Tạp chí Cơ Học T.VI, 1984, Số 1 (Trang 1-4)

CẤU TRÚC TOÁN HỌC CỦA CÁC VẬT THỂ ĐÀN HỒI

II – CÁC HẰNG SỐ ĐÀN HỒI

RYCHLEWSKI J.

Lấy một vật đàn hồi C. Công thức cấu trúc (1.11) [1] của nó cho phép xử lý một tenxơ bất kỳ $\underline{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}$ như sau. Ta đưa ra các hình chiếu trực giao của $\underline{\mathcal{T}}$ xuống các không gian con vật chất $\mathcal{P}_\alpha$ của vật thể $\underline{C}$:

$$\underline{\mathcal{T}}_\alpha \equiv \underline{P}_\alpha \cdot \underline{\mathcal{T}}, \quad \alpha = 1, \ldots, \rho$$

Nhớ rằng

$$\underline{P}_\beta \cdot \underline{\mathcal{T}}_\alpha = 0 \text{ khi } \alpha \neq \beta \text{ hoặc tương đương}$$

$$\underline{\mathcal{T}}_\alpha \cdot \underline{\mathcal{T}}_\beta = 0 \text{ khi } \alpha \neq \beta$$

Ta ký hiệu các chuẩn của hình chiếu như sau:

$$\mathcal{T}_\alpha \equiv |\underline{\mathcal{T}}_\alpha| \equiv (\underline{\mathcal{T}} \cdot \underline{P}_\alpha \cdot \underline{\mathcal{T}})^{1/2} = (\mathcal{T}_{(\alpha)ij}\mathcal{T}_{(\alpha)ij})^{1/2}$$

Tenxơ $\underline{\mathcal{T}}$ xác định đơn trị ở dạng tổng các hình chiếu của mình xuống các không gian con vật chất

$$\underline{\mathcal{T}} = \underline{\mathcal{T}}_1 + \ldots + \underline{\mathcal{T}}_\rho \tag{2.1}$$

Trường hợp riêng của biểu diễn này là biểu diễn tenxơ ở dạng tổng phần cầu và phần lệch.

Ta sử dụng biểu diễn (2.1) cho tenxơ ứng suất $\underline{\sigma}$ và tenxơ biến dạng $\underline{\varepsilon}$:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1 + \ldots + \underline{\sigma}_\rho, \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_1 + \ldots + \underline{\varepsilon}_\rho \tag{2.2}$$

Thế biểu thức đó vào (1.1) [1] ta sẽ nhận được *dạng tổng quát của định luật Hooke cho một vật thể đàn hồi tùy ý*

$$\underline{\sigma}_1 = \lambda_1 \underline{\varepsilon}_1, \ldots, \underline{\sigma}_\rho = \lambda_\rho \underline{\varepsilon}_\rho\ ;\ \rho \leqslant 6; \tag{2.3}$$

Dạng mới này của định luật Hooke mở rộng sự biểu diễn của định luật Hooke đã được trình bày trong các sách giáo khoa cho vật thể đẳng hướng ở dạng hai phương trình tenxơ: định luật tỷ lệ của các phần cầu và định luật tỷ lệ của các phần lệch của các tenxơ $\underline{\sigma}$ và $\underline{\varepsilon}$.

Mỗi phương trình tenxơ (2.3) với $\rho \leqslant 6$ độc lập với các phương trình còn lại. Phương trình với số hiệu α tương đương với q_α phương trình vô hướng.

Từ (2.3) đặc biệt suy ra tính tỷ lệ của các chuẩn:

$$\sigma_\alpha = \lambda_\alpha \varepsilon_\alpha\ ;\ \alpha = 1, \ldots, \rho$$

Nếu sử dụng hệ cơ sở tenxơ vật chất $\underline{\omega}_K$ nào đó (đối với $\rho = 6$ nó được xác định chính xác tới các dấu) thì

$$\underline{\sigma} = \sigma_I \underline{\omega}_I + \ldots + \sigma_{VI} \underline{\omega}_{VI} \; ; \; \sigma_K = \underline{\sigma} \cdot \underline{\omega}_K$$

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_I \underline{\omega}_I + \ldots + \varepsilon_{VI} \underline{\omega}_{VI} \; ; \; \varepsilon_K = \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\omega}_K$$

và định luật Hooke đưa tới sáu điều kiện tỷ lệ thuận vô hướng,

$$\sigma_I = \lambda_I \varepsilon_I \, , \ldots , \sigma_{VI} = \lambda_{VI} \varepsilon_{VI} \tag{2.4}$$

Định luật Hooke ở dạng (2.3) và nhất là ở dạng (2.4) gần như là phát biểu của chính tác giả: « ut tensio sis vis» [2], [3]. Có thể nghĩ rằng R. Hooke sẽ hài lòng nếu ông còn sống.

