Tạp chí Cơ học T. VII, 1985 Số 4 (Trang 1-8)

NHỮNG PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG GIẢI BÀI TOÁN BIÊN PHẲNG CỦA LÝ THUYẾT DẺO KHI ĐẶT TẢI PHỨC TẠP

ĐÀO HUY BÍCH

Trong [2] tác giả đề xuất một phương pháp tựa như phương pháp tham số đàn hồi thay đổi để giải bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp. Phương pháp tựa như phương pháp nghiệm đàn hồi để giải bài toán này trình bày trong [1]. Ở đây nêu một số phương pháp gần đúng khác và đề cập đến sự hội tụ của các phương pháp chính.

§1. BÀI TOÁN BIÊN VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI GẦN ĐÚNG

Quá trình biến dạng đàn dẻo của vật thể được chia thành các giai đoạn nhỏ, ở mỗi giai đoạn bài toán biên được thiết lập như sau: Cho biết tại thời điểm đầu t_o của giai đoạn đang xét các giá trị ứng suất $\sigma_{ij}(x, t_o)$ biến dạng $\varepsilon_{ij}(x, t_o)$ và chuyển dịch $u_i(x, t_o)$, tức là biết cường độ ứng suất $\sigma_u(x, t_o)$ và độ dài cung $s(x, t_o)$, cần xác định tốc độ biến thiên của các đại lượng trên $\dot{\sigma}_{ij}(x, t_o)$, $\dot{\varepsilon}_{ij}(x, t_o)$, $\dot{u}_i(x, t_o)$ cũng tại thời điểm này thỏa mãn các phương trình sau [2]

$$\partial\dot{\sigma}_{ij}/\partial x_j + \rho\dot{K}_i = 0, \qquad x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial\dot{u}_i/\partial x_j + \partial\dot{u}_j/\partial x_i\right), \quad x \in \overline{\Omega} \tag{1.2}$$

$$\dot{S}_{ij} = \left[-\frac{2\sigma_u f(\theta, s)}{3\sin\theta}\delta_{ik}\delta_{jm} + \left(\frac{\sigma_u'}{\cos\theta} + \frac{\sigma_u f}{\sin\theta}\right)\frac{S_{km}S_{ij}}{\sigma_u^2}\right]\dot{e}_{km} = B_{ijkm}\dot{e}_{km} \tag{1.3}$$

$$\dot{\sigma} = 3K\dot{e}, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{1.4}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}n_j = \dot{F}_i, \quad x \in S_\sigma; \tag{1.5}$$

$$\dot{u}_i = 0, \qquad x \in S_u \tag{1.6}$$

trong đó $\dot{K}_i$, $\dot{F}_i$ là biến thiên của lực khối và lực mặt cho trước, $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$, $S_u \cup S_\sigma = S$,

$$S_u \cap S_\sigma = \varnothing, \ \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{e}\delta_{ij}, \dot{\sigma}_{ij} = \dot{S}_{ij} + \dot{\sigma}\delta_{ij}, \ \sigma_u^2 = \frac{3}{2}S_{km}S_{km},$$

$$\theta = \arccos S_{ij}\dot{e}_{ij}/\sigma_u v_u, \ v_u^2 = \frac{2}{3}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}$$

Hệ thức (1.3) và (1.4) có thể viết gộp lại thành

$$\dot{\sigma}_{ij} = B_{ijkm}\dot{e}_{km} + 3K\dot{e}\delta_{ij} = \left[B_{ijkm} + (K\delta_{ij} - B_{ijnn})\delta_{km}\right]\dot{\varepsilon}_{km} = D_{ijkm}\dot{\varepsilon}_{km} \tag{1.7}$$

Bài toán (A) là phi tuyến đối với tốc độ vì có chứa θ. Ý đồ chung của các phương pháp là ở mỗi gần đúng giải một bài toán tuyến tính. Biết rằng với quá trình có độ cong trung bình

$$f(\theta, s) = -k(s)\sin\theta; \quad \sigma_u'(\theta, s) = \Phi'(s)\cos\theta \tag{1.8}$$

hệ thức (1.3) đưa về dạng liên hệ tuyến tính giữa các tốc độ

$$\dot{S}_{ij} = \left[\frac{2}{3}\sigma_u k(s)\,\delta_{ik}\delta_{jm} + (\Phi'(s) - \sigma_u k(s))\,S_{ij}S_{km}/\sigma_u^2\right]\dot{e}_{km} = C_{ijkm}\dot{e}_{km} \tag{1.9}$$

Khi đó ta có bài toán (B) tuyến tính gồm các phương trình (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) (1.6) và (1.9), tựa như bài toán đàn hồi tuyến tính, không thuần nhất và không đẳng hướng, nhưng đối với tốc độ. Nghiệm của bài toán (B) sẽ là gần đúng ban đầu cho các phương pháp trình bày sau này.

