Tạp chí Cơ Học T. VI. 1984, Số 1 (Trang 25-30)

BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA KẾT CẤU DẦM CHỊU UỐN TRONG TRẠNG THÁI ĐÀN DẺO

ĐỖ SƠN

Cho tới nay các bài toán tối ưu hóa phần lớn được phát biểu hoặc cho kết cấu đàn hồi [1,3], hoặc cho các kết cấu cứng dẻo lý tưởng [2, 5]. Trạng thái đàn dẻo chỉ mới được dùng để kiểm tra các kết cấu chịu tác dụng của tải trọng thay đổi lặp [5].

Trong bài báo phát biểu bài toán thiết kế tối ưu kết cấu dầm chịu uốn với vật liệu tuân theo các giả thiết của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ lý tưởng, xây dựng thuật toán lặp trên cơ sở phương pháp nghiệm đàn hồi kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn và giải một ví dụ minh họa về khả năng làm việc của kết cấu đã được tối ưu hóa ở giai đoạn đàn hồi trong giai đoạn đàn dẻo.

§ 1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Đối với các kết cấu dầm phương trình cân bằng có thể được viết dưới dạng

$$Q(M) = -q, \tag{1.1}$$

trong đó q là tải trọng ngang, phân bố được rời rạc hóa theo sơ đồ sai phân [6]; Q là toán tử sai phân đối với mô men uốn.

Theo [4], giá trị mô men ở trạng thái đàn dẻo $M = M^e(1 - \eta)$, toán tử Q có thể được biểu diễn dưới dạng

$$Q(M) = Q\,[M^e(1 - \eta)], \tag{1.2}$$

trong đó M^e là giá trị của các mô men ở trạng thái đàn hồi phụ thuộc vào đặc trưng h của tiết diện và độ võng w của dầm; η là hệ số dẻo phụ thuộc vào sự phát triển dẻo theo chiều dày của tiết diện.

Đem (1.2) vào (1.1) phương trình cân bằng có dạng

$$L(h)\,w = q - Q(\eta M^e), \tag{1.3}$$

trong đó L(h) là toán tử sai phân đối với độ võng, phụ thuộc vào đặc trưng h của tiết diện.

Phương trình (1.3) là phương trình cân bằng của dầm chịu uốn trong trạng thái đàn dẻo. Tương tự như trên ta có điều kiện biên của bài toán ở dạng

$$(N(h)\,\dot{w})_{\Gamma} = 0 + \eta M^e \tag{1.4}$$

và phương trình cân bằng giữa công của nội lực và ngoại lực ở dạng

$$\int_L qw\,dx = C + H(\sigma_T, \zeta, w), \tag{1.5}$$

trong đó tích phân được lấy theo chiều dài L của dầm, đôi khi còn được gọi là độ mềm của dầm; C là phần công đàn hồi.

Số hạng thứ hai trong vế phải của các hệ thức (1.3) – (1.5) chỉ xuất hiện khi kết cấu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi. Trong các hệ thức này, ngoài các ký hiệu đã dẫn ở trên còn có : $N(h)$ là toán tử cân bằng trên biên, ứng với trường hợp ngàm thì vế phải của (1.4) bằng không, còn ứng với trường hợp khớp bằng ηM^e ; $H(\sigma_T, \zeta, w)$ là toán tử hao tán năng lượng với σ_T là ứng suất chảy dẻo của vật liệu và ζ là tọa độ đặc trưng cho chiều dày của kết cấu dầm giới hạn trong miền $-h/2 \leqslant \xi \leqslant h/2$

Điều kiện để dầm chuyển qua trạng thái dẻo là

$$\mathrm{Max}_x\, \sigma^e - \sigma_T = 0, \tag{1.6}$$

trong đó σ^e — ứng suất pháp của dầm trong trạng thái đàn hồi.

