Tạp chí Cơ Học T.VII, 1985. Số 4 (Trang 9—41)

GIẢI BÀI TOÁN PHẲNG ĐỘNG ĐÀN DẺO BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM ĐÀN HỒI

NGUYỄN ĐĂNG BÍCH

Giải bài toán phẳng động đàn dẻo đối với nửa mặt phẳng thường dùng phương pháp sai phân hữu hạn [1], hoặc dùng phương pháp đường đặc trưng [2, 3], các phương pháp này cho nghiệm dưới dạng số.

Trong bài này sử dụng phương pháp nghiệm đàn hồi, thiết lập ở trong [4] để giải bài toán nói trên, cho nghiệm dưới dạng nửa giải tích, đặc biệt ở gần đúng thứ nhất cho nghiệm dưới dạng giải tích.

§1. NGHIỆM Ở GẦN ĐÚNG THỨ KHÔNG

Nghiệm ở gần đúng thứ không của bài toán phẳng động đàn dẻo đối với nửa mặt phẳng thỏa mãn các phương trình của bài toán phẳng động đàn hồi.

a) *Phương trình chuyển động* [4].

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{C_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tau_{xy}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{yy}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tau_{xy}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1-\nu}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma=0 \tag{1.1}$$

Trong đó: $\sigma=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}$, C_1, C_2 là vận tốc truyền sóng dọc và ngang trong môi trường đàn hồi.

b) *Điều kiện biên*: Môi trường được xét là nửa mặt phẳng trên biên của nửa mặt phẳng chịu tải trọng bậc chuyển động với vận tốc không đổi:

$$\tau_{xy}=0,\ \sigma_{yy}=-PH(x-ct)\quad \text{khi } y=0 \tag{1.2}$$

Trong đó: P là cường độ tải trọng, $H(x-ct)$ là hàm đơn vị, c là vận tốc truyền tải trọng, để đơn giản ta khảo sát trường hợp

$$c=C_2\sqrt{2}. \tag{1.3}$$

1. BIỂU THỨC NGHIỆM

Để xây dựng nghiệm ở gần đúng thứ không, trong trường hợp tải trọng chuyển động với vận tốc vượt âm, ta dùng đồng nhất thức đã xây dựng được ở trong [4].

$$\sigma=0,\ \tau_{xy}=0,$$

$$\sigma_{yy}=\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint R_1(\alpha,\beta)\mathrm{ch}i\alpha y e^{i\alpha x+\beta t}d\alpha d\beta. \tag{1.4}$$

Trong đó cận tích phân theo α, β lấy như sau:

$$\alpha\in(-\infty,+\infty),\ \beta\in(\beta_o-i\infty,\beta_o+i\infty) \tag{1.5}$$

Dạng nghiệm (1.4) thỏa mãn đồng nhất hệ phương trình (1.1).

Để xác định $R_1(\alpha,\beta)$ ta cho (1.4) thỏa mãn điều kiện biên (1.2)

$$\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint R_1(\alpha,\beta)e^{i\alpha x+\beta t}d\alpha d\beta=-PH(x-ct) \tag{1.6}$$

Giải phương trình (1.6) ta tìm được:

$$R_1(\alpha, \beta) = \frac{-P}{\sqrt{2\pi}\, i\alpha(\beta + i\alpha c)} \quad (1.7)$$

Thay (1.7) vào (1.4) rồi lấy tích phân theo α, β ta được nghiệm của bài toán đặt ra ở gần đúng thứ không:

$$\tau_{xy} = 0,$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{P}{2}[H(x - ct + y) + H(x - ct - y)],$$

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{2}[H(x - ct + y) + H(x - ct - y)]. \quad (1.8)$$

2. CƯỜNG ĐỘ ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Cường độ ứng suất trong trường hợp này có dạng.

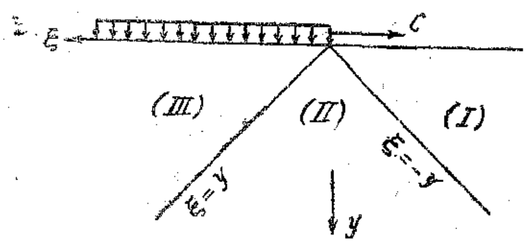
$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (1.9$$

