Tạp chí Cơ Học T.VI, 1984, Số 1 (trang 5-8)

VỀ CHUYỂN ĐỘNG ĐỐI LƯU NHIỆT TRONG CHẤT LỎNG QUAY

NGÔ HUY CẨN

Trong bài này chúng tôi nghiên cứu hai bài toán về chuyển động đối lưu nhiệt trong chất lỏng nhớt quay. Khác với các tác giả trước [1, 2], ở đây chúng tôi xét trường hợp khi chất lỏng chứa đầy trong bình kín có hình dạng bất kỳ.

§ 1. BÀI TOÁN 1

Giả sử rằng ta có bình kín chứa đầy chất lỏng nhớt bị đốt nóng không đều quay xung quanh một trục có phương trùng với phương thẳng đứng. Giả sử rằng tốc độ quay của vật ω là một hằng số và thỏa mãn điều kiện $\omega^2 l \ll g$. Ở đây l là kích thước tiết diện ngang của bình, g – gia tốc trọng trường. Giả thiết này có nghĩa là chuyển động đối lưu gây ra do lực ly tâm có thể bỏ qua so với chuyển động đối lưu gây ra do lực trọng trường.

Với các giả thiết trên bài toán về chuyển động đối lưu của chất lỏng trong khuôn khổ tuyến tính được mô tả bằng hệ phương trình [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D(k_3 \times u) = -\nabla P + \Delta u + Rk_3T \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{1.2}$$

$$P_r \frac{\partial T}{\partial t} - (u \, . \, k_3) = \Delta T \qquad \text{trong } \Omega \tag{1.3}$$

$$u = 0, \; T = 0 \qquad \text{trên } S \tag{1.4}$$

$$u \big|_{t=0} = u_0, \; T \big|_{t=0} = T_0 \tag{1.5}$$

Ở đây u, P, T – Các kích động của tốc độ, áp suất và nhiệt độ của chất lỏng so với trạng thái cân bằng cơ học, k_3 – véctơ đơn vị của trục tọa độ có phương trùng với phương thẳng đứng, Ω – miền chứa chất lỏng, S – thành bình tiếp xúc với chất lỏng, P_r, R, D – các số Prandl, Rolây, Taylo. Ta ký hiệu $\tilde{L}_2(\Omega)$ là không gian con của không gian $L_2(\Omega)$ gồm các vec tơ bình phương khả tích trong Ω và thỏa mãn điều kiện $u_n = 0$ trên S, $\widetilde{W}_2^{1,0}(\Omega)$ là không gian Sôbôlep gồm các vec tơ so-lênoit bình phương khả tích trong Ω có đạo hàm bậc nhất và thỏa mãn điều kiện u = 0 trên S.

Gọi Π là toán tử chiếu xuống không gian $\tilde{L}_2(\Omega)$. Tác dụng vào hai vế của phương trình (1,1), nhờ có phương trình (1.2) và điều kiện (1.4), từ phương trình (1.1) ta được

$$\frac{du}{dt} = -iSu = -A_1 u + RV_1 T \tag{1.6}$$

Ở đây $A_1 = -\Pi\Delta$ là toán tử tự liên hợp xác định dương, có toán tử ngược là hoàn toàn liên tục (xem [3]), toán tử $Su = iD(u \times k_3)$ là toán tử tự liên hợp, có chuẩn nhỏ hơn hoặc bằng 1 (xem [4]), toán tử $V_1T = \Pi(k_3T)$ là toán tử giới nội.

Ta ký hiệu $H_2(\Omega)$ là không gian Hilbert gồm các hàm bình phương khả tích trong Ω và $H_2^1(\Omega)$ là không gian Sôbôlep với chuẩn là

$$\|T\|^2_{H_2^1(\Omega)} = \int_\Omega |\operatorname{grad} T|^2 d\Omega + \gamma \int_{\Gamma \cup S} |T|^2 dS$$

còn $H_2^{1,0}(\Omega)$ là không gian con của $H_2^1(\Omega)$ gồm các hàm thuộc $H_2^1(\Omega)$ và thỏa mãn điều kiện $T = 0$ trên S.

