Tạp chí Cơ học T. VII, 1985 số 3 (Trang 1 — 5)

DAO ĐỘNG PHI TUYẾN TRONG HỆ CƠ HỌC KHÔNG OTONOM CÓ TẦN SỐ RIÊNG THAY ĐỔI NGẪU NHIÊN

NGUYỄN ĐÔNG ANH

Trong [2, 3] đã nghiên cứu dao động ngẫu nhiên trong hệ cơ học phi tuyến chịu kích động ngẫu nhiên khi tần số riêng của hệ là đại lượng tiền định. Bài báo này là kết quả nghiên cứu tiếp tục theo hướng trên cho trường hợp khi tần số riêng thay đổi theo qui luật ngẫu nhiên. Ta xét hệ cơ học phi tuyến một bậc tự do có tần số riêng hay đổi ngẫu nhiên được mô tả bằng phương trình sau

$$\ddot{X} + [\nu^2 - \sqrt{\varepsilon}\beta\dot{\xi}(t)]X = \varepsilon f(X, \dot{X}, \nu t) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma\dot{\xi}(t) \tag{1}$$

trong đó $\dot{\xi}(t)$ quá trình ngẫu nhiên « ồn trắng » có cường độ đơn vị, $f(X, \dot{X}, \nu t)$ — đa thức của X và $\dot{X}$

$$f(X, \dot{X}, \nu t) = \sum_{S=1}^{m}\left(\sum_{i,j=0}^{i+j=s}\gamma_{ij}X^iX^j\right) + \gamma\dot{X}^2\cos\nu t + P\cos\nu t,$$

$$\nu,\ \sigma,\ \beta,\ \gamma,\ P,\ \gamma_{ij} = \text{const.} \tag{2}$$

Bằng phép thế biến

$$X = a\cos\varphi,\ \dot{X} = -a\nu\sin\varphi,\ \varphi = \nu t + \theta(t) \tag{3}$$

và công thức Itô ta đưa phương trình (1) về dạng chuẩn [2]

$$da = \left[-\frac{\varepsilon}{\nu}f(a\cos\varphi, -a\nu\sin\varphi, \nu t)\sin\varphi + \frac{\varepsilon(\sigma + \beta a\cos\varphi)^2}{2\nu^2 a}\cos^2\varphi\right]dt - $$

$$- \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}(\sigma + \beta\cos\varphi)\sin\varphi d\xi(t),$$

$$d\theta = \left[-\frac{\varepsilon}{a\nu}f(a\cos\varphi, -a\nu\sin\varphi, \nu t)\cos\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon(\sigma + \beta a\cos\varphi)^2}{\nu^2 a^2}\cos\varphi\sin\varphi\right]dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}(\sigma + \beta\cos\varphi)\cos\varphi d\xi(t). \tag{4}$$

Phương trình Fokker-Planck-Kolmogorov đối với hàm mật độ xác suất $W(a, \theta)$ của hệ (4) sau khi trung bình hóa [2] có dạng :

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1W) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2W) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(K_{12}W) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W) \tag{5}$$

với các hệ số sau :

$$K_1(a, \theta) = M_t\left\{\frac{(\sigma + \beta a\cos\varphi)^2}{2\nu^2 a}\cos^2\varphi - \frac{f(a\cos\varphi, -a\nu\sin\varphi, \nu t)}{\nu}\sin\varphi\right\} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a} - \frac{3\beta^2 a}{16\nu^2} - \frac{\gamma a^2}{8\nu}\sin\theta - \frac{P}{2\nu}\sin\theta - \frac{1}{\nu}\sum_{S=1}^{m}\alpha_s a^S,$$

$$a^n: \mu''_{n+2} + 2\mu'_0\mu'_{n+2} + (n+2)^2\mu_{n+2} = -\frac{4\nu}{\sigma^2}(n+2)\alpha_{n+1} -$$

$$-\frac{4\nu}{\sigma^2}\sum_{i,s=1}^{i+s=n+1} i\mu_i\alpha_s - \frac{2\nu P}{\sigma^2}\left[(n+1)\mu_{n+1}\sin\theta + \mu'_{n+1}\cos\theta\right] -$$

$$-\frac{\gamma\nu}{2\sigma^2}\sin\theta(n-1)\mu_{n-1} - \frac{3\gamma\nu}{2\sigma^2}\cos\theta\,\mu'_{n-1} - \frac{4\nu}{\sigma^2}\sum_{i=0,s=1}^{i+s=n+1}\eta_s\mu'_i -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{i+j=n+2}(ij\mu_i\mu_j + \mu'_i\mu'_j) - \frac{\beta^2}{4\sigma^2}\left[3\mu''_n + \sum_{i,j=0}^{i+j=n} 3\mu'_i\mu'_j +\right.$$

$$\left. + n(n+4)\mu_n + \sum_{i,j=0}^{i+j=n} ij\mu_i\mu_j\right],\ n = \overline{1,\infty} \tag{12}$$

$$\alpha_k = \eta_k = 0,\ k \geqslant n+1.$$

Như vậy ta thu được hệ phương trình tách biến đối với các hệ số chưa biết μ_0, μ_1, μ_2, .. Những phương trình này cho phép xác định tuần tự tất cả μ_i. Ta chú ý tới một tính chất thú vị của hệ (12); trong nhiều trường hợp hệ này cho nghiệm chính xác dạng:

$$\mu_0(\theta) = \ln C,\quad \mu_i(\theta) = \varphi_i(\theta),\quad \mu_m(\theta) = 0,\quad i = \overline{1,N},\quad m \geqslant N+1,\quad C > 0. \tag{13}$$

