Tạp chí Cơ Học T.VII, 1985, số 4 (trang 20-24)

VỀ DAO ĐỘNG TỰA DỪNG CỦA CÁC HỆ CƠ HỌC VỚI KÍCH ĐỘNG NGẪU NHIÊN

NGUYỄN XUÂN HÙNG — NGUYỄN TIẾN KHIÊM — TRẦN DƯƠNG HIỀN

§ 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong lý thuyết dao động ngẫu nhiên, dao động dừng được hiểu là chuyển động mang tính chất của quá trình ngẫu nhiên dừng, nói cách khác là nghiệm dừng của phương trình vi phân chuyển động. Nhưng trong nhiều trường hợp có thể tìm được chuyển động dạng

$$x(t) = a\cos(\omega t + \theta) \tag{1.1}$$

trong đó a, θ là quá trình ngẫu nhiên dừng. Quá trình (1.1) nói chung là quá trình ngẫu nhiên không dừng, vì vậy nó không phải là dao động dừng. Nhưng tính chất và ý nghĩa của nó gắn liền với các quá trình ngẫu nhiên dừng.

Để ngắn gọn, (1.1) được gọi là dao động tựa dừng. Điều kiện tồn tại dao động tựa dừng là điều kiện tồn tại các quá trình ngẫu nhiên dừng a, θ thỏa mãn (1.1).

Trong bài báo này, trình bày mối liên hệ giữa dao động tựa dừng (1.1) với dao động dừng thông thường. Nghiên cứu dao động tựa dừng trong hệ ôtônôm á tuyến, trong hệ khi có kích động ngẫu nhiên không dừng và khái niệm ổn định của nó.

§ 2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ DAO ĐỘNG TỰA DỪNG LÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN DỪNG

Định nghĩa: Trong hệ Cơ học $\Sigma(x, \dot{x})$, chế độ chuyển động $(x, \dot{x})$ gọi là chế độ dao động tựa dừng nếu tồn tại quá trình ngẫu nhiên dừng a, θ để

$$x = a\cos(\omega t + \theta), \quad \dot{x} = -a\omega\sin(\omega t + \theta) \tag{2.1}$$

với
$$a = \sqrt{x^2 + \frac{1}{\omega^2}\dot{x}^2}, \quad \theta + \omega t = \Phi(t) = -\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\omega x} \tag{2.2}$$

Giả sử phân bố xác suất của a và θ là p(a, θ). Xem (2.1) hoặc (2.2) là phép biến đổi tọa độ, lúc đó mật độ xác suất của $(x, \dot{x})$ là $W(t, x, \dot{x})$ sẽ bằng

$$W(t, x, \dot{x}) = a\omega p(a, \theta)\Big|_{a = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2},\ \theta = -\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\omega x}\right)} \tag{2.3}$$

Định lý 1: Chế độ dao động tựa dừng (2.1) là quá trình ngẫu nhiên dừng khi phân bố xác suất của θ là phân bố đều tức $\partial p/\partial\theta = 0$.

Thật vậy, $(x, \dot{x})$ là quá trình ngẫu nhiên dừng (hay dao động dừng) nếu $\partial W/\partial t = 0$, điều kiện này thỏa mãn khi $\partial p/\partial\theta = 0$ vì

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -a\omega^2 \frac{\partial p}{\partial \theta}\Big|_{a,\ \theta \text{ xác định theo (2.2)}} \tag{2.4}$$

Ví dụ: Xét hệ tuyến tính: $\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \xi(t)$ (2.5)

với ξ(t) là ồn trắng cường độ D, k và D nhỏ cùng bậc.

Bằng phương pháp trung bình hóa [3] ta tìm được chế độ dao động tựa dừng (2.1) với

$$p(a, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} a\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \text{ trong đó } \sigma^2 = D/4k\omega_o^2 \tag{2.6}$$

Rõ ràng, phân bố của θ là phân bố đều trong $[0,2\pi]$, thỏa mãn điều kiện định lý 1. Dao động tựa dừng là dao động dừng.

Nếu lập phương trình FPK trực tiếp cho (2.5) và giải nó, ta được nghiệm đúng của mật độ xác suất dừng là

$$W(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega_o}\right)^2\right)\right\} \tag{2.7}$$

Dễ dàng nhận thấy, nếu thay (2.2) vào (2.6) ta được (2.7) điều đó khẳng định rằng phương pháp trung bình trong trường hợp này cho nghiệm đúng và (2.1) với $p(a, \theta)$ trong (2.6) thực sự là quá trình ngẫu nhiên dừng.

