Tạp chí cơ học T. VII, 1985 số 3 (trang 30 — 32)

MỘT QUAN ĐIỂM MỚI ĐỐI VỚI VIỆC THÀNH LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC HỆ CƠ HỌC

ĐỖ SANH

Khảo sát một hệ cơ học hôlônôm, vị trí của nó được xác định bằng các tọa độ hôlônôm q_i và chịu tác dụng của các lực không thế Q_i, $(i=\overline{1,n})$. Hàm Lagơrănggiơ của hệ: $L = T - \Pi$
trong đó:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{*}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} a_i^{*}\dot{q}_i + a^{*}, \quad \Pi = \Pi(t, q_i) \tag{1.1}$$

a_{ij}, a_i^{*}, a^{*} là các hàm đã cho của thời gian và các tọa độ hệ,
$\|a_{ij}^{*}\|$ — ma trận xác định dương.

Như đã biết, dưới tác dụng của các lực không thế Q_i $(i=\overline{1,n})$ phương trình chuyển động của hệ có dạng:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \; i=\overline{1,n} \tag{1.2}$$

Bây giờ xét trường hợp khi hệ chịu tác dụng các liên kết không hôlônôm dạng:

$$f_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n} b_{\alpha i}\ddot{q}_i + b_\alpha = 0, \; \alpha = \overline{1,r} \tag{1.3}$$

trong đó $b_{\alpha i}$, b_α là các đại lượng đã cho của thời gian, vận tốc và tọa độ hệ.

Theo nguyên lý phù hợp [1], phương trình chuyển động của hệ không hôlônôm (1.1) (1.3) dưới tác dụng của các lực không thế Q_i $(i=\overline{1,n})$ có thể viết trong dạng:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^{*}, \; i=\overline{1,n} \tag{1.4}$$

trong đó các phản lực liên kết $Q_i^{*}(i=\overline{1,n})$ thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$F_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i}Q_i^{*} + B^{\alpha} = 0, \; \alpha = \overline{1,r} \tag{1.5}$$

trong đó

$$B_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{n} b_{\alpha j}a_{ji}, \tag{1.6}$$

$$B_\alpha^* = \sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i} Q_i + B_\alpha, \qquad B_\alpha = \sum_{j=1}^{n} b_{\alpha j}\psi_j, \tag{1.7}$$

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left[\sum_{k,m=1}^{n}(k, m, j)\dot q_k \dot q_m + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_k^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ij}^*}{\partial t}\right)\dot q_k + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial t} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)\right]$$

$\|a_{ij}\|$ ma trận ngược của ma trận quán tính $\|a_{ij}^*\|$, nó cũng là ma trận xác định dương.

Như đã vạch ra [1, 2, 3], chuyển động của hệ (1.4) (1.5) là chưa xác định nếu không biết các tính chất của các liên kết (1,3)

Để bài toán được xác định, chúng ta sẽ khảo sát một lớp liên kết được gọi là phân lớp liên kết A có tính chất sau:

« Phương trình chuyển động của hệ với các liên kết thuộc phân lớp liên kết A, tại mỗi điểm của không gian pha mở rộng $\{t, q_i, \dot q_i\}$ là tối ưu so với phương trình chuyển động của hệ không liên kết theo nghĩa bình phương độ lệch là bé nhất ».

Nói khác đi, phương trình chuyển động của hệ với các liên kết thuộc phân lớp liên kết A có dạng (1.4) trong đó các phản lực liên kết Q_i^* $(i = \overline{1, n})$ làm cực tiểu hàm:

$$U = \frac{1}{2}\sum a_{ij} Q_i^* Q_j^* \tag{1.8}$$

trong điều kiện (1.5).

Rõ ràng chuyển động của cơ hệ với các liên kết thuộc phân lớp liên kết A được hoàn toàn xác định.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng phân lớp liên kết A trùng với lớp liên kết lý tưởng trong cơ học giải tích.

Thực vậy, giả sử các liên kết (1.3) thuộc phân lớp liên kết A, tức là phản lực liên kết của nó làm cực tiểu hàm (1.8) trong điều kiện (1.5).

Vì tại mỗi điểm của không gian pha mở rộng $\{t, q_i, \dot q_i\}$ các biến Q_i^* làm cực tiểu hàm (1.8), nên:

$$\delta U = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} Q_i^* \delta Q_j^* = 0 \tag{1.9}$$

trong đó các biến phân δQ_j^* $(j = \overline{1, n})$ thỏa mãn điều kiện :

$$\sum_{j=1}^{n} B_{\alpha j}\delta Q_j^* = 0, \ \alpha = \overline{1, r} \tag{1.10}$$

Từ (1.9) và (1.10) chúng ta nhận được:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} Q_i^* = \sum_{\alpha=1}^{r} \Lambda_\alpha B_{\alpha j}, \ j = \overline{1, n} \tag{1.11}$$

trong đó các Λ_α $(\alpha = \overline{1, r})$ là các nhân tử Lagơrăngiơ.

