Tạp chí Cơ học T. VII, 1985 số 3 (trang 13–17)

ẢNH HƯỞNG CỦA THAY ĐỔI THAM SỐ ĐẾN TẦN SỐ RIÊNG VÀ DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA HỆ DAO ĐỘNG

PHAN NGUYÊN DI

§ 1. MỞ ĐẦU

Phương trình dao động của hệ có khối lượng tập trung, bỏ qua các phần tử cản được viết dưới dạng

$$M\ddot{q} + Cq = 0 \qquad (1.1)$$

trong đó M là ma trận đối xứng xác định dương.

Bài toán tìm tần số riêng và dạng dao động riêng tương ứng của hệ (1.1) là

$$\omega_2^i MX^i = CX^i \qquad (1.2)$$

ở đây ω_i là tần số riêng của hệ, X^i là dạng dao động riêng tương ứng với tần số riêng ω_i Các tần số riêng, cũng như các dạng dao động riêng phụ thuộc vào các tham số của hệ các khối lượng m_i hoặc mômen quán tính J_i của ma trận M cũng như các phần tử đàn hồi c_i của ma trận C).

Khi thay đổi các tham số của hệ, tần số riêng và dạng dao động riêng sẽ thay đổi. Trong kỹ thuật (các bài toán về động lực học máy), do một yêu cầu nào đó, chẳng hạn, cần thay đổi một số kích thước hình học của hệ, gia tăng (hay giảm) độ cứng của những phần tử đàn hồi cũng như khối lượng ở một tọa độ xác định nào đó và đặc biệt thay đổi là để tránh cộng hưởng ở một tần số xác định. Sự thay đổi các tham số này ảnh hưởng thế nào đến các tần số và dạng dao động riêng tương ứng?

Các công trình [1], [2], [3], [4], [5] đã đề cập đến vấn đề này và đều giả thiết sự thay đổi các tham số là bé, trong gần đúng bậc nhất đã bỏ qua thay đổi của dạng dao động và tìm thay đổi tần số của hệ dạng

$$\omega_i^2 = \omega_{oi}^2 + \Delta\omega_i^2 \qquad (1.3)$$

trong đó ω_{oi} là tần số riêng của hệ ban đầu, ω_i là tần số riêng của hệ có các tham số thay đổi. Mặt khác khi tính toán tìm các gia số $\Delta\omega_i^2$ phải tính các « hệ số ảnh hưởng » γ_{ij}, μ_{ij} và lập các phương trình bổ sung rất phức tạp.

Bài báo này nêu một phương pháp khác xác định được sự thay đổi của của tần số riêng và cả dạng dao động riêng. Việc tính toán trở nên đơn giản nếu hệ chỉ có M hoặc C thay đổi.

§2. XÂY DỰNG PHƯƠNG PHÁP

Gọi M_o, C_o là ma trận tham số của hệ ban đầu, ω_{oi}, X^{oi} là tần số riêng và dạng dao động riêng tương ứng của hệ ấy. Giả thiết ma trận C thay đổi một đại lượng bé ΔC, khi đó tần số riêng và dạng dao động riêng tương ứng là ω_i và X^i. Phương trình xác định ω_i và X^i theo (1.2) là :

$$\omega_i^2 M_i X^i = (C_o + \Delta C)X^i \qquad (2.1)$$

Nhân 2 vế của (2.1) từ bên trái với M_o^{-1}

$$\omega_i^2 X^i = M_o^{-1}(C_o + \Delta C)X^i \qquad (2.2)$$

Vì ΔC là bé, luôn luôn có thể làm được

$$M_o^{-1}\Delta C = \varepsilon C^* \tag{2.3}$$

ở đây ε là một đại lượng bé. Đặt $\omega_i^2 = \lambda_i$, từ phương trình (2.2) ta có .