§3. DAO ĐỘNG TỰA DỪNG TRONG HỆ ÔTÔNÔM Á TUYẾN

Xét hệ ôtônôm á tuyến sau

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(x, \dot{x}) + G(x, \dot{x})\xi(t) \tag{3.1}$$

$\xi(t)$ — ồn trắng cường độ D, $F = \varepsilon f$, $G = \sqrt{\varepsilon}\, g$ là các hàm phi tuyến yếu. Dùng phương pháp trung bình hóa ta sẽ nhận được chế độ tựa dừng (2.1) với $p(a, \theta)$ thỏa mãn phương trình.

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_a p) + \frac{\partial}{\partial \theta}(K_\theta p) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(D_a p) + \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}(D_{a\theta} p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(D_\theta p) \tag{3.2}$$

trong đó:

$$K_a = -\frac{1}{\omega_o}\left\langle\left(f(a, \theta) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} g(a, \theta)\right)\sin\Phi\right\rangle + \frac{D}{2a\omega_o^2}\langle g^2(a, \theta)\sin^2\Phi\rangle,$$

$$K_\theta = -\frac{1}{a\omega_o}\left\langle\left(f(a, \theta) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} g(a, \theta)\right)\cos\Phi\right\rangle - \frac{D}{a^2\omega_o^2}\langle g^2(a, \theta)\cos\Phi\sin\Phi\rangle,$$

$$D_a = \frac{D}{\omega_o^2}\langle g^2(a, \theta)\sin^2\Phi\rangle, \qquad D_{a\theta} = \frac{D}{a\omega_o^2}\langle g^2(a, \theta)\cos\Phi\sin\Phi\rangle,$$

$$D_\theta = \frac{D^2}{a^2\omega^2}\langle g^2(a, \theta)\cos^2\Phi\rangle, \qquad \Phi = \omega t + \theta, \tag{3,3}$$

$$f(a, \theta) = f(a\cos\Phi, -a\omega\sin\Phi), \qquad g(a, \theta) = g(a\cos\Phi, -a\omega\sin\Phi),$$

ở đây $\langle * \rangle$ ký hiệu toán tử trung bình tích phân: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} * d\Phi$. Sau khi trung bình hóa 3.3) các hàm K_a, K_θ, ..., D_θ chỉ phụ thuộc vào a (do tính ôtônôm của hệ) nên nghiệm của (3.2) có dạng

$$p(a, \theta) = \frac{C}{D_a}\exp\left(2\int^a \frac{K_a(S)}{D_a(S)} dS\right), \tag{3.4}$$

với

$$C = \left\{2\pi\int_0^\infty \frac{1}{D_a(a)}\exp\left(2\int^a \frac{K_a(S)}{D_a(S)} dS\right) da\right\}^{-1} \tag{3.5}$$

Điều kiện tồn tại (3.4) hay tồn tại chế độ dao động tựa dừng chính là điều kiện để tích phân trong dấu ngoặc (3.5) hội tụ.

Dễ dàng nhận thấy trong (3.4) phân bố của θ là phân bố đều vì vậy theo định lý 1 ta có.

Định lý 2: Trong hệ ôtônôm á tuyến mọi dao động tựa dừng đều là quá trình ngẫu nhiên dừng (hay dao động dừng thông thường).

Trong trường hợp này, có thể chứng minh được

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} = \frac{1}{2}E\{a^2\} = \frac{1}{2}\sigma_a^2 \tag{3.6}$$

Nghĩa là phương sai của quá trình dao động tựa dừng bằng một nửa phương sai biên độ (hay maximun của nó). Thật vậy

$$E\{x^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} a^2\cos^2\Phi\, p(a,\theta)\,da\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\infty a^2 p(a)\,da = \frac{1}{2}E\{a^2\}$$

$p(a,\theta)$ có dạng (3.4) và $\cos 2\Phi$ là hàm tuần hoàn của θ chu kỳ 2π.

§4. DAO ĐỘNG TỰA DỪNG CỦA HỆ CHỊU KÍCH ĐỘNG NGẪU NHIÊN KHÔNG DỪNG

Xét hệ tuyến tính (2.5) với $\xi(t)$ là quá trình ngẫu nhiên không dừng. Trong trường hợp này có thể khẳng định rằng không thể tồn tại dao động dừng, bởi vì

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau \tag{4.1}$$

Với $\xi(t)$ không dừng, $x(t)$ cũng là không dừng. Tuy vậy kết quả sau đây chứng tỏ rằng trong hệ này tồn tại chế độ dao động tựa dừng và chính trong trường hợp này dao động tựa dừng mới bộc lộ bản chất «không dừng» và ý nghĩa mới của nó.