Khi đó ta thu được nghiệm chính xác của phương trình FPK ( )

$$\Phi(a,\theta) = \ln C + \ln a + \sum_{i=1}^{N}\varphi_i(\theta)a^i, \tag{14}$$

từ đó mật độ xác suất sẽ bằng

$$w(a,\theta) = Ca\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(\theta)a^i\right\}. \tag{15}$$

Ta xét phương trình ngẫu nhiên tham số Van-der-Pol

$$\ddot{X} + \omega^2 X = \varepsilon(1-\gamma X^2)\dot{X} + \varepsilon\beta X^2\cos\omega t + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma X\xi(t). \tag{16}$$

Các tính toán cho thấy

$$K_1(a,\theta) = \frac{3\sigma^2 a}{16\omega^2} + \frac{a}{2} - \frac{\gamma}{8}a^3 - \frac{\beta a^2\sin\theta}{8\omega},\quad K_2(a,\theta) = -\frac{3\beta a}{8\omega}\cos\theta,$$

$$K_{11}(a,\theta) = \frac{\sigma^2 a^2}{8\omega^2},\qquad K_{22}(a,\theta) = \frac{3\sigma^2}{8\omega^2}. \tag{17}$$

Phương trình FPK tương ứng sẽ là:

$$\frac{3\sigma^2}{16\omega^2} + \frac{1}{2} - \frac{3\gamma}{8}a^2 - \frac{\beta a\sin\theta}{4\omega} + \left(\frac{3\sigma^2 a}{16\omega^2} + \frac{a}{2} -\right.$$

$$\left. -\frac{\gamma}{8}a^3 - \frac{\beta a^2\sin\theta}{8\omega}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial a} + \frac{3\beta a}{8\omega}\sin\theta - \frac{3\beta a}{8\omega}\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} =$$

$$= \frac{\sigma^2 a^2}{16\omega^2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}\right] + \frac{3\sigma^2}{16\omega^2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right], \tag{18}$$

Theo phương pháp khai triển theo tọa độ ẩn suy rộng nghiệm của phương trình 18) sẽ tìm ở dạng:

$$\Phi(a,\theta) = h\ln a + \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(\theta)a^i, \quad h = \text{const}. \tag{19}$$

Sau khi thay (19) vào (18), so sánh các hệ số và giải hệ phương trình tương ứng ta thu được nghiệm ngắt đuôi chính xác sau

$$h = 1 + \frac{8\omega^2}{\sigma^2}, \quad \mu_o(\theta) = \ln C, \; C = \text{const},$$

$$\mu_1(\theta) = -2\beta\omega\sin\theta/\sigma^2, \; \mu_2(\theta) = -\gamma\omega^2/\sigma^2, \quad \mu_k(\theta) = 0, \; k = \overline{3,\infty} \tag{20}$$

Cuối cùng ta thu được nghiệm chính xác của phương trình (18)

$$W(a,\theta) = \exp\{\Phi(a,\theta)\} = ca^{1+\frac{\gamma\omega^2}{\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{2\beta\omega\sin\theta}{\sigma^2}a - \frac{\gamma\omega^2}{\sigma^2}a^2\right\} \tag{21}$$

Đối với trường hợp phương trình Van-der-Pol ôtônôm ($\beta = 0$) nghiệm (21) trùng với nghiệm quen biết [1]. Trường hợp phương trình Van-der-Pol chịu kích động đồng thời lực tuần hoàn và «ồn trắng» được nghiên cứu trong [2,3]

Địa chỉ:
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 21/9/1983

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А.,КОЛОМИЕЦ В.Г. Применение асимптотических методов в стохастических системах.Сб.« Приближенные методы исследования нелинейных систем» Киев, 1976.
2. НГУЕН ДОНГ АНЬ.К вопросу о решении уравнений ФПК для неавтономных систем' подверженных периодическим и случайным воздействиями. УМЖ, №.4, т.34, 525 — 528. 1982
3. NGUYỄN ĐÔNG ANH, Về vấn đề giải phương trình FPK cho hệ cơ học không ôtônôm một bậc tự do bằng phương pháp khai triển theo tọa độ ẩn suy rộng. TC. «Cơ học», №1, 1982.

РЕЗЮМЕ

НЕЛИНЕЙНОЕ КОЛЕБАНИЕ В НЕАВТОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ.

В работе на основе метода разложения в ряд по обобщенной циклиесчкой координате исследуется колебание в нелинейных неавтономных механических системах Со случайно изменяющейся собственой частотой.