Tạp chí Cơ học T. VII, 1985 số 3 (Trang 6–12)

VỀ SỰ HỘI TỤ CỦA MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI GẦN ĐÚNG LIÊN TIẾP BÀI TOÁN BIÊN CỦA LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN DẺO

ĐÀO HUY BÍCH, NGUYỄN CÔNG HỢP

Khảo sát về sự tồn tại và duy nhất nghiệm bài toán biên của lý thuyết quá trình biến dạng có độ cong trung bình đã được đề cập đến trong các công trình [1,2], còn trong [3,4] chứng minh định lý duy nhất nghiệm bài toán biên với quá trình biến dạng phức tạp bất kỳ:

Công trình này nghiên cứu các điều kiện đủ cho sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán xác định trường tốc độ dịch chuyển trong vật thể biến dạng đàn dẻo.

Bài toán biên phi tuyến sẽ được giải gần đúng bằng cách xấp xỉ qua các bài toán tuyến tính tựa như phương pháp nghiệm đàn hồi. Xét các điều kiện đủ để đảm bảo cho sự hội tụ của dãy nghiệm gần đúng về nghiệm chính xác và tính hợp lý của chúng.

§1. BÀI TOÁN BIÊN

Trong [4] đã trình bày cách thiết lập bài toán biên của lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo khi đặt tải phức tạp bất kỳ. Đây là bài toán bờ phi tuyến, việc tích phân trực tiếp chúng rất khó khăn. Do vậy ta sử dụng phương pháp giải gần đúng như sau: Chia đoạn thời gian quá trình xảy ra [0,1] thành N giai đoạn nhỏ bằng nhau bằng các điểm chia 0, t_1, t_2, ..., $t_N = 1$. Giá trị của chuyển dịch, biến dạng, ứng suất tại t_{n+1} được tính gần đúng bằng công thức

$$u_i(x, t_{n+1}) = u_i(x, t_n) + \frac{1}{N}\dot{u}_i(x, t_n),$$

$$\varepsilon_{ij}(x, t_{n+1}) = \varepsilon_{ij}(x, t_n) + \frac{1}{N}\dot{\varepsilon}_{ij}(x, t_n), \sigma_{ij}(x, t_{n+1}) = \sigma_{ij}(x, t_n) + \frac{1}{N}\dot{\sigma}_{ij}(x, t_n).$$

Khi đó tại mỗi giai đoạn ta phải giải bài toán: cho biết tại thời điểm t_o nào đó các giá trị $u_i(x, t_o)$, $\varepsilon_{ij}(x, t_o)$, $\sigma_{ij}(x, t_o)$, $s(x, t_o)$, $x \in \Omega$, $t_o \in [0,1]$ tìm các tốc độ tương ứng tại thời điểm này trong vật thể khi chịu tác dụng của biến thiên lực khối $\dot{K}_i(x, t_o)$, $x \in \Omega$, lực mặt $\dot{F}_i(x, t_o)$, $x \in S_\sigma$ và $\dot{u}_i(x, t_o) = 0$, $x \in S_u$, trong đó $\Omega \in R^P$ $(P \leqslant 2)$, $S_\sigma \cup S_u = S_{tron}$, $S_\sigma \cap S_u = \varnothing$.

Bài toán có thể phát biểu dưới dạng một bài toán biên như sau:

Tìm $\dot{u}_i(x, t_o)$, $\dot{\varepsilon}_{ij}(x, t_o)$, $\dot{\sigma}_{ij}(x, t_o)$, $x \in \Omega$ sao cho thỏa mãn:

– Phương trình cân bằng

$$\partial\dot{\sigma}_{ij}/\partial x_j + \rho\dot{K}_i = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{1.1}$$

– Phương trình Cauchy

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial\dot{u}_i/\partial x_j + \partial\dot{u}_j/\partial x_i), x \in \Omega \cup S. \tag{1.2}$$

– Điều kiện biên

$$\dot{\sigma}_{ij}n_j = \dot{F}_i, x \in S_\sigma; \ \dot{U}_i = 0, x \in S_u. \tag{1.3}$$