$$\lambda_i X^i = (M_o^{-1}C_o + \varepsilon C^*)X^i \tag{2.4}$$

Nếu không phải C thay đổi mà M thay đổi một đại lượng ΔM ta cũng nhận được

$$\omega_i^2(M_o + \Delta M)X^i = C_o X^i \tag{2.5}$$

chia 2 vế cho ω_i^2 và đặt $\beta_i = 1/\omega_i^2$ ta được :

$$(M_i + \Delta M)X^i = \beta_i C_o X^i \tag{2.6}$$

Nhân hai vế của (2.6) về bên trái với C_o và đặt $B_o\Delta M = \varepsilon M^*$

sẽ có
$$(C_o^{-1}M_o + \varepsilon M^*)X^i = \beta_i X^i \tag{2.7}$$

Rõ ràng, nếu $\Delta C = \Delta M = 0$ thì bài toán (2.4) và (2.7) là tương đương, khi đó λ_i trở thành λ_{oi}, β_i trở thành β_{oi} và chúng có quan hệ $\lambda_{oi} = 1/\beta_{oi}$ (2.8)
Phương trình để xác định λ_{oi}, β_{oi} và X^{oi} tương ứng là

$$M_o^{-1}C_o X^{oi} = \lambda_{oi}X^{oi} \tag{2.9}$$

$$C^{o1}M_o X^{oi} = \beta_{oi}X^{oi} \tag{2.10}$$

Cũng do tính chất tương đương của (2.4) và (2.7), chỉ cần giải quyết, chẳng hạn, bài toán (2.4).
Để viết cho gọn, đặt $M_o^{-1}C_o = A_o$. Ta tìm tần số riêng và dạng dao động tương ứng của (2.4) theo khai triển của ε :

$$\lambda_i = \lambda_{oi} + \varepsilon\lambda_{1i} + \varepsilon^2\lambda_{2i} + \dots$$

$$X^i = X^{oi} + \varepsilon X^{1i} + \varepsilon^2 X^{2i} + \dots \tag{2.11}$$

Vấn đề là cần xác định các λ_{1j} và X^{1j}. Đưa (2.11) vào (2.12)

$$(A_o + \varepsilon C^*)X^i = \lambda_i X^i \tag{2.12}$$

kết quả là

$$(A_o + \varepsilon C^*)(X^{oi} + \varepsilon X^{1i} + \varepsilon^2 X^{2i} + \dots) =$$

$$= (\lambda_{oi} + \varepsilon\lambda_{1i} + \varepsilon^2\lambda_{2i} + \dots)(X^{oi} + \varepsilon X^{1i} + \varepsilon^2 X^{2i} + \dots) \tag{2.13}$$

Cân bằng các hệ số theo lũy thừa của ε, ta nhận được

$$A_o X^{oi} = \lambda_{oi}X^{oi}$$

$$A_o X^{1i} + C^*X^{oi} = \lambda_{oi}X^{1i} + \lambda_{1i}X^{oi}$$

$$A_o X^{2i} + C^*X^{1i} = \lambda_{oi}X^{2i} + \lambda_{1i}X^{1i} + \lambda_{2i}X^{oi} \tag{2.14}$$

. . . .

Từ các phương trình (2.14) này sẽ xác định được các hằng số λ_{ij} và các véc tơ X^{ij}. Thật vậy, vì λ_{oi} và X^{oi} là trị riêng và véc tơ riêng của ma trận A_o (ứng với hệ M_o, C_o) nên phương trình thứ nhất của (2.14) là một đồng nhất thức. Trong phương trình thứ hai của (2.14) có hai đại lượng chưa biết là hằng số λ_{1i} và véc tơ X^{1i}, còn phương trình thứ ba hai ẩn số là hằng số λ_{2i} và véc tơ X^{2i}. Giải các phương trình (2.14) sẽ lần lượt tìm được các ẩn số cần xác định. Nếu ε đủ bé, chỉ cần dừng ở gần đúng thứ nhất với mức độ chính xác $0(\varepsilon)$, khi đó chỉ cần giải phương trình thứ hai của (2.14) (dĩ nhiên, đối với hệ ban đầu xem như các tần số riêng λ_{oi} và các dạng dao động riêng tương ứng X^{oi} là đã biết).

Phương trình thứ hai của (2.14) được viết lại như sau :

$$(A_o - \lambda_{oi}I)X^{1i} = (\lambda_{1i}I - C^*)X^{oi} \tag{2.15}$$

Vì λ_{oi} là trị riêng của A_o nên ma trận hệ số $(A_o - \lambda_{oi}I)$ là suy biến, vậy phương trình (2.15) chỉ có nghiệm với điều kiện đặc biệt của vế phải. Ta tìm điều kiện này.