Phương trình (1.5) và điều kiện (1.4) có thể viết dưới dạng một phương trình toán tử trong không gian như sau:

$$\frac{dT}{dt} = -P_r^{-1}A_2T + P_r^{-1}Nu \tag{1.7}$$

Ở đây A_2 là toán tử tự liên hợp dương xác định, có toán tử ngược là hoàn toàn liên tục [5], toán tử $Nu \equiv (k_3 \,.\, u)$ toán tử giới nội.

Hệ phương trình (1.6) ; (1.7) có thể viết dưới dạng một phương trình trong không gian $\tilde{L}_2(\Omega) \times H_2(\Omega)$

$$\frac{dX}{dt} = -\mathcal{A}X + \mathcal{B}X \tag{1.8}$$

ở đây

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & P_r^{-1}A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} iS & RV_1 \\ P_r^{-1}N & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} u \\ T \end{pmatrix}$$

Vì rằng toán tử A_1, A_2 là các toán tử tự liên hợp xác định dương trong $\tilde{L}_2(\Omega)$ và $H_2(\Omega)$ nên toán tử $\mathcal{A}$ là toán tử tự liên hợp xác định dương trong không gian $\tilde{L}_2(\Omega) \times H_2(\Omega)$

Toán tử $\mathcal{B}$ rõ ràng là toán tử giới nội trong $\tilde{L}_2(\Omega) \times H_2(\Omega)$. Dựa vào kết quả của [6], từ đây suy ra rằng bài toán Cauchy đối phương trình (1.8) có 1 nghiệm duy nhất.

Nếu tìm nghiệm của bài toán (1.1) – (1.4) dưới dạng

$$u = e^{-\lambda t}u_1, \; T = e^{-\lambda t}T_1$$

Từ phương trình (1.6), (1.7) ta được

$$\lambda u_1 = A_1u_1 - iSu_1 - RV_1T_1, \tag{1.9}$$

$$\lambda T_1 = P_r^{-1}A_2T_1 - P_r^{-1}Nu \tag{1.10}$$

hay là

$$\lambda v = \mathcal{A}v - \mathcal{B}v \tag{1.11}$$

Tương tự như trong [7] có thể chứng minh rằng toán tử $\mathcal{A}$ là toán tử tự liên hợp xác định dương có phổ rời rạc và toán tử $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$ là toán tử hoàn toàn liên tục có bậc hữu hạn. Từ đây suy ra rằng [8].

Định lý 1. Phổ của bài toán (1.11) là phổ rời rạc và chứa trong dải

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda &\geqslant \lambda_{min}(\mathcal{A}) - \|\operatorname{Re}\mathcal{B}\| \\ |I_m\lambda| &\leqslant \|I_m\mathcal{B}\| \end{aligned} \tag{1.12}$$

Hệ vectơ riêng của bài toán (1.11) là hệ đầy trong không gian $\tilde{L}_2(\Omega) \times H_2(\Omega)$

Tùy thuộc vào chế độ đốt nóng mà $\| Re\mathcal{B} \|$ có thể bé hơn hoặc lớn hơn $\lambda_{min}(\mathcal{A})$, có nghĩa là $Re\lambda$ có thể là dương hay âm.

Sử dụng hệ phương trình (1.9), (1.10) có thể chứng minh được rằng khi đốt nóng từ trên xuống $Re\lambda$ luôn luôn dương có nghĩa là chuyển động của chất lỏng trong bình luôn ổn định, còn khi đốt nóng từ dưới lên khác với trường hợp bình đứng yên (xem [1]) trong trường hợp này trong chất lỏng tồn tại cả các dao động thực ($I_m\lambda \neq 0$) nhưng cũng như trường hợp khi bình đứng yên xem [7] chuyển động của chất lỏng ổn định ($Re\lambda > 0$) khi số Rolây thỏa mãn điều kiện.

$$R < \gamma_1^2 \gamma_2^2 \tag{1.13}$$

Ở đây γ_1, γ_2 là các trị riêng nhỏ nhất của các toán tử A_1, A_2.