— Phương trình vật lý: nếu quá trình biến dạng có độ cong trung bình

$$\dot{S}_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u k(s)\dot{e}_{ij} + [\Phi'(s) - \sigma_u k(s)]\frac{S_{kl}\dot{e}_{kl}}{\sigma_u^2}S_{ij} \qquad (1.4a)$$

còn nếu quá trình phức tạp có độ cong tùy ý

$$\dot{S}_{ij} = -\frac{2}{3}\sigma_u\frac{f(\theta, S)}{\sin\theta}\dot{e}_{ij} + [\dot{\sigma}_u'(\theta,S) + \sigma_u f \operatorname{ctg}\theta]\frac{V_u}{\sigma_u}S_{ij} \qquad (1.4b)$$

$$\dot{\sigma} = 3K\dot{e} \qquad (1.5)$$

trong đó $\dot{S}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}\delta_{ij}$, $\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{e}\delta_{ij}$

$$\theta = \arccos(S_{ij}\dot{e}_{ij}/\sigma_u V_u), \quad V_u = \left(\frac{2}{3}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}\right)^{1/2}.$$

Nhận xét. Bài toán biên với phương trình vật lý (1.4b), (1.5) là bài toán phi tuyến vì θ phụ thuộc vào $\dot{e}_{ij}$, trong khi đó bài toán với phương trình vật lý (1.4a), (1.5) là bài toán tuyến tính.

Dấu chấm trong ký hiệu $\dot{u}_i$ không đóng vai trò đặc biệt gì, nên để cho tiện có thể bỏ qua.

§2. NGHIỆM SUY RỘNG CỦA BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI TỐC ĐỘ

Ta ký hiệu

$$V = \{v \mid v \in (L^2(\Omega))^p, \ \dot{\varepsilon}_{ij}(v) \in L^2(\Omega), \ v|_{S_u} = 0, \ P \leqslant 3\}.$$

V là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(u, v)_V = \int_\Omega [\dot{e}_{ij}(u)\dot{e}_{ij}(v) - \dot{\varepsilon}_{kk}(u)\dot{\varepsilon}_{kk}(v)]d\Omega. \qquad (2.1)$$

Theo bất đẳng thức Korn, nếu $v \in V$ thì $v \in (H^1(\Omega))^p$ và $v|_{S_u} = 0$, hơn nữa dễ dàng chứng minh được

$$\|u\|_\varepsilon \leqslant \|u\|_V \leqslant 3\|u\|_\varepsilon$$

trong đó $\|\cdot\|_\varepsilon$ sinh bởi tích vô hướng

$$(u, v)_\varepsilon = \int_\Omega \dot{\varepsilon}_{ij}(u)\dot{\varepsilon}_{ij}(v)d\Omega \qquad (2.2)$$

mà (2.2) có thể lấy là tích vô hướng của $(H_o^1(\Omega))^p$.

Vì vậy $(H_1(\Omega))^p \subset V \subset (H^1(\Omega))^p$

Định nghĩa. *Hàm* $u \in V$ *được gọi là nghiệm suy rộng của bài toán* (1.1), (1.2), (1.3) (1.4b) (*tương ứng* (1.4a), (1.5) *nếu* $u \in V$

$$\int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}(u)\dot{\varepsilon}_{ij}(v)d\Omega = \int_\Omega \rho\dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S\sigma} \dot{F}_i v_i dS \qquad (2.3a)$$

(*tương ứng*

$$\int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}^M(u)\dot{\varepsilon}_{ij}(v)d\Omega = \int_\Omega \rho\dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S\sigma} \dot{F}_i v_i dS \qquad (2.3b))$$

và ký hiệu $$G^* = \frac{1}{\sigma_u v_u \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big|_{\dot{e}^*}, \quad H^* = \frac{1}{\sigma_u \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{\dot{e}^*}$$

sau khi tính toán ta được

$$I_{ij} = G^* \left(\frac{2}{3} \frac{\dot{e}^*_{mn}}{v_u^{*2}} S_{kl} \dot{e}^*_{kl} - S_{mn} \right) \dot{e}^*_{kl} \dot{W}_{mn} + H^* \left(\frac{2}{3} \frac{\dot{e}^*_{mn}}{v_u^{*2}} S_{kl} \dot{e}^*_{kl} - \right.$$