Xét nghịch đảo (1.2) [1] của định luật Hooke. Có thể đưa ra các trạng thái riêng $\underline{\mathcal{C}}$ của tenxơ độ mềm $\underline{S}$ và *các mô đun độ mềm* μ theo công thức

$$\underline{S} \cdot \underline{\mathcal{C}} = \mu \underline{\mathcal{C}}$$

Nhưng điều đó là thừa như định lý đơn giản sau sẽ chứng tỏ.

Định lý 4. *Các trạng thái riêng của tenxơ độ mềm trùng với các trạng thái đàn hồi riêng, còn mô đun độ mềm nghịch đảo với các mô đun độ cứng.*

Chứng minh: Nếu $\underline{C} \cdot \underline{\omega} = \lambda \underline{\omega}$ thì

$$\underline{S} \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{\lambda} \underline{S} \cdot (\underline{C} \cdot \underline{\omega}) = \frac{1}{\lambda} \underline{E} \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{\lambda} \underline{\omega}$$

Bởi vậy, nghịch đảo $\underline{C}$ chúng ta sẽ nhận được ngay:

$$\underline{S} = \frac{1}{\lambda_I} \underline{P}_I + \ldots + \frac{1}{\lambda_\rho} \underline{P}_\rho \, , \; \rho \leqslant 6$$

trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ là mô đun độ cứng, còn $\underline{P}_1, \ldots, \underline{P}_\rho$ là các ánh xạ chiếu vật chất đã nó trong định lý 2.

Nếu sử dụng rêpe tenxơ vật chất $\underline{\omega}_K$ thì

$$\underline{S} = \frac{1}{\lambda_I} \underline{\omega}_I \otimes \underline{\omega}_I + \ldots + \frac{1}{\lambda_{VI}} \underline{\omega}_{VI} \otimes \underline{\omega}_{VI}$$

Chúng ta có thể và ngay lập tức nhận được nghịch đảo của định luật Hooke từ (2.3):

$$\underline{\varepsilon}_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} \underline{\sigma}_\alpha$$

Thế các phép khai triển vật chất (2.2), (2.3) vào biểu thức (1.7) [1] ta nhận được các biểu thức năng lượng đàn hồi cho vật thể bất kỳ $\underline{C}$ ở dạng sau:

$$2\Phi = \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \lambda_1 \varepsilon_1^2 + \ldots + \lambda_\rho \varepsilon_\rho^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} \sigma_1^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_\rho} \sigma_\rho^2$$

trong đó $\qquad \varepsilon_\alpha^2 \equiv \underline{\varepsilon}_\alpha \cdot \underline{\varepsilon}_\alpha \geqslant 0 \, ; \; \sigma_\alpha^2 \equiv \underline{\sigma}_\alpha \cdot \underline{\sigma}_\alpha \geqslant 0$

Từ đây ta suy ra định lý cơ bản.

Định lý 5. *Năng lượng đàn hồi sẽ dương với mọi tenxơ biến dạng $\underline{\varepsilon} \neq 0$ khi và chỉ khi*

$$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_\rho > 0 \tag{2.5}$$

Chúng ta nhận thấy các điều kiện dương của năng lượng đàn hồi mới tìm có dạng cực kỳ đơn giản. So sánh ρ bất đẳng thức (2.5) với các điều kiện Silvestr áp đặt vào các thành phần C_{ijkm} của tenxơ độ cứng $\underline{C}$ (chẳng hạn, xem [4]) là một việc làm có ích.

Nếu sử dụng hệ cơ sở tenxơ vật chất $\underline{\omega}_I, \ldots, \underline{\omega}_{VI}$ nào đó thì

$$2\Phi = \lambda_I \varepsilon_I^2 + \ldots + \lambda_{VI} \varepsilon_{VI}^2 = \frac{1}{\lambda_I} \sigma_I^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_{VI}} \sigma_{VI}^2$$

trong đó

$$\varepsilon_K = \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\omega}_K , \ \sigma_K = \underline{\sigma} \cdot \underline{\omega}_K , \ \lambda_K > 0, \ K = I, \ldots, VI$$

Biểu diễn này của năng lượng đàn hồi cho phép giải thích hình học như sau:

Các mặt đẳng năng lượng $\Phi(\varepsilon) = \text{const}$ là các ellipxoit 6 chiều trong không gian $\mathcal{S}$ của các tenxơ đối xứng, hơn nữa các trục của ellipxoit hướng theo các trạng thái đàn hồi riêng của vật thể $\underline{C}$ đang xét, còn độ dài của các bán trục bằng các mô đun độ cứng tương ứng.

