Tạp Chí Cơ Học T.VII, 1985 Số 2 (trang 21—26)

VỀ MỘT MÔ HÌNH TOÁN HỌC CỦA LÝ THUYẾT ĐỘ TIN CẬY

NGUYỄN VĂN PHÓ

§1. MỞ ĐẦU.

Lý thuyết độ tin cậy của các kết cấu công trình đã được trình bày trong các tài liệu [4, 5...] của V.V. Bô-lô-chin.

Lý thuyết đó có thể tóm tắt như sau:

Cho hệ thống có các liên hệ

$$L\vec{u} = \vec{q} \quad (1.1); \qquad M\vec{u} = \vec{v} \quad (1.2)$$

Trong đó $\vec{u}$ là vectơ trạng thái $\vec{u} \in U$, $\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t)$ là vectơ tác dụng ngoài, nói chung $\vec{q}$ là một quá trình ngẫu nhiên $\vec{q} \in Q$; L, M là các toán tử vi phân.

Gọi Ω_o là miền kiểm tra chất lượng $\Omega_o \in V$.

Gọi G là miền hệ chiếu trong không gian ba chiều $\vec{x} \in G$.

Độ tin cậy của hệ thống là xác suất:

$$P(t) = P[\vec{v}(\vec{x}, \tau) \in \Omega_o,\ \tau \in [0, t],\ \vec{x} \in G]. \qquad (1.3)$$

Để xác định P(t) người ta tiến hành theo bốn bước.

Bước I: Sơ đồ hóa hệ và tải trọng, tức là xác định Q, U, L, M

Bước II: Xác định trạng thái ngẫu nhiên của hệ, tức là giải (1.1)

Bước III: Chọn không gian chất lượng V và miền kiểm tra chất lượng Ω_o

Bước IV: Tính P(t).

Phương pháp xác định độ tin cậy theo sơ đồ trên không thể áp dụng cho các trường hợp sau:

a) Phương trình (1.1) không có nghiệm biểu diễn dưới dạng hàm số, mà chỉ tìm nghiệm gần đúng (nghiệm bằng số).

b) Phương trình (1.1) không có nghiệm duy nhất, như trong bài toán thiết kế tối ưu, bài toán xác định khả năng chịu lực của các công trình.

Ngoài ra, để tính P(t), người ta còn phải dùng nhiều giả thiết quá chặt chẽ.

Điều đáng chú ý là việc tìm một thuật toán ứng với sơ đồ bốn bước trên để tính trên máy tính là rất khó khăn.

Trong bài này, chúng tôi xây dựng một mô hình toán học của lý thuyết độ tin cậy tổng quát cho hệ tối ưu (hệ thông thường là trường hợp riêng), hy vọng rằng sẽ khắc phục được một phần các nhược điểm nêu trên.

§2. ĐỊNH NGHĨA ĐỘ TIN CẬY TỐI ƯU

Ở đây chúng tôi hiểu hệ tối ưu là hệ mà (1.1) không có nghiệm duy nhất. Quan niệm này rộng hơn nghĩa tối ưu thông thường. Vì nó bao gồm những bài toán tối ưu thông thường lẫn những bài toán không phải là tối ưu theo nghĩa hẹp. Đó là những bài toán muốn giải chúng chỉ có thể tiến hành bằng cách lựa chọn phương án, nghĩa là dùng thuật toán tối ưu hơn. Loại bài toán như vậy thường gặp trong cơ học như bài toán trạng thái giới hạn, bài toán thích ứng của hệ đàn hồi — dẻo [1, 2]

I. BÀN VỀ CÁCH BIỂU DIỄN ĐỘ TIN CẬY

Trong [4, 5] tác giả đã thay

$$P(t) = P[\vec{v}(\vec{r}, \tau) \in \Omega_D, \forall\tau \in [0, t], \vec{x} \in G]$$

bởi

$$P^*(t) = P\,[\sup_{\tau\in[0,t]} \sup_{\vec{r}\in G} \vec{v}(\vec{r}, \tau) \in \Omega_0]$$

và coi

$$P(t) = P^*(t) \qquad (2,1)$$

Sau đây chúng tôi xin nêu một thí dụ để chứng tỏ không phải (2.1) lúc nào cũng đúng.