Công thức (1.13) chỉ ra rằng trong trường hợp chúng ta xét lực Koriôlis không ảnh hưởng lên ổn định của chuyển động chất lỏng.

§ 2. BÀI TOÁN 2

Chúng ta xét trường hợp khi thỏa mãn điều kiện $\omega^2 l \gg g$, có nghĩa là khi chuyển động đối lưu gây ra do lực trọng trường có thể bỏ qua so với chuyển động đối lưu gây ra do lực ly tâm. Trong [2] đã chứng minh rằng trường hợp này ở vị trí cân bằng vecto gradien nhiệt độ có phương vuông góc với trục quay. Trong khuôn khổ tuyến tính bài toán được mô tả bằng hệ phương trình [2]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + D(k_3 \times u) = -\nabla P + \Delta u - RTn, \\ &\operatorname{div} u = 0,\ P_r \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - (u.n) \text{ trong } \Omega, \\ &u = 0,\ T = 0 \text{ trên } S,\ u|_{t=0} = u_0,\ T|_{t=0} = T_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Ở đây số Rolây, khác với trường hợp ở trên, liên quan đến chuyển động đối lưu gây ra do lực ly tâm.

Tương tự như ở trên, bài toán (2.1) có thể đưa về bài toán đối với hệ phương trình trong không gian $\widetilde{L}_2(\Omega)$ và $H_2(\Omega)$

$$\frac{du}{dt} = iSu - A_1u + RV_2T,$$

$$P_r \frac{dT}{dt} = -A_2T + N_1u$$

Ở đây các toán tử V_2 và N_1 đều là các toán tử giới nội như các toán tử V, N trong hệ (1.6), (1.7). Từ đây suy ra rằng tất cả các kết quả nghiên cứu của bài toán (1.1) – (1.5) đều đúng cho bài toán (2.1), các kết quả đó nói lên rằng sự có mặt của lực Koriolis không ảnh hưởng lên ổn định của vật nhưng gây ra các dao động thực ($I_m\lambda \neq 0$) trong trường hợp đốt nóng từ dưới lên, có nghĩa là định luật biến đổi ổn định đều ở đây không đúng nữa và kết quả nghiên cứu của công trình [1, 2] chưa có cơ sở chặt chẽ.

Nhận ngày 1/7/1982

Địa chỉ:
Bộ Quốc Phòng

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ШАЙДУРУРОВ Г. Ф., ШЛИОМИС М. И., ЯСТРЕБОВ Г. В. Конвективная неустойчивость вращающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 88 — 93 №5, 1969.

2. ГЕРШУНИ Г. З., ЖУХОВИЦКИЙ Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Наука, М., 1972.

3. НГО ЗУЙ КАН. О движении твердого тела с полостями, наполненными несжимаемой вязкой жидкостью. ЖВМ и МФ, 914 — 917, №4, 1968.

4. Гидромеханика невесомости. Под. ред. МЫШКИСА А. Д., 504 с. Наука, 1976.

5. МИХЛИН С. Г. Вариационные методы в математической физике 512, с., Наука, М., 1970.

6. КРЕЙН С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве. 464 с., Наука, М., 1970.

7. ЗАРУБИН А. Г., НГО ЗУЙ КАН. О конвекции в жидкости, заполняющей полость подвижного твердого тела. ПММ № 6, 1980.

8. ГОХБЕРГ И. Ц., КРЕЙН М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. 448 с., Наука, М., 1965.

РЕЗЮМЕ

О ТЕПЛОВОМ КОНВЕКТИВНОМ ДВИЖЕНИИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В работе рассматриваются два случая задачи о свободной конвекции во вращающейся жидкости, заполняющей целиком полость. Показано, что кориолисовая сила не влияет на устойчивость движения жидкости.