Bài toán (A) cũng tương đương với bài toán biến phân

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}d\Omega = \int_{\Omega} \rho\dot{K}_i\delta\dot{u}_i d\Omega + \int_{S_\sigma} \dot{F}_i\delta\dot{u}_i dS \tag{1.10}$$

trong đó $\delta\dot{u}_i$ là biến phân của tốc độ chuyển dịch thỏa mãn điều kiện $\delta\dot{u}_i = 0$ trên S_u.

Xét biểu thức

$$C_{ijkm}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{km} = \frac{2}{3}\sigma_u k\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij} + (\Phi' - \sigma_u k)(S_{ij}\dot{e}_{ij}/\sigma_u)^2 =$$

$$[(1 - \cos^2\theta)\sigma_u k + \Phi'\cos^2\theta]\,\frac{2}{3}\,\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}.$$

Dễ dàng chứng minh được

$$\frac{2}{3}\Phi'\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij} < C_{ijkm}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{km} < \frac{2}{3}\sigma_u k\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij} \tag{1.11}$$

với $\Phi' > 0$; $k > 0$; $\sigma_u k > \Phi'$. Vậy C_{ijkm} là xác định dương, giới nội và đối xứng.

Đặt $$B_{ijkm}(\sigma_u, \theta, S) = C_{ijkm}(\sigma_u, S) - B^*_{ijkm}(\sigma_u, \theta, S) \tag{1.12}$$

Vậy $$B^*_{ijkm} = \frac{2}{3}\sigma_u\left(k + \frac{f}{\sin\theta}\right)\delta_{ik}\delta_{jm} +$$
$$+\left[(\Phi' - \sigma_u k) - \left(\frac{\sigma_u'}{\cos\theta} + \frac{\sigma_u f}{\sin\theta}\right)\right]\frac{S_{ij}S_{km}}{\sigma_u^2}, \tag{1.13}$$

Hệ thức (1.3) viết dưới dạng

$$\dot{S}_{ij} = B_{ijkm}\dot{e}_{km} = (C_{ijkm} - B^*_{ijkm})\,\dot{e}_{km} \tag{1.14}$$

Các phương pháp gần đúng giải bài toán (A) với phương trình xác định (1.3) có dạng (1.14), ở gần đúng ban đầu lấy $B^*_{ijkm} = 0$.

a) Phương pháp tựa như phương pháp nghiệm đàn hồi [1].

Ký hiệu chỉ số (n) là gần đúng thứ n. Các phương trình của bài toán (A) ở gần đúng này có được bằng cách đặt chỉ số (n) vào các đại lượng $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{u}_i$ trong các phương trình (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (1.6), tức là

$$\partial\dot{\sigma}_{ij}^{(n)}/\partial x_j + \rho\dot{K}_i = 0, \quad x \in \Omega;$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\partial\dot{u}_i^{(n)}/\partial x_j + \partial\dot{u}_j^{(n)}/\partial x_i\right), \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{1.15}$$

$$\dot{\sigma}^{(n)} = 3K\dot{e}^{(n)},\ x \in \overline{\Omega};\quad \dot{\sigma}_{ij}^{(n)}n_j = \dot{F}_i,\ x \in S_\sigma;\quad \dot{u}_i^{(n)} = 0,\ x \in S_u.$$

Còn phương trình (1.3), hay là (1.14) bằng phương pháp này có dạng

$$\dot{S}_{ij}^{(n)} = C_{ijkm}\dot{e}_{km}^{(n)} - B^{*(n-1)}_{ijkm}\dot{e}_{km}^{(n-1)} \tag{1.16}$$

Vì các đại lượng ở gần đúng thứ (n − 1) đã biết, nên ta nhận được bài toán tuyến tính (B) với tham số đàn hồi C_{ijkm} không đổi, còn lực mặt và lực khối thay đổi.

b) Phương pháp tựa như phương pháp tham số đàn hồi thay đổi [2]