Để tiện lợi trong cách viết, đưa vào ký hiệu mới

$$X^{1i} = Y, \qquad \lambda_{1i}I - C^* = z \tag{2.26}$$

Như đã biết, các véc tơ riêng (dạng dao động riêng) X^{oi} là độc lập tuyến tính, vì vậy các véc tơ Y và z có thể biểu diễn qua chúng:

$$Y = \sum_{j=1}^{N} a_j X^{oj}, \quad z = \sum_{j=1}^{N} b_j X^{oj} \tag{2.17}$$

Các hằng số a_j, b_j được xác định như sau

$$a_j = (Y, X^{oj}), \quad b_j = (z, X^{oj}) \tag{2-18}$$

Đưa (2.16), (2.17) vào (2.15) và chú ý rằng

$$A_o X^{oj} = \lambda_{oj} X^{oj}; \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

ta nhận được:

$$\sum_{j=0}^{N} a_j(\lambda_{oj} - \lambda_{oi}) X^{oj} = \sum_{j=0}^{N} b_j X^{oj} \tag{2.19}$$

Cân bằng các hệ số của X^{oj} sẽ có:

$$a_j(\lambda_{oj} - \lambda_{oi}) = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{2.20}$$

Các phương trình (2.20) có nghiệm khi và chỉ khi $b_i = 0$. (2.21)
Điều này, theo (2.18), có nghĩa là véc tơ z phải trực giao với véc tơ riêng X^{oi} tương ứng với trị riêng λ_{oi}. Viết lại điều kiện trực giao như sau

$$(z, X^{oi}) = \left((\lambda_{1i}I - C^*)X^{oi}, X^{oi}\right) = 0$$

Từ đây suy ra

$$\lambda_{1i} = \frac{(X^{oi}, C^* X^{oi})}{(X^{oi}, X^{oi})} \tag{2.22}$$

Nếu trường hợp hệ véc tơ riêng được chuẩn hóa, λ_{1i} sẽ được tính

$$\lambda_{1i} = (X^{oi}, C^* X^{oi}) \tag{2.23}$$

Vậy là, nếu ma trận biến đổi các tham số C^* cho trước thì các hằng số λ_{1j} là xác định và theo (2.16) véc tơ z cũng được xác định, còn véc tơ $Y = X^{1i}$ được xác định theo (2.17) và (2.20)

$$y^i = X^{1i} = \sum_{j=1}^{N} a_j X^{oj} = a_i X^{oi} + \sum_{i \neq j} \frac{b_j X^{oj}}{\lambda_{oj} - \lambda_{oi}} \tag{2.24}$$

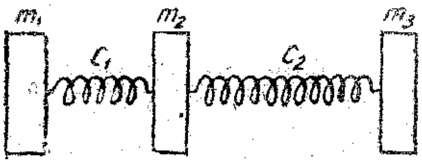
ở đây hệ số a_i tùy ý chọn, nhưng để thích hợp với một hệ dao động không chọn $a_i = 0$. Ta có thể lấy $a_i = 1$. Các hệ số b_j tính theo (2.18).

Bây giờ còn cần phải chứng minh hệ véc tơ riêng của hệ dao động mới được xây dựng theo (2.14) là trực giao. Thật vậy, ta có

$$(y^i, y^j) = \left(\left(a_i X^{oi} + \sum_{i \neq k} \frac{b_k X^{ok}}{\lambda_{ok} - \lambda_{oi}}\right), \left(a_j X^{oj} + \sum_{j \neq k} \frac{b_k X^{ok}}{\lambda_{ok} - \lambda_{oj}}\right)\right) = \begin{cases} a_j^2 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

§ 3. VÍ DỤ

Xét một hệ dao động như hình vẽ



cho $m_1 = m_2 = m_3 = m$

$c_1 = 10c$

$c_2 = c$

Phương trình dao động của hệ là

$$m_1\ddot{X}_1 + C_1(X_1 - X_2) = 0,$$

$$m_2\ddot{X}_2 + C_1(X_2 - X_1) + C_2(X_2 - X_3) = 0,$$

$$m_3\ddot{X}_3 + C_2(X_3 - X_2) = 0.$$

các ma trận tham số tương ứng là

$$M = m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = c\begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 11 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Các tần số riêng và dạng dao động riêng theo [6] là

$$\lambda_{oo} = 0,\ \lambda_{o1} = 1{,}461\omega^{*2},\ \lambda_{o2} = 20{,}539\omega^{*2}$$