Giả sử $\xi(t)$ có dạng $\qquad \xi(t) = I(t)\eta(t) \qquad$ (4.2)

với $I(t)$ là hàm tiền định tuần hoàn chu kỳ $2\pi/\nu$, $\eta(t)$ là ồn trắng cường độ D. Đặt $x = a\cos(\omega_o t + \theta)$, $\dot{x} = -a\omega_o\sin\Phi$, $\Phi = \omega_o t + \theta$, lập phương trình FPK cho (a, θ) ta có

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}(K_1 p) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 p) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(D_{11}p) + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(D_{12}p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(D_{22}p) \tag{4.3}$$

trong đó:

$$K_1 = -2ka\sin^2\Phi + \frac{DI^2(t)}{2a\omega_o^2}\cos^2\Phi,\quad K_2 = -2k\cos\Phi\sin\Phi - \frac{DI^2(t)}{a^2\omega_o^2}\cos\Phi\sin\Phi,$$

$$D_{11} = \frac{DI^2(t)}{\omega_o^2}\sin^2\Phi,\quad D_{22} = \frac{DI^2(t)}{a^2\omega_o^2}\cos^2\Phi,\quad D_{12} = \frac{DI^2(t)}{a\omega_o^2}\cos\Phi\sin\Phi. \tag{4.4}$$

Trung bình hóa các hệ số (4.4) ta được các biểu thức rút gọn:

$$\overline{K}_1 = \langle K_1\rangle = -ka + \frac{D}{2a\omega_o^2}\langle I^2(t)\cos^2\Phi\rangle,\quad \overline{K}_2 = \langle K_2\rangle = -\frac{D}{a^2\omega_o^2}\langle I^2(t)\cos\Phi\sin\Phi\rangle, \tag{4.5}$$

$$\overline{D}_{11} = \langle D_{11}\rangle = \frac{D}{\omega_o^2}\langle I^2(t)\sin^2\Phi\rangle,\quad \overline{D}_{22} = \langle D_{22}\rangle = \frac{D}{a^2\omega_o^2}\langle I^2(t)\cos^2\Phi\rangle,\quad \overline{D}_{12} = \langle D_{12}\rangle.$$

Để tính (4.5) ta phải phân biệt 2 trường hợp $\nu \neq \omega_o$ (không cộng hưởng) và $\nu = \omega_o$ (cộng hưởng)

Trường hợp không cộng hưởng: $\nu \neq \omega_o$.

$$\overline{K}_1 = -ka + \frac{DI_o^2}{4a\omega_o^2},\ \overline{K}_2 = 0,\ \overline{D}_{11} = \frac{DI_o^2}{2\omega_o^2},\ \overline{D}_{12} = 0,\ \overline{D}_{22} = \frac{DI_o^2}{2a^2\omega_o^2} \tag{4.6}$$

với

$$I_o^2 = \langle I^2(t)\rangle = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi/\nu} I^2(t)dt.$$

các hàm (4.6) không phụ thuộc vào θ nên mật độ xác suất $p(a, \theta)$ có dạng (2.6) với $\sigma^2 = DI_o^2/8k\omega_o^2$. Kích động (2.4) trong trường hợp này tương đương với kích động dừng $\xi(t)$ dạng ồn trắng cường độ bằng $\frac{1}{2}I_o^2D$ (tức bằng $\frac{1}{2}I_o^2$ lần cường độ của $\eta(t)$.

Trường hợp cộng hưởng $\nu = \omega_o$.

$$\bar{K}_1 = -ka + \frac{D}{4a\omega_o^2}[I_o^2 + I_c^2\cos 2\theta - I_s^2\sin 2\theta], \quad \bar{K}_2 = -\frac{D}{2a^2\omega^2}[I_s^2\cos 2\theta + I_c^2\sin 2\theta], \tag{4.7}$$

$$\bar{D}_{11} = \frac{D}{2\omega_o^2}(I_o^2 - I_c^2\cos 2\theta + I_s^2\sin 2\theta), \quad \bar{D}_{22} = \frac{D}{2a^2\omega_o^2}(I_o^2 + I_c^2\cos 2\theta + I_s^2\sin 2\theta),$$

$$\bar{D}_{12} = \frac{D}{2a\omega_o^2}(I_c^2\sin 2\theta + I_s^2\cos 2\theta).$$

và nghiệm dừng của (4.3) có dạng

$$p(a, \theta) = \frac{2k\omega_o^2}{D\pi G_o}a\exp\left\{-\frac{2k\omega_o^2a^2}{D^2G_o^2}(I_o^2 + I_c^2\cos 2\theta - I_s^2\sin 2\theta)\right\}, \tag{4.8}$$

với $\quad I_c^2 = \langle I^2(t)\cos 2\nu t\rangle, \quad I_s^2 = \langle I^2(t)\sin 2\nu t\rangle, \quad G_o^2 = (I_o^2)^2 + (I_c^2)^2 + (I_s^2)^2$

Như vậy khi cộng hưởng tồn tại chế độ dao động tựa dừng (2.1) với $p(a, \theta)$ có dạng (4.8)

Trong tất cả các thể hiện có thể của dao động tựa dừng, chế độ

$$x = a_o\cos(\omega_o t + \theta_o) \tag{4.9}$$

với

$$a_o = \left(\frac{D(I_o^2 + \sqrt{I_s^4 + I_c^4})}{k\omega_o^2}\right)^{1/2}, \quad \theta_o = -\operatorname{arctg}\frac{I_s^2}{I_c^2}. \tag{4.10}$$

xảy ra với xác suất lớn nhất.