Ở gần đúng thứ (n) ta cũng nhận được các phương trình (1.15), còn phương trình (1.14) bằng phương pháp này có dạng

$$\dot{S}_{ij}^{(n)} = (C_{ijkm} - B_{ijkm}^{*(n-1)})\dot{e}_{km}^{(n)} \tag{1.17}$$

Ta sẽ nhận được bài toán tuyến tính (B) với lực khối và lực mặt không đổi, nhưng tham số đàn hồi không phải là C_{ijkm}, mà là $C_{ijkm} - B_{ijkm}^{*(n-1)}$ thay đổi ở mỗi bước lặp.

c) Phương pháp Ritsơ và phương pháp sai phân hữu hạn kết hợp với phương pháp gần đúng liên tiếp.

Thực chất vấn đề ở đây là ở mỗi bước lặp ta có bài toán tuyến tính và giải bài toán đó bằng phương pháp Ritsơ hoặc phương pháp sai phân hữu hạn.

Để giải theo các phương pháp này ta sử dụng phương trình biến phân (1.10).

Vì hệ thức (1.3) phi tuyến, nên từ (1.10) không suy ra tính dừng của một phiếm hàm nào đấy.

Để khắc phục khó khăn ta dùng phương pháp gần đúng liên tiếp.

Ở gần đúng ban đầu lấy f, σ_u theo (1.8), khi đó $B_{ijkm}^{*} = 0$, $B_{ijkm}^{(1)} = C_{ijkm}$, hệ thức (1.3) trở thành hệ thức tuyến tính (1.9).

Ta được:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkm}\dot{e}_{km} + 3K\dot{e}\delta_{ij} =$$

$$= \left[C_{ijkm} + \left(K - \frac{2}{9}\sigma_{uk}\right)\delta_{ij}\delta_{km}\right]\dot{\varepsilon}_{km} = D_{ijkm}\dot{\varepsilon}_{km}$$

Thay vào phương trình (1.10) cho ta

$$\delta\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega} D_{ijkm}^{(1)}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{km}\,d\Omega - \int_{\Omega}\rho\dot{K}_i\dot{u}_i\,d\Omega - \int_{S_\sigma}\dot{F}_i\dot{u}_i\,dS\right] = 0$$

Trạng thái thực làm cực trị phiếm hàm

$$I = \frac{1}{2}\int_{\Omega} D_{ijkm}^{(1)}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{km}\,d\Omega - \int_{\Omega}\rho\dot{K}_i\dot{u}_i\,d\Omega - \int_{S_\sigma}\dot{F}_i\dot{u}_i\,dS. \tag{1.18}$$

Giải bài toán này bằng phương pháp Ritsơ. Đặt

$$\dot{u}_i = \sum_{\alpha} a_{i\alpha} f_{i\alpha}(x, t_o) \tag{1.19}$$

trong đó $a_{i\alpha}$ là các hằng số tùy ý phải xác định, còn $f_{i\alpha}$ là các hàm độc lập được chọn sao cho thỏa mãn điều kiện (1.6) trên S_u. Đặt vào biểu thức của I(1.18) ta được biểu thức bậc hai đối với $a_{i\alpha}$

$$I = \sum_{\alpha}\left\{\frac{1}{8}\int_{\Omega} D_{ijkm}^{(1)}\left(a_{i\alpha}\frac{\partial f_{i\alpha}}{\partial x_j} + a_{j\alpha}\frac{\partial f_{j\alpha}}{\partial x_i}\right)\left(a_{k\alpha}\frac{\partial f_{k\alpha}}{\partial x_m} + a_{m\alpha}\frac{\partial f_{m\alpha}}{\partial x_k}\right)d\Omega - \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega}\rho\dot{K}_i a_{i\alpha} f_{i\alpha}\,d\Omega - \int_{S_\sigma}\dot{F}_i a_{i\alpha} f_{i\alpha}\,dS\right\}$$

Điều kiện cực trị của I dẫn đến hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định $a_{i\alpha}$, từ đó xác định được $\dot{u}_i^{(1)}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$ và $\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}$. Tiếp đến xác định $\theta^{(1)}$. Ở gần đúng thứ hai đặt $\theta = \theta^{(1)}$ trong hệ thức (1.7); ta có $D_{ijkm}^{(2)}$ trở thành hàm đã biết không phụ thuộc $\dot{\varepsilon}_{mn}$. Phương trình biến phân (1.10) sẽ dẫn đến

$$\delta\left[\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} D^{(2)}_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km}d\Omega - \int\limits_{\Omega}\rho K_i \dot{u}_i d\Omega - \int\limits_{S_\sigma} F_i u_i dS\right] = 0$$

Đặt (1.19) vào đây và tiến hành mọi bước tính như trên ta nhận được giá trị của các đại lượng cần tìm ở gần đúng thứ hai.