$$\left. - S_{mn} \right) \frac{S_{ij}}{\sigma_u} \dot{W}_{mn} + \psi^* \dot{W}_{ij} + \frac{2}{3\sigma_u v_u^*} \varphi^* \dot{e}^*_{mn} \dot{W}_{mn} S_{ij}$$

trong đó $$\dot{W}_{mn} = \dot{e}^{(1)}_{mn} - \dot{e}^{(2)}_{nm}.$$

Viết gọn hơn dưới dạng vectơ

$$I_{ij} = G^* \left[\frac{2}{3v_u^{*2}} (\bar{\dot{e}}^*, \bar{\dot{W}}) (\bar{S}, \bar{\dot{e}}^*) - (\bar{S}, \bar{\dot{W}}) \right] \dot{e}^*_{ij} + H^* \left[\frac{2}{3v_u^{*2}} (\bar{S}, \bar{\dot{e}}^*) (\bar{\dot{e}}^*, \bar{\dot{W}}) - \right.$$

$$\left. - (\bar{S}, \bar{\dot{W}}) \right] \frac{S_{ij}}{\sigma_u} + \psi^* \dot{W}_{ij} + \frac{2}{3v_u^*} \varphi^* (\bar{\dot{e}}^*, \bar{\dot{W}}) S_{ij}/\sigma_u \tag{3.5}$$

$(\bar{a}, \bar{b})$ là tích vô hướng trong không gian oclít.

Từ (3.2) và (3.5) ta có

$$\langle (\mu - \beta A) u_1 - (\mu - \beta A) u_2, v \rangle_V = \int_\Omega \left\{ G^* \left[\frac{2}{3v_u^{*2}} (\bar{S}, \bar{\dot{e}}^*) (\bar{\dot{e}}^*, \bar{\dot{W}}) - \right. \right.$$

$$\left. - (\bar{S}, \bar{\dot{W}}) \right] (\bar{\dot{e}}^*, \bar{\dot{e}}) + H^* \left[\frac{2}{3v_u^{*2}} (\bar{S}, \bar{\dot{e}}^*) (\bar{\dot{e}}^*, \bar{\dot{W}}) - (\bar{S}, \bar{\dot{W}}) \right] \frac{(\bar{S}, \bar{\dot{e}})}{\sigma_u} +$$

$$\left. + \psi^* (\bar{\dot{W}}, \bar{\dot{e}}) + \frac{2}{3v_u^* \sigma_u} \varphi^* (\bar{\dot{e}}^*, \bar{\dot{W}}) (\bar{S}, \bar{\dot{e}}) \right\} d\Omega + K(1 - \beta) \int_\Omega \dot{W}_{kk}(u) \varepsilon_{kk}(v) d\Omega$$

từ đây suy ra

$$|\langle (\mu - \beta A) u_1 - (\mu - \beta A) u_2, v \rangle|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_\Omega B |\bar{\dot{W}}| |\bar{\dot{e}}| d\Omega + K(1 - \beta) \int_\Omega \dot{W}_{kk} \varepsilon_{kk}(v) d\Omega \right]^2 \tag{3.6}$$

trong đó

$$B |G^*| (\sigma_u v_u^* + |(\bar{S}, \bar{\dot{e}})|) + \frac{2}{3} |H^*| \left(\frac{|(\bar{S}, \bar{\dot{e}}^*)|}{v_u^*} + \sigma_u \right) + |\psi^*| + \frac{2}{3} |\varphi^*|$$

Thay thế các giá trị của G^*, H^*, sau một số tính toán đơn giản ta được

$$B = (1 + |\cos\theta^*|) \left| \frac{1}{\sin\theta^*} \frac{\partial\psi^*}{\partial\theta^*} \right| + |\psi^*| + \frac{2}{3} \left[(1 + |\cos\theta^*|) \left| \frac{1}{\sin\theta^*} \frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta^*} \right| + |\varphi^*| \right] \tag{3.7}$$

rong đó ψ, φ có dạng (3.4).