Trên cơ sở cách phát biểu bài toán tối ưu hóa kết cấu đàn hồi [3], kể đến các điều kiện (1.3)–(1.6) và nếu gọi $V(h)$ là thể tích dầm, bài toán tối ưu hóa kết cấu dầm chịu uốn trong trạng thái đàn dẻo có thể được phát biểu như sau

Hãy tìm $\min_h V(h)$

trong các điều kiện

$$\left.\begin{aligned} L(h)\,w &= q - Q(\eta M^e) \\ (N(h)w)_\Gamma &= 0 + \eta M^e \\ \int_L q w\,dx &= C + H(\sigma_T, \zeta, w) \\ \sigma^e - \sigma_T &\leqslant 0 \\ \delta_1 \leqslant h(x) &\leqslant \delta_2 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Trong bài toán (A) điều kiện cuối cùng là các ràng buộc về mặt kỹ thuật, giới hạn khả năng thay đổi chiều cao h của dầm từ σ_1 đến σ_2.

Dưới đây giới thiệu thuật toán được áp dụng để giải quyết bài toán.

§ 2. THUẬT TOÁN GIẢI

Để giải bài toán (A) dựa trên cơ sở phương pháp nghiệm đàn hồi ta có thuật toán gồm các bước sau đây:

a. Giải bài toán tối ưu hóa kết cấu đàn hồi

Trước hết giả thiết rằng kết cấu làm việc an toàn trong miền đàn hồi. Điều này có thể đạt được hoặc khi tải trọng chưa vượt quá giá trị giới hạn hoặc khi độ cứng của kết cấu đủ lớn để trong kết cấu không có vùng dẻo xuất hiện. Với giả thiết như vậy, trong bài toán (A) không cần để ý đến điều kiện (1.6) và các thành phần có liên quan đến dẻo. Biểu diễn các hệ thức còn lại dưới dạng véctơ – ma trận và ghép điều kiện cân bằng với điều kiện biên thành ma trận $[A(h)]$ ta có bài toán tối ưu hóa kết cấu xét trong trạng thái đàn hồi như sau:

Hãy tìm $\min_h V(h)$

trong các điều kiện

$$\left.\begin{aligned} [A(h)]\,\{w\} &= \{q\} \\ \{q\}^T\{w\} &= C \\ \delta_i \leqslant h_i \leqslant \delta_2,\ i &= 1, 2, .. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Bài toán (B) là bài toán tối ưu hóa hình dáng chiều cao của dầm, trong đó các giá trị cần xác định là các véctơ chiều cao h và độ võng w. Để giải bài toán (B) hiện nay chỉ có các phương pháp riêng biệt ứng với những dạng kết cấu cụ thể. Có thể dựa vào các phương pháp của quy hoạch toán học để mở rộng lớp bài toán được giải và khả năng áp dụng vào thực tế kỹ thuật của mô hình bài toán (B). Ở đây, nhằm minh họa cho quá trình lặp có thể sử dụng các kết quả thu được trong [3].

b. Xác định tải trọng giới hạn làm cho dầm bắt đầu chuyển qua trạng thái dẻo.

Giả sử bài toán (B) đã giải xong, tức là ta có h_i và w_i hợp lý ứng với tải trọng q, thỏa mãn điều kiện cân bằng và điều kiện độ mềm, đồng thời làm cho dầm có thể tích nhỏ nhất. Cần nhận xét rằng nghiệm thu được chỉ khẳng định tối ưu về hình dáng kết cấu. Với hình dáng kết cấu này cũng có thể còn dư độ bền. Vì vậy việc kiểm tra độ bền của kết cấu nói chung và đặc biệt đối với kết cấu dẻo là rất cần thiết. Việc kiểm tra này có thể có hai ý nghĩa. Một là, nó cho phép đánh giá độ an toàn có thực của kết cấu và do đó cho phép lựa chọn các đặc trưng của tiết diện tối ưu hơn. Hai là, cho phép phát hiện những chỗ cần phải chú ý khi chọn kích thước của tiết diện để sao cho trong kết cấu không tồn tại khớp dẻo.