Tương tự ta xây dựng các gần đúng tiếp theo.

Rõ ràng, tại mỗi gần đúng ta có bài toán về cực trị của phiếm hàm năng lượng. Cũng có thể giải bài toán này bằng phương pháp khác.

Chẳng hạn, sử dụng vào đây phương pháp sai phân hữu hạn. Chia miền vật chiếm bằng lưới có bước h. Tại mỗi gần đúng thay trong biểu thức dạng (1.18) các hàm phải tìm và các đạo hàm của chúng bằng giá trị của các hàm này tại các nút lưới, ta nhận được I như hàm của các giá trị tốc độ chuyển dịch tại các nút. Tốc độ chuyển dịch thực làm cực tiểu phiếm hàm I. Cho các đạo hàm của I theo các đối số của nó bằng không, ta nhận được hệ các phương trình đại số tuyến tính để xác định các giá trị nút của các hàm phải tìm.

d) Phương pháp gần đúng liên tiếp kết hợp với phương pháp Phần tử hữu hạn.

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán biên của lý thuyết dẻo đã được xét đến trong nhiều công trình (chẳng hạn [3, 4,...])

Ở đây do liên hệ phi tuyến giữa tốc độ ứng suất và tốc độ biến dạng ta dùng phương pháp này kết hợp với phương pháp gần đúng liên tiếp.

Nhằm mục đích đó chia miền thành các phần tử, tại biên của chúng tách ra các điểm nút. Các hàm cần tìm của tốc độ chuyển dịch bên trong mỗi phần tử được xấp xỉ theo công thức

$$\dot{u}_i^{(N)} = \Phi_k^{(N)}\dot{U}_{ik}^{(N)} \tag{1.20}$$

trong đó N — số thứ tự phần tử ($N = 1 \div N_0$), $i = 1, 2, 3$ — hướng các trục tọa độ, k — số thứ tự nút ($k = 1 \div K_0$, tổng theo k từ 1 đến K_0), $\Phi_k^{(N)}$ — các hàm liên tục của tọa độ gọi là hàm dạng của phần tử N, tương ứng với nút k, $\dot{U}_{ik}^{(N)}$ — tốc độ chuyển dịch của nút k phần tử N theo hướng i.

Theo công thức Côsi tính biến dạng

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(N)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_k^{(N)}}{\partial x_i}\dot{U}_{jk}^{(N)} + \frac{\partial\Phi_k^{(N)}}{\partial x_j}\dot{U}_{ik}^{(N)}\right) = \frac{1}{2}\left(B_{ik}^{(N)}\dot{U}_{jk}^{(N)} + B_{jk}^{(N)}\dot{U}_{ik}^{(N)}\right) \tag{1.21}$$

trong đó ký hiệu $B_{ik}^{(N)} = \partial\Phi_k^{(N)}/\partial x_i$

Vì $\Phi_k^{(N)}$ không phụ thuộc vào tốc độ chuyển dịch của nút, nên biến phân tốc độ chuyển dịch cho ta

$$\delta\dot{u}_i^{(N)} = \Phi_k^{(N)}\delta\dot{U}_{ik}^{(N)}; \qquad \delta\dot{\varepsilon}_{ij}^{(N)} = \frac{1}{2}\left(B_{ik}^{(N)}\delta\dot{U}_{jk}^{(N)} + B_{jk}^{(N)}\delta\dot{U}_{ik}^{(N)}\right) \tag{1.22}$$

Đặt các biểu thức (1.7), (1.22) vào phương trình biến phân (1.10) ta được

$$\sum_{N=1}^{N_0}\left[\int\limits_{\Omega_N} D_{ijps}^{(N)} B_{pk}^{(N)}\dot{U}_{sk}^{(N)} B_{jm}^{(N)}\delta\dot{U}_{im}^{(N)} d\Omega - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\Omega_N}\rho\dot{K}_i^{(N)}\Phi_m^{(N)}\delta\dot{U}_{im}^{(N)} d\Omega - \int\limits_{S_{\sigma N}} \dot{F}_i^{(N)}\Phi_m^{(N)}\delta\dot{U}_{im}^{(N)} dS\right] = 0$$