Bây giờ giả sử tồn tại hằng số $g(\beta) > 0$ sao cho $\forall u_1, u_2$ ta luôn có $B \leqslant g(\beta)$, $K(1 - \beta) \leqslant g(\beta)$, khi đó áp dụng bất đẳng thức Schwartz cho tích phân bên vế phải của bất đẳng thức (3.6) ta được

$$|\langle (\mu - \beta A) u_1 - (\mu - \beta A) u_2, v \rangle_V|^2 \leqslant g^2(\beta) \|u_1 - u_2\|_V^2 \|v\|_V^2, \quad \forall u_1, u_2 \in V$$

Nếu $g(\beta)$ thỏa mãn $g(\beta) < \alpha$ thì theo mệnh đề 3.1 toán tử Qco. Ta có định lý sau

Định lý 3.2. *Giả sử thỏa mãn các giả thiết của định lý 2.1 và tồn tại $g(\beta) < \alpha$ sao cho ta luôn có $K(1 - \beta)$, $B \leqslant g$, trong đó B có dạng (3.7), thì bài toán biên phi tuyến (1.1), (1.2), (1.3) (1.4b), (1.5) tồn tại nghiệm duy nhất $u \in V$.*

§4. KHẢ NĂNG ÁP DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ 3.2

Ta chuyển sang khảo sát các điều kiện của định lý 3.2 đối với lớp vật liệu, mà các thí nghiệm cho dạng cụ thể của các hàm σ'_u và f.

Các hàm σ'_u và f có thể chọn một cách gần đúng dưới dạng

$$\sigma'_u(\theta, S) = \Phi'(S)\,(1 - a\theta^2),\quad f(\theta, S) = -k(S)\sin\theta \tag{4.1}$$

trong đó $k(S) > 0$, $a > 0$. Cũng từ các số liệu thực nghiệm và biểu thức $\alpha = \frac{2}{3}\min\left\{\sigma_u k(S), \Phi'(S), \frac{3}{2}K\right\}$ suy ra $\alpha = \frac{2}{3}\Phi'(S)$.

Mục đích của ta là tìm lớp vật liệu, mà với chúng điều kiện của định lý 3.2 thỏa mãn, tức là hệ thức

$$B < \frac{2}{3}\Phi'(S),\quad \forall\theta \in [0, \pi] \tag{4.2}$$

đòi hỏi này sẽ đặt những hạn chế cụ thể lên thông số a trong biểu thức của hàm $\sigma'_u(\theta, S)$

Đặt $\beta = 1$ và thay (4.1) vào (3.4) ta được

$$\psi = 0,\ \varphi = \Phi'(S)\,(\cos\theta + a\theta^2 - 1)$$

với $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, còn với $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$ tương ứng quá trình cất tải $\psi = \varphi = 0$. Thay các giá trị ψ, φ vào (3.7) để tính B; khi đó bất đẳng thức (4.2) tự động thỏa mãn với $\theta \in (\pi/2, \pi)$ và dẫn về bất đẳng thức

$$(1 + \cos\theta)\left|\frac{2a\theta}{\sin\theta} - 1\right| + |\cos\theta + a\theta^2 - 1| < 1 \quad \text{với mọi } \theta \in [0, \pi/2] \tag{4.3}$$

Khảo sát (4.3) ta thấy nó thỏa mãn với mọi $\theta \in [0, \pi/2]$ khi

$$\frac{1}{2} \leqslant a < \frac{12}{22{,}5}$$

Do vậy, trong trường hợp tổng quát với những vật liệu có các biểu đồ σ'_u, f biểu diễn dưới dạng (4.1) tương đối gần với các biểu đồ tương ứng trong trường hợp quỹ đạo biến dạng có độ cong trung bình thì phương pháp lặp đã nêu trong § 3 có hiệu lực và bài toán biên tìm trường tốc độ chuyển dịch tồn tại nghiệm duy nhất. Điều này cũng chứng tỏ tính hợp lý của các điều kiện đã nêu ở định lý 3.2.