Thay (1.8) vào (1.9) ta tìm được:

$$\sigma_u = \frac{P\sqrt{3}}{2}[H(x - ct + y) + H(x - ct - y)] \quad (1.11)$$

Cường độ biến dạng biểu diễn trong hệ tọa độ (ξ, y) với $\xi = x - ct$, nghĩa là biểu diễn trong hệ tọa độ chạy theo biên của nửa mặt phẳng với vận tốc không đổi c có dạng

$$e_u = \frac{P}{2\mu\sqrt{3}}[H(\xi + y) + H(\xi - y)] \quad (1.12)$$



Trong miền (II)

$|\xi| < y$ Suy ra $H(\xi - y) = 0$, $H(\xi + y) = 1$ nên $e_u = \frac{P}{2\mu\sqrt{3}}$

Trong miền (I)

$\xi < 0$, $|\xi| > y$ suy ra $H(\xi + y) = H(\xi - y) = 0$ nên $e_u = 0$

Trong miền (III)

$\xi > y$ suy ra $H(\xi - y) = H(\xi + y) = 1$ nên $e_u = \frac{P}{\mu\sqrt{3}}$

Tại một thời điểm nào đó:

— Nếu $$\frac{P}{\mu\sqrt{3}} < e_s \quad (1.13)$$

thì toàn miền vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi

— Nếu $$\frac{P}{2\mu\sqrt{3}} > e_s \quad (1.14)$$

thì miền (I) làm việc trong giới hạn đàn hồi.

Miền (II) và (III) làm việc trong trạng thái dẻo.

Nhưng khi t biến thiên từ 0 đến $+\infty$ và giả sử tại $t = 0$ lực đặt ở $+\infty$ thì toàn miền làm việc trong trạng thái dẻo.

§2. NGHIỆM Ở GẦN ĐÚNG THỨ NHẤT

Nghiệm ở gần đúng thứ nhất thỏa mãn các phương trình:

a) Phương trình chuyển động [4]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma=\frac{\rho}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(e_{xx}^{P}+e_{xx}^{P}\right)+$$

$$+\frac{2\mu}{1-\nu}\left[2\frac{\partial^2 e_{xy}^{P}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 e_{xx}^{P}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 e_{xy}^{P}}{\partial x^2}\right],$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{C_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tau_{xy}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}=2\mu\frac{\partial^2 e_{xy}^{P}}{\partial t^2}, \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{yy}+2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1-\nu}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(e_{xx}^{P}+e_{yy}^{P}\right).$$

Trong đó e_{ij}^{P} là thành phần biến dạng liên quan đến các số hạng phi tuyến tính ở gần đúng thứ không.

b) Điều kiện biên có dạng như (1.2).

Theo [4] e_{ij}^{P} được tính như sau:

$$e_{xx}^{P}=\frac{\omega}{2\mu(1-\omega)}\left[\sigma_{xx}-\frac{1+\nu+\nu(1-2\nu)(1-\omega)}{3-(1-2\nu)\omega}\sigma\right],$$

$$e_{yy}^{P}=\frac{\omega}{2\mu(1-\omega)}\left[\sigma_{yy}-\frac{1+\nu+\nu(1-2\nu)(1-\omega)}{3-(1-2\nu)\omega}\sigma\right],$$

$$e_{xy}^{P}=\frac{\omega}{2\mu(1-\omega)}\tau_{xy} \tag{2.2}$$

Trong đó đường cong biến dạng duy nhất ứng với trường hợp tái bền tuyến tính.