Do điều kiện biến động học các đại lượng $\delta\dot{U}_{im}^{(N)}$ độc lập tuyến tính, nên

$$\left(\int\limits_{\Omega_N} D_{ijps}^{(N)}B_{pk}^{(N)}B_{jm}^{(N)}d\Omega\right)\dot{U}_{sk}^{(N)} - \int\limits_{\Omega_N}\rho\dot{K}_i^{(N)}\Phi_m^{(N)}d\Omega - \int\limits_{S_{\sigma N}}\dot{F}_i^{(N)}\Phi_m^{(N)}dS = 0 \tag{1.23}$$

trong trường hợp tổng quát

$$i, j, r, s = 1 \div 3, \ k, m = 1 \div K_o, \quad N = 1 \div N_o$$

từ đó nhận được $3K_oN_o$ phương trình để xác định tốc độ chuyển dịch của các nút. Nhưng số các phương trình độc lập nhỏ hơn $3K_oN_o$, vì mỗi nút có thể thuộc về một số phần tử nào đấy.

Vì D_{ijps} phụ thuộc vào θ, tức là phụ thuộc phi tuyến vào $\dot{U}_{ik}^{(N)}$, hệ (1.23) là hệ các phương trình phi tuyến đối với $\dot{U}_{ik}^{(N)}$.

Ký hiệu:

$$K_{imsk}^{(N)} = \int_{\Omega_N} D_{ijps}^{(N)} B_{pk}^{(N)} B_{jm}^{(N)} d\Omega ; \quad \dot{R}_{im}^{(N)} = \int_{\Omega_N} \rho \dot{K}_i^{(N)} \Phi_m^{(N)} d\Omega + \int_{S_{\sigma_N}} \dot{F}^{(N)} \Phi_m^{(N)} dS$$

ta đưa (1.23) về dạng sau

$$K_{imsk}^{(N)} \dot{U}_{sk}^{(N)} - \dot{R}_{im}^{(N)} = 0 \tag{1.24}$$

Ma trận K gọi là ma trận cứng đàn – dẻo

Ta sử dụng phương pháp gần đúng liên tiếp vào hệ phi tuyến (1.24).

Ở gần đúng thứ nhất đặt f, σ_u theo (1.8) vào D_{ijps}, tức là ta có hệ thức đối vớ quá trình biến dạng có độ cong trung bình các hệ số $K_{imsk}^{(N)}$ trở thành các đại lượng xác định. Khi đó hệ (1.24) là hệ phương trình đại số tuyến tính, có thể giải được đối với $\dot{U}_{sk}^{(N)}$

$$\dot{U}_{sk}^{(N)} = L_{skjm}^{(N)} \dot{R}_{im}^{(N)}$$

trong đó L gọi là ma trận mềm của vật thể.

Biết $\dot{U}_{sk}^{(N)}$ ở gần đúng thứ nhất, theo (1.20) xác định tốc độ chuyển dịch $\dot{u}_i^{(N)}$, còn theo (1.21) xác định tốc độ biến dạng $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(Z)}$. Từ các giá trị này tính

$$\theta^{(1)} = \arccos (S_{ij} \dot{e}_{ij}^{(1)} / \sigma_u v_n^{(1)})$$

Ở gần đúng thứ hai, đặt $\theta = \theta^{(1)}$ trong D_{ijps} và tiến hành các tính toán cần thiết ta lại nhận được hệ các phương trình đại số tuyến tính cho phép xác định giá trị tốc độ chuyển dịch của các nút. Theo (1.20), (1.21) xác định $\dot{u}_i^{(N)}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(N)}$ và sau đó xác định giá trị $\theta^{(2)}$.

Tương tự xây dựng các gần đúng tiếp theo.