Đặt $w_i = q\tilde{w}_i$, $\tilde{w}_i$ là hàm dạng ứng với $q = 1$, có thể xác định được các giá trị mômen, ứng suất và biến dạng tương ứng theo các hệ thức của lý thuyết đàn hồi :

$$M^e = q\tilde{M}^e(w)$$

$$\sigma^e = q\tilde{\sigma}^e(w) = q\frac{\tilde{M}^e(w)}{h^2/6.h/2}\zeta = q\frac{\tilde{M}^e(w)}{W}\xi, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^e = q\tilde{\varepsilon}^e(w) = q\frac{\tilde{M}^e(w)}{EW}\xi, \tag{2.2}$$

trong đó $W = \dfrac{bh^2}{6}$ là mômen kháng uốn của tiết diện ; $b = \text{const}$; $\zeta = 2\xi/h$ là tọa độ không thứ nguyên của giới hạn nửa nhân đàn hồi.

Đem (2.1) vào (1.6) ta được

$$q\tilde{M}^e(w)\xi \leqslant \sigma_T W \tag{2.3}$$

Cho $\xi = 1$, tức là để các điểm trên mặt biên của tiết diện bắt đầu chuyển qua trạng thái dẻo, ta tìm được tải trọng giới hạn làm cho dầm bắt đầu chuyển qua trạng thái dẻo

$$q^\circ = \frac{\sigma_T W}{\tilde{M}^e(w)} \tag{2.4}$$

Khi $q < q^\circ$ sẽ không có điểm nào của tiết diện chuyển qua trạng thái dẻo và kết quả của bước tính trên là hoàn toàn chấp nhận được.

Khi $q = \bar{q} > q^\circ$ ta sẽ tiến hành thực hiện bước tính toán sau.

c) Xác định hệ số dẻo và tải trọng tính toán.

Khi $\bar{q} > q^\circ$ giới hạn dẻo sẽ chuyển vào các thớ bên trong của tiết diện. Các kết quả tính toán được trong miền đàn hồi cần phải được điều chỉnh lại thông qua bước xác định hệ số dẻo và tải trọng tính toán.

Theo (2.3), ứng với tải trọng $\bar{q}$ ta có thể xác định được giới hạn nửa nhân đàn hồi của tiết diện và theo [4] xác định hệ số dẻo như sau :

$$\bar{\xi} = \frac{\sigma_T W}{\bar{q}\tilde{M}^e(w)} \tag{2.5}$$

$$\eta = (1 - \xi)^2 (1 + \xi/2) \tag{2.6}$$

Biết hệ số dẻo η và mômen M^e có thể xác định được tải trọng tính toán tại nút i của dầm theo công thức

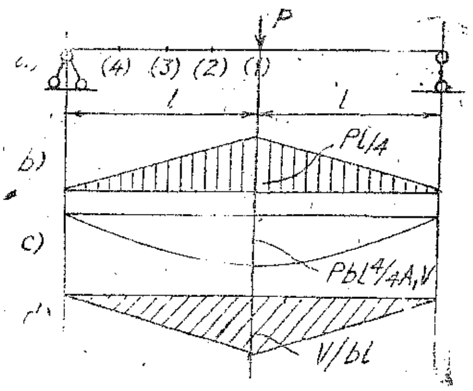
$$q^t = \bar{q} - Q(\eta M^e) = q[1 + (2\tilde{M}^e_i\eta_i - \tilde{M}^e_{i-1}\eta_{i-1} - \tilde{M}^e_{i+1}\eta_{i+1})1/\lambda^2], \tag{2.7}$$

λ là bước lưới, đồng thời, có giá trị độ võng có thể xác định được sự thay đổi trong điều kiện biên ứng với trường hợp liên kết cần thiết và phần năng lượng bị hao tán. Đem các kết quả nhận được vào bài toán (A) và bắt đầu thực hiện bước lặp mới. Quá trình tính toán được tiếp tục cho tới khi các giá trị ξ của hai bước tính sai khác nhau một lượng cho phép.

Vấn đề hội tụ của quá trình lặp theo phương pháp nghiệm đàn hồi đã được đánh giá trong nhiều công trình khác và nói chung khá nhanh. Như nhận xét trong [4] nhiều bài toán chỉ cần qua 2, 3 bước lặp là thu được kết quả cần thiết.