$$\omega=\lambda\left(1-\frac{e_s}{e_u}\right)\quad \text{với } \lambda=1-\frac{E'}{3\mu} \tag{2.3}$$

do đó:

$$\frac{\omega}{1-\omega}=\frac{e_u-e_s}{\frac{1-\lambda}{\lambda}e_u+e_s}$$

Để cho gọn nhưng không mất tính chất tổng quát ta xét trường hợp $3\mu=2E'$, khi đó $\lambda=\frac{1}{2}$, $\frac{1-\lambda}{\lambda}=1$

và

$$\frac{\omega}{1-\omega}=\frac{e_u-e_s}{e_u+e_s}. \tag{2.4}$$

Trong (2.2) các thành phần ứng suất và cường độ biến dạng e_u tính theo kết quả ở gần đúng thứ không (1.8) và (1.11). Vậy ta có:

$$e_{xx}^{P}=\frac{P(e_u-e_s)}{4\mu(e_u+e_s)}\left[H(x-ct+y)+H(x-ct-y)\right],$$

$$e_{yy}^{P}=\frac{-P(e_u-e_s)}{4\mu(e_u+e_s)}\left[H(x-ct+y)+H(x-ct-y)\right],$$

$$e_{xy}^{P}=0 \tag{2.5}$$

Thay (2.5) vào vế phải của phương trình (2.1) và qua tính toán đơn giản ta được:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma=$$

$$=\frac{P}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{H(x-ct+y)+H(x-ct-y)}{a\left[H(x-ct+y)+H(x-ct-y)\right]+1},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{C_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tau_{xy}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}=0, \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{yy}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tau_{xy}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1-\nu}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma=0.$$

Trong đó:
$$a=\frac{P}{2\mu e_s\sqrt{3}}=\frac{P\sqrt{3}}{2\sigma_s} \tag{2.7}$$

1. NGHIỆM RIÊNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH (2.6)

Theo kết quả thiết lập ở trong [4] nghiệm riêng của phương trình (2.6) có dạng:

$$\sigma^{(1)}=-\frac{1}{(2\pi i)^2\sqrt{2\pi}}\iiint\frac{\overline{A}e^{i\alpha x+\gamma y+\beta t}}{(1-\nu)m_1}d\alpha d\gamma d\beta,$$

$$\tau_{xy}^{(1)}=\frac{1}{(2\pi i)^2\sqrt{2\pi}}\iiint\frac{i\alpha\gamma\overline{A}}{(1-\nu)m_1m_2}e^{i\alpha x+\gamma y+\beta t}d\alpha d\gamma d\beta, \tag{2.8}$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}=\frac{1}{(2\pi i)^2\sqrt{2\pi}}\iiint\frac{\overline{A}}{(1-\nu)mm_1}\left[\alpha^2+(1-\nu)\frac{\beta^2}{C_1^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\alpha^2\gamma^2}{m_2}\right]e^{i\alpha x+\gamma y+\beta t}d\alpha d\gamma d\beta.$$

Trong đó cận tích phân theo α, β lấy theo (1.5), cận tích phân theo γ lấy như sau: $\gamma\in(\gamma_0-i\infty,\ \gamma_0+i\infty)$. (2.9) $\overline{A}$ là ảnh của biểu thức ở vế phải của phương trình (2.6) qua phép biến đổi tích phân Fuariê theo biến x với tham số α, Laplaxơ một phía theo biến y và t với tham số γ, β.

$$m=\alpha^2+\gamma^2,\quad m_1=\gamma^2-\alpha^2-\frac{\beta^2}{C_1^2},\quad m_2=\gamma^2-\alpha^2-\frac{\beta^2}{C_2^2} \tag{2.10}$$

$$\overline{A}=\frac{2Pa}{\sqrt{2\pi}\,(1-\nu)(a+1)(2a+1)(\beta+i\alpha c)} \tag{2.11}$$

Thay (2.11) vào (2.8) rồi lấy tích phân theo γ ta được:

$$\sigma^{(1)}=\frac{Q}{i(2\pi)^2}\iint\frac{e^{-\nu_1y+i\alpha x+\beta t}}{\nu_1(\beta+i\alpha c)}d\alpha d\beta,$$

$$\tau_{xy}^{(1)}=\frac{Q}{i(2\pi)^2}\iint\frac{C_1^2C_2^2i\alpha e^{-\nu_1y+\alpha x+\beta t}}{(C_1^2-C_2^2)\beta^2(\beta+i\alpha c)}d\alpha d\beta.$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}=\frac{Q}{i(2\pi)^2}\iint\frac{C_2^2a_2e^{-\nu_1y+i\alpha x+\beta t}}{\nu_1\beta^2(\beta+i\alpha c)}d\alpha d\beta. \tag{2.12}$$