Trong trường hợp này có thể tính được

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2}(\sigma_a^2 + A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t) \text{ trong đó}$$

$$A = \pi\langle Q(\theta)\cos 2\theta\rangle = \frac{D^3G_o^2}{8k\omega_o^2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta d\theta}{(I_o^2 + I_c^2\cos 2\theta - I_s^2\sin 2\theta)^2},$$

$$B = \pi\langle Q(\theta)\sin 2\theta\rangle = \frac{DG_o^3}{8k\omega_o^2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta d\theta}{(I_o^2 + I_c^2\cos 2\theta - I_s^2\sin 2\theta)^2}, \tag{4.11}$$

với

$$Q(\theta) = \int_0^{\infty}a^2p(a, \theta)da = \frac{D^3G_o^3}{4\pi k\omega_o^2}\frac{1}{(I_o^2 + I_c^2\cos 2\theta - I_s^2\sin 2\theta)^2}.$$

§5. KHÁI NIỆM VỀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA DAO ĐỘNG TỰA DỪNG

Dễ dàng thấy rằng mọi chuyển động $(x, \dot{x})$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng quát

$$x(t) = a(t)\cos(\omega t + \theta), \quad \dot{x}(t) = a(t)\sin\Phi(t), \quad \Phi(t) = \omega(t) + \theta(t) \tag{5.1}$$

$a(t)$ – biên độ, $\Phi(t)$ – pha, $\dot{\Phi}(t) = \omega + \dot{\theta}(t)$ là tần số. Và đối với chuyển động dạng tổng quát (5.1) tương ứng ta có mật độ xác suất của a, θ là $P(t, a, \theta)$ là nghiệm của phương trình FPK tổng quát (1.3). Như vậy chế độ dao động tựa dừng (2.1) có thể xem là chuyển động riêng biệt của (5.1) khi $a(t)$ và $\theta(t)$ là quá trình ngẫu nhiên dừng.

Mặt khác, nếu $p(a, \theta)$ là mật độ xác suất của a, θ trong chế độ tựa dừng, nghĩa là nó thỏa mãn pt FPK dừng. Theo tính chất ấy ta có

$$p(a, \theta) = \lim_{t \to \infty} p(t, a, \theta) \qquad (5.2)$$

(5.2) chứng tỏ rằng a, θ trong chế độ tựa dừng có dạng

$$a = \underset{t \to \infty}{\mathrm{l.i.m}}\, a(t), \quad \theta = \underset{t \to \infty}{\mathrm{l.i.m}}\, \theta(t) \qquad (5.3)$$

trong đó giới hạn l.i.m hiểu theo nghĩa (5.2). Đây có thể hiểu như tính ổn định của chế độ dao động dừng. Vậy mọi chế độ dao động tựa dừng sẽ ổn định theo nghĩa xác suất, nếu nó tồn tại.

§ 6. KẾT LUẬN

Trong công trình này đưa ra khái niệm dao động tựa dừng rộng hơn khái niệm dao động dừng thông thường. Phương pháp tìm và tính chất của nó. Kết quả nhận được cho phép ta trực tiếp nghiên cứu những bài toán dao động của hệ cơ học chịu kích động không dừng bằng phương pháp quen thuộc trong lý thuyết dao động ngẫu nhiên.

Địa chỉ:
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 8/10/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. МОИСЕЕВ Н.Н. Асимптотические методы в нелинейной механике. Наука, 1969
2. ДИМЕНБЕРГ М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. Наука, 1980.
3. NGUYỄN TIẾN KHIÊM. Phương trình vi phân ngẫu nhiên Stratônôvich và ứng dụng trong lý thuyết dao động ngẫu nhiên. Tạp chí cơ học số 2, 1983.

SUMMARY

ON THE QUASI – STATIONARY STATE OF VIBRATION IN MECHANICAL SYSTEM WITH RANDOM EXCITATION

Some aspects of the so-called quasi-stationary state of vibration in the random forced mechanical systems are introduced. Existence and stability problems are discussed in the formulation for the stationary systems and in general case.

The approach makes possible to investigate dynamic systems to nonstationary exitation basing upon the stationary amplitude and phases.