§ 3. VÍ DỤ

Để minh họa cho phương pháp và thuật toán nêu trên ta giải bài toán tối ưu hóa dầm giản đơn dài $2l$, hai đầu gối khớp, chịu tác dụng của lực tập trung P đặt tại điểm giữa của dầm (hình 1).



Hình 1

a) dầm xét; b) biểu đồ mômen ; c) đường độ võng ; d) sự phân bố tiết diện

Hình dáng dầm được tối ưu hóa theo các điều kiện [3]

$$(Dw_{xx})_{xx} = q = P\delta(x) \; ; \qquad (3.1)$$

$$(w)_{x=\pm l} = (Dw_{xx})_{x=\pm l} = 0 \; ; \qquad (3.2)$$

$$\int_{-l}^{l} S dx = V \; ; \qquad (3.3)$$

$$\mathcal{J}_* = w(0) \to \min_h , \qquad (3.4)$$

trong đó D là độ cứng của dầm ; w_x là đạo hàm theo x của độ võng ; V là thể tích dầm cho trước.

Xét về mặt mô hình thì bài toán (C) là đối ngẫu của bài toán (A), tức là tìm giá trị nhỏ nhất theo h của độ võng lớn nhất thỏa mãn phương trình cân bằng (3.1), điều kiện biên (3.2) và điều kiện đẳng chu (3.3).

Trường hợp dầm có cốt, $h(x)/2$ của lớp cốt thay đổi, còn chiều dày lớp đệm $H \gg \max_x h(x)$ cố định, tức là $D = EJ = A_1 b(x)$ với $A_1 = \dfrac{EbH^2}{4} = \text{const}$, b là chiều rộng của dầm, trong [3] cho nghiệm của bài toán là

$$h = \frac{V(l + x)}{bl^2}, \; (-l \leqslant x \leqslant 0) \; ; \quad h = \frac{V(l - x)}{bl^2}, \; (0 \leqslant x \leqslant l) \; ;$$

$$w = \frac{Pbl^2}{4A_1V}(l^2 - x^2) ; \; \mathcal{J}_* = w(0) = \frac{Pbl^4}{4A_1V}. \qquad (3.5)$$

Kết quả được biểu diễn trên hình 1.

Nếu chia dầm làm 8 phần bằng nhau, $\lambda = l/4$, và dựa vào tính chất đối xứng để thiết lập hệ phương trình sai phân cho một nửa dầm ta có

$$[A(h)]\{w\} = \{q\} \qquad (3.6)$$

Trong (3.6) ma trận A phụ thuộc vào các đặc trưng h chưa xác định, đồng thời véctơ w cũng là những giá trị cần tìm. Để giải quyết bài toán (B) trong trường hợp này ta lại dùng một quá trình lặp nữa, hoặc theo h, hoặc theo w.

Nhằm minh họa về khả năng làm việc của dầm ở trạng thái đàn dẻo, trong bài báo đã dùng ở lớp xấp xỉ thứ không đối với h(x), tức là giữ nguyên h(x) được tối ưu hóa trong miền đàn hồi để nghiên cứu các đại lượng còn lại.

Với quy ước trên, dựa vào kết quả (3.5) ta có ma trận các vectơ độ võng và mômen uốn tương ứng với vectơ tải trọng đơn vị như sau

$$[A(h)] = \begin{bmatrix} 5,50 & -7,00 & 1,50 & 0 \\ -3,50 & 5,50 & -2,50 & 0,50 \\ 0,75 & -2,50 & 3,00 & -1,50 \\ 0 & 0,50 & -1,50 & 1,50 \end{bmatrix}$$

$$\{\tilde{w}\}^T = \{16,0 \quad 15,0 \quad 12,0 \quad 7,0\},$$

$$\{\tilde{M}^e(\omega)\}^T = \{4,0 \quad 3,0 \quad 2,0 \quad 1,0\}.$$

Ở đây cần chú ý là

$$w_i = \tilde{w}_j \frac{Pb l^4}{64 A_1 V}$$

$$M_i^e = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \simeq -\frac{P(5-i)}{16}(\tilde{w}_{i-1} - 2\tilde{w}_i + \tilde{w}_{i+1}) = \frac{Pl}{8} \tilde{M}_i^e(w),$$

i là các điểm chia của dầm.