$$X^{o1} = (1,\quad 0{,}854\ ,\ -1{,}855)$$

$$X^{o2} = (1,\ -1{,}054\ ,\quad 0{,}053) \tag{a}$$

với $\omega^{*2} = \dfrac{c}{m}$

Giả sử cần tăng độ cứng lò xo c_2 một lượng $c_2 = 0{,}1c$, khi đó ma trận

$$M_o^{-1}\Delta C = \varepsilon C^* = 0{,}1\,\frac{c}{m}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tức là $\qquad \varepsilon = 0{,}1, \qquad C^* = \dfrac{c}{m}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Theo (2.22) và (a) ta tính được

$$\lambda_{11} = \frac{(X^{o1},\ CX^{o1})}{(X^{o1},\ X^{o1})} = 1{,}761\,\frac{c}{m} = 1{,}761\omega^{*2}$$

$$\lambda_{12} = \frac{(X^{o2},\ CX^{o2})}{(X^{o2},\ X^{o2})} = 0{,}571\,\frac{c}{m} = 0{,}571\omega^{*2}$$

Như vậy tần số riêng của hệ mới là

$$\lambda_1 = \lambda_{o1} + \varepsilon\lambda_{11} = 1{,}461\omega^{*2} + 0{,}176\omega^{*2} = 1{,}637\omega^{*2}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{o2} + \varepsilon\lambda_{12} = 20{,}539\omega^{*2} + 0{,}057\omega^{*2} = 20{,}596\omega^{*2} \tag{b}$$

Tính tần số chính xác của hệ bằng cách giải phương trình đặc trưng ta nhận được

$$\lambda_1 = 1{,}650\omega^{*2}\ ,\quad \lambda_2 = 20{,}550\omega^{*2} \tag{c}$$

So sánh (b) và (c) chúng ta nhận được một xấp xỉ rất tốt. Dạng dao động mới không có gì khó khăn, có thể lập theo (2.24) và nhận được những sai khác rất nhỏ so với hệ ban đầu.

§4. KẾT LUẬN

Cũng như các kết quả đã được công bố, đề tính biến thiên của tần số (và ở đây cả dạng dao động) phương pháp đòi hỏi phải biết trước tần số và dạng dao động của hệ ban đầu. Các bước sau đều đơn giản và dễ tính. Trong [1] (các kết quả tiếp theo trong [2], [3], [4] đều là những trường hợp riêng của [1]) vì bỏ qua sự thay đổi của dạng dao động nên có những yêu cầu chặt chẽ về độ nhỏ của ΔM (hoặc ΔC), còn ở đây nếu ε không đủ nhỏ có thể tính thêm hệ số của ε^2 và những bậc cao hơn nữa của ε. Thực tế tính toán chỉ ra rằng, nếu ε xấp xỉ 0,1 và các phần tử của ma trận C^* (hoặc M^*) có độ lớn tương tự như các phần tử của ma trận $M_o^{-1}C_o$ thì dừng lại với hệ số của ε cũng đã có những kết quả tốt.

Địa chỉ:
Học Viện Kỹ thuật quân sự

Nhận ngày 10/7/1983

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1., 2. DRESIG H. Beeinflussung der Eigenfrequenzen durch Parameteranderung. — Maschinenbautechnik H. 9, 1977 — Textiltechnik H. 9, 1977

3. SALEWSKI K. D. Koordinierte Parametervariationen an Schwingenden Systemen Maschinenbautechnik H. 8, 1980

4. TAUBAL R. Zur Anwendung einer Parameteridentifikationsmethode auf Antriebssysteme von Rollenrotationsmaschinen Maschinenbautechnik H. 3, 1982

5. MULLER D. Ein Beitrag zur Variation von Eigenfrequenzenspektren. Maschinenbautechnik H. 1, 1973

6. HOLZWEISSIG F., DRESIG H. Lehrbuch der Maschinendynamik VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979.

ZUSAMMENFASSUNG

BEEINFLUSSUNG DER EIGENFREQUENZEN UND EIGENFORMEN DURCH PARAMETERANDERUNG DES SCHWINGUNGSSYSTEMS

Mit der Anderung des Systemsparameters werden die Eigenfrequenzen und die Eigenformen des Systems geandert. Jn vorliegender Arbeit werden dieser Eigenfrequenzen und Eigenformen des geanderen Systemsparameters gerechnet.