Khi $\lambda_K = \lambda_L$ các ellipxoit có tính đối xứng tương ứng, còn khi $\lambda_I = \ldots = \lambda_{VI} = \lambda$ chúng trở thành các hình cầu.

Trên cơ sở công thức cấu trúc ta sẽ phân tích vấn đề xác định tập các thông số vô hướng độc lập mô tả liên tục đa tạp các vật thể đàn hồi.

Theo (1.15) điều này dẫn tới việc xác định tập các thông số độc lập mô tả liên tục đa tạp các rêpe tenxơ vật chất. Lấy rêpe $\underline{\omega}_K$, $\underline{\omega}_K \cdot \underline{\omega}_L = \sigma_{KL}$; K, L = I, ..., VI. Ta sẽ mô tả mỗi tenxơ trong số các tenxơ $\underline{\omega}_K$ bằng 3 bất biến độc lập, chẳng hạn, bằng vết của các tenxơ $\underline{\omega}_K$, $\underline{\omega}_K \underline{\omega}_K$, $\underline{\omega}_K \underline{\omega}_K \underline{\omega}_K$ và 3 thông số cố định các trục chính của $\underline{\omega}_K$ trong hệ tọa độ thí nghiệm, chẳng hạn, các góc Euler θ_K, φ_K, ψ_K. Như vậy, ta thay mỗi tenxơ $\underline{\omega}_K$ bằng 6 thông số, chẳng hạn:

$$\text{tr}\omega_K, \ \text{tr}\omega_K^2, \ \text{tr}\omega_K^3, \ \theta_K, \ \varphi_K, \ \psi_K, \ K = I, \ldots, VI$$

36 thông số nhận được liên quan với nhau bởi 21 điều kiện trực giao; 6 điều kiện trong số đó là các điều kiện chuẩn hóa $| \underline{\omega}_K |^2 = \text{tr}\underline{\omega}_K^2 = 1$; 30 thông số còn lại, chẳng hạn:

$$\text{tr}\underline{\omega}_K, \ \text{tr}\underline{\omega}_K^3, \ \theta_K, \ \varphi_K, \ \psi_K$$

liên quan với nhau bởi 15 điều kiện trực giao:

$$\omega_K \cdot \omega_L = 0 \ \text{khi} \ K \neq L \tag{2.6}$$

Chúng ta lựa chọn các thông số như sau. Chọn các thông số dưới đây làm các thông số độc lập: 3 thông số cố định các trục của tenxơ thứ nhất trong phòng thí nghiệm, chẳng hạn

$$\theta = \theta_I, \ \varphi = \varphi_I, \ \psi = \psi_I$$

và 12 bất biến độc lập của các tenxơ $\underline{\omega}_K$, chẳng hạn:

$$\varkappa_1 = \text{tr}\underline{\omega}_I, \ \ldots, \ \varkappa_6 = \text{tr}\underline{\omega}_{VI}$$
$$\varkappa_7 = \text{tr}\underline{\omega}_I^2, \ \ldots, \ \varkappa_{12} = \text{tr}\underline{\omega}_{VI}^2 \tag{2.7}$$

Chúng ta biểu diễn 15 thông số không bất biến còn lại, chẳng hạn:

$$\theta_K, \ \varphi_K, \ \psi_K, \ K = II, \ldots, VI$$

qua 15 đại lượng độc lập θ, φ, ψ, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{12}$ nhờ 15 điều kiện (2.6).

Như vậy, nói chung, số lượng các thông số trong công thức cấu trúc (1.15) bằng: $6 + 12 + 3 = 21$. Điều này tương ứng với số các thành phần khác không:

$$C_{ijkm} \qquad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

được nêu ra trong các sách giáo khoa của tenxơ độ cứng $\underline{C}$ trong hệ tọa độ thí nghiệm. Tất nhiên là phải như vậy vì cả hai tập đều mô tả liên tục đa tạp các tenxơ độ cứng.