Khi thay biểu thức (1.6) của $B_{\alpha j}$ vào (1.11) và chú ý đến tính chất xác định dương của ma trận $\|a_{ij}\|$ ta có:

$$Q_i^* = \sum_{\alpha=1}^{r} \Lambda_\alpha b_{\alpha i}, \quad i = \overline{1,n} \tag{1.12}$$

Điều đó chứng tỏ rằng các liên kết (1.3) là lớp liên kết lý tưởng trong cơ học giải tích.

Ngược lại, giả sử các liên kết (1.3) thuộc lớp liên kết lý tưởng trong cơ học giải tích, tức phản lực của nó có dạng (1.12), ta sẽ chứng minh rằng các phản lực của chúng làm cực tiểu hàm (1.8).

Để chứng minh điều này, chúng ta xây dựng hàm:

$$U^* = U + \sum_{\alpha=1}^{r} \Lambda_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i} Q_i^* + B_\alpha \right) \tag{1.13}$$

trong đó các nhân tử Lagorăngiơ Λ_α ($\alpha = \overline{1, r}$) được xác định từ (1.12).

Chúng ta có:

$$\delta U^* = \delta U + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{r} \Lambda_\alpha B_{\alpha i} \delta Q_i^* \tag{1.14}$$

Khi thay

$$\delta U = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} Q_j^* \delta Q_i^*$$

và (1.6) vào (1.14) ta nhận được:

$$\delta U^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{\alpha=1}^{r} \Lambda_\alpha b_{\alpha i} - Q_i^* \right) \delta Q_j^* = 0 \tag{1.15}$$

dựa vào (1.12).

Như vậy các phản lực của liên kết lý tưởng theo nghĩa cơ học giải tích làm cực trị hàm (1.8) trong điều kiện (1.5).

Vì:

$$\delta^2 U^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \delta Q_i^* \delta Q_j^* \tag{1.16}$$

dựa vào tính chất xác định dương của ma trận $\|a_{ij}\|$, nên là dạng toàn phương xác định dương và hàm U^* đạt cực tiểu.

Kết quả đã đạt được ở trên dễ dàng nhận được khi tìm trực tiếp cực trị vướng của hàm (1.12), tức là dựa vào:

$$\frac{\partial U^*}{\partial Q_i^*} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(Q_j^* - \sum_{\alpha=1}^{r} \Lambda_\alpha b_{\alpha j} \right), \quad \left\| \frac{\partial^2 U^*}{\partial Q_i^* \partial Q_j^*} \right\| = \|a_{ij}\|. \tag{1.17}$$

Nếu các liên kết (1.3) thuộc lớp liên kết A thì từ : $\partial U^*/\partial Q_i^* = 0$

và $\|a_{ij}\|$ là ma trận xác định dương, ta có : $Q_i^* = \sum_{\alpha=1}^{r} \Lambda_\alpha b_{\alpha i}$

tức các liên kết (1.3) là lý tưởng theo nghĩa của cơ học giải tích.

Ngược lại, nếu liên kết (1.3) là lý tưởng theo nghĩa của cơ học giải tích [1, 3], ta có (1.12) và từ (1.17) ta có : $\partial U^*/\partial Q_i^* = 0$

và dựa vào tính chất xác định dương của ma trận $\|a_{ij}\|$: $\left\| \frac{\partial^2 U^*}{\partial Q_i^* \partial Q_j^*} \right\| = \|a_{ij}\|$

là ma trận xác định dương, nên các phản lực $Q_i^*(i = \overline{1, n})$ làm cực tiểu hàm U^*, tức làm cực tiểu hàm (1.8) trong điều kiện (1.5). Nói khác đi, các liên kết (1.3) thuộc phân lớp liên kết A.

Như vậy, bài toán thiết lập phương trình chuyển động của hệ với liên kết không hôlônôm lý tưởng dẫn đến bài toán qui hoạch toán học cổ điển.

Cần chú ý rằng phương pháp trình bày ở trên vẫn có hiệu lực đối với hệ hôlônôm có liên kết.

KẾT LUẬN

1. Với quan điểm của lý thuyết điều khiển tối ưu, chuyển động của hệ với liên kết lý tưởng là tối ưu so với chuyển động của hệ không liên kết theo nghĩa làm tối thiểu bình phương độ lệch.

2. Từ quan điểm đã trình bày trên, mở ra khả năng cho phép sử dụng các phương pháp tính của lý thuyết điều khiển nói chung, và phương pháp của lý thuyết qui hoạch toán học nói riêng để khảo sát chuyển động của các hệ với các liên kết phức tạp.

Địa chỉ :
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Nhận ngày 18/3/1985.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. DO SANH. On the principle of compatibility and the motion equations of a constrained mechanical system, ZAMM, N°4, 1980.
2. DO SANH. On the problem equations on motion of controlled mechanical systems, zagadnienia Drgan Nieliniowych, warsaw, N°21, 1981.
3. DO SANH. On the mechanical systems with nonideal constraints, Zagadnienia Drgan Nieliniowych, warsaw. N°20, 1981.
4. In TRILIGATOR M. Mathematical optimization and economic theory. Prentice Hall, N. Y., 1971.

РЕЗЮМЕ

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ТОЧКЕ ЗРЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

В статье, для составления уравнений движения механических систем со связями предлагается новый подход, который включается в том, что : « уравнения движения системы со связями являются наилучшими по сравнению с уравнениями системы без связей в смысле наименьщих квадратов отклонений »