§2. SỰ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM ĐÀN HỒI VÀ PHƯƠNG PHÁP THAM SỐ ĐÀN HỒI THAY ĐỔI

Gọi $$V = \{ v : v \in (L_2)^3, \ \dot{\varepsilon}_{ij}(v) \in L_2, \ v|_{S_u} = 0 \}$$

là không gian Hilbert với tích vô hướng sau

$$(u,v)_V = \int_\Omega C_{ijkm} \dot{e}_{ij}(u) \dot{e}_{km}(v) d\Omega + K \int_\Omega \dot{\varepsilon}_{kk}(u) \dot{\varepsilon}_{kk}(v) d\Omega \tag{2.1}$$

Chuẩn $\|\cdot\|_V$ sinh bởi tích vô hướng này có dạng

$$\|u\|_V^2 = \int C_{ijkm} \dot{e}_{ij}(u) \dot{e}_{ij}(v) d\Omega + K \int (\dot{\varepsilon}_{kk}(u))^2 d\Omega \tag{2.2}$$

Do tính chất của C_{ijkm} biểu thức này hoàn toàn thỏa mãn các tính chất của chuẩn. Ta sẽ xét sự hội tụ của hai phương pháp giải gần đúng theo chuẩn này.

Hàm vectơ $u = \mathbf{u(x)}$ (bỏ dấu chấm) được gọi là nghiệm suy rộng của bài toán A) nếu $u \in V$ thỏa mãn phương trình

$$\int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}(u) \dot{\varepsilon}_{ij}(v) d\Omega = \int_\Omega \rho \dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S_\sigma} \dot{F}_i v_i dS \tag{2.3}$$

với mọi vectơ — hàm $v \in V$
hay là

$$\int_{\Omega} \dot{S}_{ij}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega + K\int_{\Omega} \dot{\varepsilon}_{kk}(u)\dot{\varepsilon}_{kk}(v)d\Omega = \int_{\Omega} \rho\dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S\sigma} \dot{F}_i v_i dS$$

Dễ dàng thấy rằng phương trình (2.3) nhận được từ (A) bằng cách nhân phương trình — vectơ (1.1) với $v \in V$ rồi tích phân trên toàn thể tích Ω tính đến các hệ thức (1.2), (1.5), (1.6).

Thay biểu thức của $\dot{S}_{ij}$ theo (1.14) vào đây ta được

$$\int_{\Omega} C_{ijkm} \dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega + K\int_{\Omega} \dot{\varepsilon}_{kk}(u)\dot{\varepsilon}_{kk}(v)d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \rho\dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S\sigma} \dot{F}_i v_i dS + \int_{\Omega} B^{*}_{ijkm}\dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega \qquad (2.4)$$

với mọi vectơ — hàm $v \in V$

Giả sử thỏa mãn điều kiện [5]

$$\rho\dot{K}_i \in L_p(\Omega),\ P > \frac{6}{5}\ ;\ \dot{F}_i \in L_q(S\sigma),\ q > \frac{4}{3}$$

nhờ bất đẳng thức Holder các tích phân thứ nhất và thứ hai bên vế phải tồn tại.

Các tích phân còn lại trong (2.4) tồn tại do tính chất của không gian V và tính giới nội của các hàm tham gia dưới dấu tích phân.

Bây giờ ta lần lượt chứng minh dãy $u^{(n)}_i \in V$, xác định từ hệ phương trình (1.15) và (1.16) (phương pháp nghiệm đàn hồi) hoặc từ hệ phương trình (1.15) và (1.17) (phương pháp tham số đàn hồi thay đổi) hội tụ về nghiệm suy rộng của phương trình (2.4).

Nhờ (2.1) ta viết phương trình (2.4) dưới dạng

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \rho\dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S\sigma} \dot{F}_i v_i dS + \int_{\Omega} B^{*}_{ijkm}\dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega,\ \forall v \in V \qquad (2.5)$$

a) Sự hội tụ của phương pháp nghiệm đàn hồi.

Nhờ (1.15), (1.16) và (2.5) ta viết hệ thức tương ứng với hiệu của hai gần đúng liên tiếp

$$(u^{(n+1)} - u^{(n)}, v)_V = \int_{\Omega} (B^{*(n)}_{ijkm}\dot{e}^{(n)}_{km}(u) - B^{*(n-1)}_{ijkm}\dot{e}^{(n-1)}_{km}(u))\dot{e}_{ij}(v)d\Omega$$

Từ đây có thể viết bình phương của chuẩn đối với $u^{(n+1)} - u^{(n)}$:

