ học, N4, 1981.

РЕЗЮМЕ

СЛУЧАЙНОЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЮЩИХ ЛИНЕЙНЫЙ ФИЛТР С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

В работе дано применение метода уравнений ФПК и метода усреднения к исследованию случайного колебания в механических системах под действием случайных процессов, имеющих дробно рациональные спектральные плотности. В качестве примера рассмотрено уравнение Ван-Дер-Поля под действием экспоненциально-коллерпрованного случайного процесса.