Trong đó:
$$Q=\frac{Pa}{(1-\nu)(a+1)(2a+1)} \tag{2.13}$$

$$\nu_1=\left(\alpha^2+\frac{\beta^2}{C_1^2}\right)^{1/2},\quad \nu_2=\left(\alpha^2+\frac{\beta^2}{C_2^2}\right)^{1/2},\quad a_2=\alpha^2+\nu_2^2$$

2. NGHIỆM TỔNG QUÁT CỦA PHƯƠNG TRÌNH (2.6)

Theo [4] nghiệm của phương trình (2.6) không có vế phải lấy dưới dạng:

$$\sigma^{(2)}=0,$$

$$\tau_{xy}^{(2)}=-\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint\frac{1}{\nu_2}R_4(\alpha,\beta)e^{-\nu_2y+i\alpha x+\beta t}d\alpha d\beta, \tag{2.15}$$

$$\sigma_{yy}^{(2)}=\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint\left[R_1(\alpha,\beta)\mathrm{ch}\,i\alpha y-\frac{2i\alpha}{a_2}R_4(\alpha,\beta)e^{-\nu_2y}\right]e^{i\alpha x+\beta t}d\alpha d\beta.$$

Trong đó R1, R4 là các hàm chưa xác định.
Cho tổng hai nghiệm (2.12) và (2.15) thỏa mãn điều kiện biên (1.2) ta được:

$$\frac{1}{\nu_2} R_4 + \frac{QC_1^2C_2^2 i\alpha}{\sqrt{2\pi}\,(C_1^2 - C_2^2)\beta^2(\beta + i\alpha c)} = 0, \tag{2.16}$$

$$R_1 - \frac{2i\alpha}{a_2} R_4 + \frac{QC_2^2 a_2}{\sqrt{2\pi}\,\nu_1\beta^2(\beta + i\alpha c)} = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\alpha(\beta + i\alpha c)}.$$

Giải phương trình (2.16) dẫn đến:

$$R_4 = -\frac{QC_1^2C_2^2 i\alpha\nu_2}{\sqrt{2\pi}\,(C_1^2 - C_2^2)\beta^2(\beta + i\alpha c)}, \tag{2.17}$$

$$R_1 = \frac{QC_1^2C_2^2\alpha^2\nu_2}{\sqrt{2\pi}\,(C_1^2 - C_2^2)a_2\beta^2(\beta + i\alpha c)} - \frac{QC_2^2 a_2}{\sqrt{2\pi}\,\nu_1\beta^2(\beta + i\alpha c)} - \frac{P}{\sqrt{2\pi}\,i\alpha(\beta + i\alpha c)},$$

Thay (2.17) vào (2.15) ta được:

$$\sigma^{(2)} = 0,$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \frac{Q}{i(2\pi)^2} \int\int \frac{C_1^2C_2^2 i\alpha}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^2(\beta + i\alpha c)} e^{-\nu_2 y + i\alpha x + \beta t} d\alpha d\beta, \tag{2.18}$$

$$\sigma_{yy}^{(2)} = -\frac{P}{2}[H(x - ct + y) + H(x - ct - y)] +$$

$$\frac{Q}{i(2\pi)^2} \int\int \left\{ \left[\frac{2C_1^2C_2^2\alpha^2\nu_2}{(C_1^2 - C_2^2)a_2} - \frac{C_2^2 a_2}{\nu_1} \right] \mathrm{ch}\, i\alpha y - \right.$$

$$\left. - \frac{2C_1^2C_2^2\alpha^2\nu_2}{(C_1^2 - C_2^2)a_2} e^{-\nu_2 y} \right\} \frac{e^{i\alpha x + \beta t}}{\beta^2(\beta + i\alpha c)} d\alpha d\beta.$$