Các kết quả: Nói chung, một đa tạp các vật thể đàn hồi có thể đàn hồi sẽ được mô tả một cách liên tục bằng tập 21 thông số gồm 3 tập con rất khác nhau như sau:

Tập con thứ nhất là 6 hằng số vật chất có thứ nguyên được xác định đơn trị đối với vật liệu đàn hồi đã cho (các bất biến của tenxơ độ cứng).

$$\lambda_I, \ldots, \lambda_{VI} \quad (A)$$

Các hằng số này có thứ nguyên vật lý của ứng suất và đều dương.

Nhìn lại các công thức, chúng ta thấy rằng các hằng số này mô tả mức độ cứng chung của vật liệu. Chúng cũng là các mô đun độ cứng thực của vật liệu. Các mô đun độ mềm tương ứng với chúng là:

$$\lambda_{I}^{-1}, \ldots, \lambda_{VI}^{-1}$$

Tập con thứ hai là 12 hằng số vật chất không thứ nguyên (các bất biến của tenxơ độ cứng)

$$\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{12} \quad (B)$$

(được xác định, chẳng hạn, bằng các công thức (2.7)) lập thành một hệ hàm đủ và bất khả quy của các bất biến của rêpe tenxơ vật chất $\underline{\omega}_I, \ldots, \underline{\omega}_{VI}$. Các bất biến này dường như phân bố lại độ cứng theo các sợi và các mặt vật chất. Tính chất quan trọng nhất của chúng thể hiện ở chỗ chúng đều như nhau đối với tenxơ độ cứng $\underline{C}$ và tenxơ độ mềm $\underline{S}$. Ta sẽ gọi các hằng số không thứ nguyên này là các bộ phân bố độ cứng.

Tập con thứ ba là ba thông số không bất biến, chẳng hạn các góc Euler

$$\theta, \varphi, \psi \quad (C)$$

Cố định một vật cụ thể làm từ vật liệu đàn hồi đang xét so với phòng thí nghiệm.

Các trường hợp suy biến khi một số mô đun độ cứng trùng nhau $\lambda_K = \lambda_L$ với những cặp K, L nào đó và (hoặc) khi các bộ phân bố độ cứng phụ thuộc vào các điều kiện nào đó:

$$f_i(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{12}) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, k \leqslant 12$$

cần được nghiên cứu riêng. Các tập (A), (B), (C) dẫn tới tập

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho; \varkappa_1, \ldots, \varkappa_t, \varphi_1, \ldots, \varphi_u), \; \rho \leqslant 6, \; t \leqslant 12, \; u \leqslant 3$$

trong đó λ_i khác nhau từng đôi một, còn $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ lập thành một tập đủ các bất biến liên tục của các ánh xạ chiếu $\underline{P}_1, \ldots, \underline{P}_\rho$ ở công thức (1.11). Ký hiệu $[\rho+t+u]$ được gọi là chỉ số cấu trúc thứ hai của lớp các vật thể đàn hồi đang xét. Ta viết công thức cấu trúc ở dạng

$$C_{ijkm} = \lambda_1 P_{(1)ijkm}(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t; \varphi_1, \ldots, \varphi_u) + \ldots + \lambda_\rho P_{(\rho)ijkm}(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t; \varphi_1, \ldots, \varphi_u).$$

(NGUYỄN VĂN ĐIỆP *lược dịch*) *Nhận ngày 18/7/1983*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. RYCHLEWSKI J. Cấu trúc toán học của các vật thể đàn hồi, I. Trạng thái đàn hồi riêng, Tạp chí Cơ học số 4, 1983.
2. HOOKE R. Lectures de potentia restitutura or of spring explaining the power of springing bodies, London 1678.
3. TADHUNTER I. PEARSON K. A history of the theory of elasticity, Cambridge, University Press, 1886.
4. ФЕГОРОВ Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах, Наука, М. 1963.

РЕЗЮМЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УПРУГИХ ТЕЛ
II. УПРУГИЕ КОНСТАНТЫ

На основе введенного в части I понятия собственного упругого состояния разобран вопрос об определении системы параметров непрерывно описывающих, в самом общем случае, многообразие всех линейно-упругих тел. Показано, что эта система состоит из 6 модулей жесткости с размерностью напряжения, 12 безразмерных материальных констант, названных дистрибуторами жесткости и 3 углов, ориентирующих тело относительно лаборатории. Этот результат является, по видимому, принципиально новым вкладом в классическую теорию упругости.