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|^2_V = \int_{\Omega} [B^{*(n)}_{ijkm}\ \dot{e}^{(n)}_{km}(u) - B^{*(n-1)}_{ijkm}\ \dot{e}^{(n-1)}_{km}(u)] \times$$

$$\times [\dot{e}^{(n+1)}_{ij}(u) - \dot{e}^{(n)}_{ij}(u)]\ d\Omega$$

Theo công thức Lagrăng ta được

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|^2_V =$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \dot{e}_{ps}} [B^{*}_{ijkm}\ \dot{e}_{km}]\Big|_{\dot{e}^{*}_{ps}} (\dot{e}^{(n)}_{ps} - \dot{e}^{(n-1)}_{ps})(\dot{e}^{(n+1)}_{ij} - \dot{e}^{(n)}_{ij})d\Omega \qquad (2.6$$

Đặt $\psi = \sigma_u\left(k(S) + \frac{f}{\sin\theta}\right),\ \varphi = (\Phi' - \sigma_u k) - \left(\frac{\sigma_u}{\cos\theta} + \frac{\sigma_u f}{\sin\theta}\right)$

biểu thức B^*_{ijkm} theo (1.13) sẽ có dạng

$$B^*_{ijkm} = \frac{2}{3}\psi\delta_{ik}\delta_{jm} + \varphi S_{ij}S_{km}/\sigma_u^2 \tag{2.7}$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki và bất đẳng thức tam giác, thực hiện các phép tính trong (2.6), chú ý đến (2.7) ta đưa (2.6) về đánh giá sau

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_V^2 \leqslant \int_\Omega \frac{2}{3}\Big\{|\psi^*| + |\varphi^*| + \left|\frac{1}{\sin\theta^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right|(1+\cos\theta^*) +$$

$$+\left|\frac{1}{\sin\theta^*}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta}\right||(1+\cos\theta^*)\cos\theta^*|\Big\}\,|\dot e_{ij}^{(n)}(u) - \dot e_{ij}^{(n-1)}(u)||\dot e_{ij}^{(n+1)}(u) - \dot e_{ij}^{(n)}(u)|\,d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in\Omega}\frac{1}{\Phi'}\Big\{|\psi^*| + |\varphi^*| + \left|\frac{1}{\sin\theta^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right|(1+\cos\theta^*) +$$

$$+\left|\frac{1}{\sin\theta^*}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta}\right|(1+\cos\theta^*)\cos\theta^*\Big\}\int_\Omega \frac{2}{3}\Phi'|\dot e_{ij}^{(n)} - \dot e_{ij}^{(n-1)}|\,|\dot e_{ij}^{(n+1)} - \dot e_{ij}^{(n)}|\,d\Omega$$

Dấu (*) biểu thị giá trị trung gian giữa (n) và (n − 1).

Sử dụng bất đẳng thức (1.11) và biểu thức của chuẩn ta đi đến đánh giá

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_V^2 \leqslant q\|u^{(n)} - x^{(n-1)}\|_V\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_V$$

hay là

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_V \leqslant q\,\|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_V.$$

Vậy nếu

$$q = \max_{x\in\Omega}\Big\{|\psi^*| + |\varphi^*| + \left|\frac{1}{\sin\theta^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right|(1+\cos\theta^*) +$$

$$+\left|\frac{1}{\sin\theta^*}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta}\right||(1+\cos\theta^*)\cos\theta^*|\Big\}\frac{1}{\Phi'} < 1 \tag{2.8}$$

bảo đảm dãy $u^{(n)}$ hội tụ về nghiệm suy rộng của bài toán. Điều kiện (2.8) đã được xét đến trong công trình [1].

b) Sự hội tụ của phương pháp tham số đàn hồi thay đổi.

Theo phương pháp này ta viết được bình phương của chuẩn đối với $u^{(n+1)} - u^{(n)}$ như sau

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_V^2 = \int_\Omega (B^{*(n)}_{ijkm}\,\dot e_{km}^{(n+1)} - B^{*(n-1)}_{ijkm}\,\dot e_{km}^{(n)})(\dot e_{ij}^{(n+1)} - \dot e_{ij}^{(n)})\,d\Omega =$$

$$= \int_\Omega [B^{*(n)}_{ijkm}(\dot e_{km}^{(n+1)} - \dot e_{km}^{(n)}) + (B^{*(n)}_{ijkm} - B^{*(n-1)}_{ijkm})\dot e_{km}^{(n)}](\dot e_{ij}^{(n+1)} - \dot e_{ij}^{(n)})\,d\Omega$$