Cuối cùng ta được nghiệm của bài toán ở gần đúng thứ nhất:

$$\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = \frac{Q}{i(2\pi)^2} \int\int \frac{e^{-\nu_1 y + i\alpha x + \beta t}}{\nu_1(\beta + i\alpha c)} d\alpha d\beta, \tag{2.19}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} = \frac{Q}{i(2\pi)^2} \int\int \frac{C_1^2C_2^2 i\alpha}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^2(\beta + i\alpha c)} (e^{-\nu_2 y} - e^{-\nu_1 y}) e^{i\alpha x + \beta t} d\alpha d\beta,$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(2)} = -\frac{P}{2}[H(x - ct + y) + H(x - ct - y)] +$$

$$\frac{Q}{i(2\pi)^2} \int\int \left\{ \left[\frac{2C_1^2C_2^2\alpha^2\nu_2}{(C_1^2 - C_2^2)a_2} - \frac{C_2^2 a_2}{\nu_1} \right] \mathrm{ch}\, i\alpha y - \right.$$

$$\left. \frac{2C_1^2C_2^2\alpha^2\nu_2}{(C_1^2 - C_2^2)a_2} e^{-\nu_2 y} + \frac{C_2^2 a_2}{\nu_1} e^{-\nu_1 y} \right\} \frac{e^{i\alpha x + \beta t}}{\beta^2(\beta + i\alpha c)} d\alpha d\beta.$$

NHẬN XÉT

— Nghiệm ở gần đúng thứ nhất (2.19) bằng nghiệm ở gần đúng thứ không (1.8) cộng thêm một lượng do sự phi tuyến của mô hình vật liệu gây ra.

— Theo ý nghĩa cơ học, khi c_s lớn vô hạn, nghĩa là môi trường được xét luôn luôn làm việc trong giới hạn đàn hồi, thì nghiệm ở gần đúng thứ không (1.8) là nghiệm của bài toán. Ở đây có sự phù hợp, vì theo (2.7) trong trường hợp này $a = 0$ và do đó theo (2.13) $Q \equiv 0$. Nghiệm (2.19) trở về nghiệm (1.8).

Muốn có những gần đúng tiếp theo, có thể làm tương tự, nhưng biểu thức nghiệm sẽ phức tạp dần lên và quá trình tính toán giải tích không tiếp tục mãi được, sẽ đến một gần đúng nào đó phải bắt đầu quá trình tính toán bằng số.

Nhân dịp này tác giả chân thành cám ơn giáo sư I Đào Huy Bích đã hướng dẫn, giúp đỡ tận tình trong quá trình viết bài báo này, cũng như những bài báo khác đã được đăng trên tạp chí Cơ học.

Địa chỉ :

Trường Đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 1/8/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. НОВАЦКИЙ В. К. Волновые задачи теории пластичности. Изд. Мир, Москва, 1978
2. НГО ДИНЬ ЧАН. Распространение упруго пластических волн в полуплоскости при воздействии переменной нагрузки, движущейся вдоль её границы. Вестник МГУ №2, 1978.
3. БЫКОВЦЕВ Г. И., ВЕРВЕЙКО Н. Д., ЗИНОВЬЕВ Н. М. Применение метода характеристик к решению задачи о движение ступенчатом нагрузки. Материалы V всесоюзного симпозиума « распространение упругих и упруго пластических волн » Алма-Ата, 1973.
4. NGUYỄN ĐĂNG BÍCH. Về một phương pháp xác định nghiệm bài toán phẳng động đàn hồi dẻo. Tạp chí Cơ học số 2, 1985.

SUMMARY

DOING THE PLANE DYNAMIC ELASTO-PLASTIC PROBLEM BY THE METHOD OF ELASTIC ROOT

In this paper, the method of elastic root used to answer the plane dynamic elasto plastic problem, for the half of plane made by material according to the theory of small elasto-plastic deformation, on the boundary supported degree loading of motion with over sound speed, root in the first step given analytical form.

THÔNG BÁO

Để đảm bảo hoạt động của Hội đồng biên tập tạp chí Cơ học, vừa qua Viện Khoa học Việt Nam đã ra quyết định miễn nhiệm ủy viên Hội đồng biên tập cho hai đồng chí Đỗ Sơn và Lều Thọ Trình vì lý do đi công tác xa trong thời gian dài, đồng thời bổ sung hai đồng chí Phạm Văn Ninh và Trần Dương Hiền vào Hội đồng biên tập.