KẾT LUẬN

Để giải bài toán biên của lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo đã thiết lập được phương pháp gần đúng liên tiếp tựa như phương pháp nghiệm đàn hồi của Iliusin, nhưng ở đây là đối với tốc độ. Với các điều kiện áp đặt lên hàm vật liệu đã chứng minh được sự hội tụ của phương pháp đó và thể nghiệm trên một lớp vật liệu để minh họa. Điều kiện này chỉ là điều kiện đủ, do vậy các lớp vật liệu thỏa mãn còn có thể cho phép rộng hơn.

Địa chỉ:
Trường Đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 25/3/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ĐÀO HUY BÍCH. Về định lý tồn tại nghiệm bài toán biên của lý thuyết dẻo đối với quá trình biến dạng có độ cong trung bình. Tạp chí Cơ học Số 3, Tập V, 1983.
2. NGUYỄN CÔNG HỢP. Về định lý tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên lý thuyết quá trình biến dạng đàn hồi dẻo. Thông báo khoa học khoa Toán Cơ, Đại học Tổng hợp Hà nội (đang in)

3. ĐÀO HUY BÍCH. Về bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp. Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 3. Viện Khoa học Việt Nam 1983.
4. ДАО. ЗУЙ БИК. О теореме единственности решения краевой задачи теории пластичности с использованием гипотези локальной определённости. Известия А Н СССР, Механика твёрдого тела, №1,1982.

SUMMARY

ON THE COVERGENCE OF AN ITERATION METHOD FOR SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE THEORY OF ELASTO – PLATIC DEFORMATION PROCESSES.

In this paper is proposed an iteration method, as the Iliousin' s method for solving the boundary value problem in the theory of elasto – plastic deformation processes.

The convergence of this method, i. e. the existence and uniqueness of solution of the boundary value problem are also considered.

THÔNG BÁO CỦA BCHTƯ HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM

Ngày 6 tháng 7 năm 1985, Ban chấp hành Trung ương Hội Cơ học Việt Nam đã họp phiên thường kỳ lần thứ 7 (Khóa I) tại Hà Nội nhằm rút kinh nghiệm về 3 năm hoạt động của Hội, đề xuất công tác 6 tháng cuối 1985 và các biện pháp chấn chỉnh tổ chức Hội. Chủ tịch Nguyễn Văn Đạo chủ trì, có mặt 11 ủy viên, vắng 8 ủy viên.

BCHTƯ Hội dề một phút tưởng niệm giáo sư Nguyễn Xuân Trường (ủy viên BCHTƯ Hội) đã từ trần ngày 30 tháng 4 năm 1985. Giáo sư Nguyễn Hữu Chí giới thiệu về cuộc đời hoạt động của đồng chí Nguyễn Xuân Trường.

Tổng thư ký Phạm Huyễn đã báo cáo về các hoạt động khoa học, dịch vụ KHKT, xã hội, tổ chức và tài chính của Hội trong 3 năm qua. Các ủy viên đã thảo luận và đánh giá cao các kết quả và tác dụng của các hoạt động đó, nhận định rằng trong hoạt động có nhiều ưu điểm, nhưng cũng bộc lộ một số nhược điểm nhất là trong công tác quản lý.

BCHTƯ Hội đã đề xuất các biện pháp khắc phục các nhược điềm và chấn chỉnh tổ chức, đã cử đồng chí Nguyễn Văn Điệp làm phó Chủ tịch Hội phụ trách công tác tài chính, đồng chí Ngô Huy Cẩn làm phó tổng thư ký. Bổ sung các đồng chí Nguyễn Văn Điệp và Ngô Huy Cẩn vào Ban thường vụ.

Trong thời gian tới, ngoài các hoạt động thường xuyên, cần đẩy mạnh việc thành lập các phân hội chuyên ngành, các chi hội địa phương và cơ sở, phát triển hội viên, tăng cường bộ máy giúp việc cho Ban chấp hành hội, đẩy mạnh các hoạt động của Ban thường vụ và nghiên cứu các biện pháp quản lý dịch vụ.