Thực hiện các phép tính và lập luận tương tự ta đi đến đánh giá

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_V^2 \leqslant \int_\Omega \frac{2}{3}(|\psi^{(n)}| + |\varphi^{(n)}|)|\dot e_{ij}^{(n+1)}(u) - \dot e_{ij}^{(n)}(u)| \times$$

$$|\dot e_{ij}^{(n)}(u) - \dot e_{ij}^{(n-1)}(u)|\,d\Omega + \int_\Omega \frac{2}{3}\Big\{\left|\frac{1}{\sin\theta^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right|(1+\cos\theta^*) +$$

$$+\left|\frac{1}{\sin\theta^*}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta}\right||(1+\cos\theta^*)\cos\theta^{(n)}|\Big\}|\dot e_{ij}^{(n)} - \dot e_{ij}^{(n-1)}||\dot e_{ij}^{(n+1)} - \dot e_{ij}^{(n)}|\,d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in\Omega}\frac{|\psi^{(n)}| + |\varphi^{(n)}|}{\Phi'}\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_V^2 +$$

$$+ \max_{x \in \Omega} \frac{1}{\Phi'} \left\{ |1 + \cos\theta^*| \left(\left| \frac{1}{\sin\theta^*} \frac{\varphi\psi^*}{\varphi\theta} \right| + \left| \frac{1}{\sin\theta^*} \frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta} \right| |\cos\theta^{(n)}| \right) \right\} \times$$

$$\times \| u^{(n)} - u^{(n-1)} \|_V \| u^{(n+1)} - u^{(n)} \|_V.$$

Từ đây suy ra $\| u^{(n+1)} - u^{(n)} \|_V \leqslant q \| u^{(n)} - u^{(n-1)} \|_V$
trong đó nếu:

$$q = \frac{\max\limits_{x \in \Omega} \dfrac{1}{\Phi'} \left\{ |1 + \cos\theta^*| \left(\left| \dfrac{1}{\sin\theta^*} \dfrac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \right| + \left| \dfrac{1}{\sin\theta^*} \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial\theta} \right| |\cos\theta^{(n)}| \right) \right\}}{1 - \max\limits_{x \in \Omega} \dfrac{1}{\Phi'} \{ |\varphi^{(n)}| + |\psi^{(n)}| \}} < 1 \quad (2.9)$$

thì dãy $u^{(n)}$ hội tụ về nghiệm suy rộng của bài toán.

NHẬN XÉT

1. Dựa vào các tính chất của hàm vật liệu có thể thử lại điều kiện (2.8), (2.9)
2. Điều kiện buộc lên các hàm vật liệu của phương pháp tham số đàn hồi thay đổi chặt hơn phương pháp nghiệm đàn hồi
3. Về thực chất phương pháp lặp kết hợp với phương pháp biến phân, sai phân hữu hạn, phần tử hữu hạn trình bầy ở các mục trên là phương pháp tham số đàn hồi thay đổi.

Địa chỉ:
Trường Đại học Tổng hợp H.N

Nhận ngày 5/8/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ĐÀO HUY BÍCH, NGUYỄN CÔNG HỢP. Về sự hội tụ của một phương pháp gần đúng giải bài toán biên của lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí Cơ học Số 3, 1985.
2. ДАО ЗУЙ БИК. О приближенном методе решения краевой задачи теории пластичности при сложном нагружении. Изв. Сев. Кав. науч. цент. высш. школы. 1982.
3. БИРГЕР И.А. Общие алгоритмы решения задач теорий чпругости, пластичности и ползучести. Сб. Успехи механики деформируемых сред. Наука, 1975.
4. УМАНСКИЙ С. Э. Математическая модель и исследование алгоритмов решения упруго — пластических задач с применением теории течения на основе разностных и вариационных методов. Проблемы прочности № 9, 1975.
5. ВОРОВИЧ И.И., КРАСОВСКИЙ Ю.П. О методе упругих решений. ДАН. СССР, 126, № 4, 1959.

SUMMARY

APPROXIMATE METHODS FOR SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF PLASTICITY WITH COMPLEX LOADING

In order to solve the non — linear boundary value problem of the theory of plasticity with complex loading different approximate methods are proposed as the followings: method of elastic solution, method of — variable elastic — parameters, method of finite elements combined with iterate method and others. Those methods transfer non — linear problem to a set of linear problems, problems of the theory of elasto — plastic processes with middle curvature.

The convergence of these principal methods is considered.