Theo (2.4) và để ý là $P = q\lambda = ql/4$ ta tìm được tải trọng giới hạn làm cho dầm bắt đầu chuyển qua trạng thái dẻo.

$$q_o = \frac{\sigma_T W}{(l^2/32).4} = \frac{8\sigma_T W}{l^2}$$

Giả thiết $q = \bar{q} > q^o$, các thớ bên trong của tiết diện sẽ làm việc ở trạng thái dẻo. Phụ thuộc vào độ lớn của tải trọng giới hạn nửa nhân đàn hồi sẽ thay đổi trong phạm vi $0 < \xi < 1$. Ví dụ, $\bar{q} = 2q^o$ tức là $\bar{q} = 16\sigma_T W/l^2$, theo (2.5) ta tính được $\xi = 0,5$ và theo (2.6) $\eta = 0,3125$.

Cần nhận xét rằng vì dầm có hình dáng hợp lý nên tại mọi điểm hệ số dẻo đều bằng nhau.

Nhờ các giá trị thu được có thể tính lại vế phải của (1.3) – (1.5), sau đó đem vào bài toán (Ai) ta được bài toán (B) trong bước lặp mới. Tuy nhiên ta thấy rằng trong các bước giải tiếp sau hình dáng dầm không thay đổi, còn các đặc trưng khác thì thay đổi phụ thuộc vào sự phát triển dẻo của tiết diện, chẳng hạn như trên, khi cho $\xi = 0,5$ hay $\zeta = h/4$ ta được các giá trị độ võng và mômen uốn như sau

$$\{w\}^T = \{21,00 \quad 19,6875 \quad 15,750 \quad 9,1875\} \; Pbl^4/64A_1V$$

$$\{M\}^T = \{5,25 \quad 3,9375 \quad 2,6250 \quad 1,3125\} \; Pl^2/16$$

Tóm lại, với dầm đã được tối ưu về mặt hình dáng nếu tiếp tục cho làm việc trong vùng dẻo theo khả năng chịu lực của nó ta có thể thu được hiệu quả cao hơn. Chẳng hạn, khi cho $\xi = 0,5$ hay $\zeta = h/4$, tức là khi giới hạn nửa nhân đàn hồi còn 1/4 chiều cao tiết diện thì tải trọng tăng lên gấp đôi, các giá trị mômen và độ võng cũng tăng lên khoảng 30%

Nhận ngày 10/8/1983

Địa chỉ :
Viện Cơ học, Viện KHVN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. RUDOLF F. Verfahren zur Optimierung Von Stabtragwerken mit stetigin Variablen. WBTH Leipzig Heft 22, 1979.

2. MROZ Z., GAWECKI A. Post-yield Behaviour of Optimal Plastic Structures. Proc. IUTAM Symposium on Optimization in Structural Design, Springer-Verlag, Warsaw, 1975, 518 – 540.

3. БАНИЧУК Н. В. Оптимизация форм упругих тел. Изд. «Наука», М. 1980.

4. СТРЕЛЬБИЦКАЯ А. И. и другие, Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости. Изд. «Наукова думка», Киев, 1981.

5. ЧИРАС А. А. Теория оптимизации в предельном анализе твёрдого деформируемого тела. Вильнюс, 1971.

6. ДОШОН. К вопросу уточнения конечно–разностных уравнений применяемых для расчёта стержней и пластин. Ростов-на-Дону, 1968.

РЕЗЮМЕ

ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗГИБАЕМЫХ БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

В статье формулирована задача оптимального проектирования изгибаемых балочных конструкций, материалы которых подчиняются гипотезам теории малых идеально-упруго-пластических деформаций, составлен итерационный алгоритм решения задачи на основе метода упругих решений вместе с методом конечноразностных уравнений и решен пример, иллюстрирующий о несущем способности оптимизационной в упругом состоянии балочном конструкции за пределом упругости.