Thật vậy, không mất tính chất tổng quát, để trình bày được rõ ràng, ta biểu diễn các đại lượng như sau

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, \vec{\theta}, t),$$
$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, \vec{\theta}, t),$$
$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, \vec{\theta}, t).$$

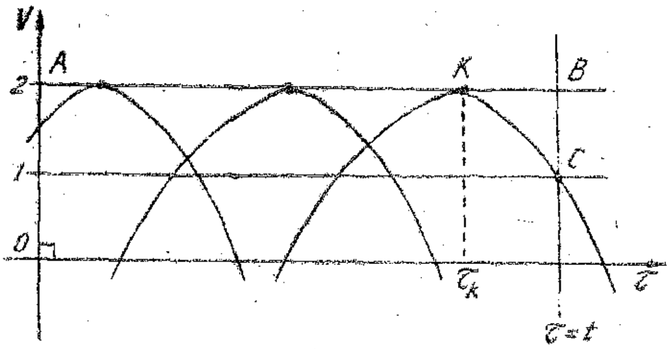
Trong đó $\vec{\theta} = \{\theta_i\}$ là vectơ ngẫu nhiên, các thành phần là những đại lượng ngẫu nhiên.

Xét quá trình $v = -(\tau - \theta)^2 + 2$

là đại lượng ngẫu nhiên phân phối đều trên $[0, t]$

Hãy tìm $P[v \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant t]$

Đồ thị của v (hay thể hiện của quá trình) là những parabôn đạt cực trị tại $\tau = \theta$ mà tại đó $v_{max} = 2$ (hình 1)



Hình 1

Điểm cực trị luôn chạy trên AK khi $\tau \in [0, t]$ (tương ứng với B)
Khi điểm cực trị chạy trên AK thì đồ thị cắt $\tau = t$ dưới nấc $v = 1$. Khi điểm cực trị chạy trên BK thì độ thị cắt $\tau = t$ trên nấc $v = 1$. Do θ là đại lượng ngẫu nhiên phân phối đều, nên ta có

$$P(t) = 1 \cdot \frac{AK}{AB}$$

Điểm cực trị K ứng với θ_K

$$-(t - t_K)^2 + 2 = 1 \text{ (vì qua c)}$$

$$\Rightarrow (1 - \theta_K)^2 = 1 \Rightarrow t - \theta_K = 1 \Rightarrow \theta_K = t - 1 \Rightarrow P(t) = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t} \quad (t \geqslant 1)$$

Trong khi đó

$$P[\sup_{\tau \in [o,t]} v(\tau) \leqslant 1] = 0$$

Vì các giá trị của sup đều nằm trên nấc $v = 1$.

Để được tổng quát sau đây chúng tôi không biểu diễn như trên.

2. ĐỊNH NGHĨA

Trước hết, ta hãy biểu diễn các hệ thức cơ bản theo quan điểm xác suất. Trong cơ học ta thường gặp hai dạng: đẳng thức và bất đẳng thức. Thông thường, để thành lập các hệ thức đó, người ta căn cứ vào định lý, định đề, hay ít ra cũng chứa các hằng số thực nghiệm.

Sau khi xử lý các kết quả thực nghiệm người ta lấy trung bình (kỳ vọng) hoặc lập đường hồi quy.

Trong [3] chúng tôi đã bàn đến việc thay thế các hệ thức thông thường bằng các hệ thức xác suất.

Chẳng hạn, $\sigma \leqslant [\sigma]$ được thay bởi

$$P\{\sigma \leqslant [\sigma]\} \geqslant P, \quad p \in [o, 1],$$

$f(\vec{\sigma}, \vec{x}, \ldots) = 0$ được thay bởi

$$P\{|f(\vec{\sigma}, \vec{x}, \ldots) - f_o(\vec{\sigma}, \vec{x}, \ldots)| \leqslant \delta\} \geqslant q, \; q \in [o, 1]$$

Trong đó $[\sigma]$ là ứng suất cho phép, f_o là đường hồi quy. Các xác suất p, q được coi như là các tham số điều khiển. Nó có thể chọn theo số liệu quan sát, theo các chỉ tiêu kinh tế kỹ thuật. Như ta sẽ thấy sau này p, q sẽ được điều chỉnh trong quá trình tính toán.

Trong nhiều bài toán cơ học, đại lượng phải tìm là hàm của $\vec{\theta}$, nghĩa là $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\theta})$.

Để phương pháp giải bài toán được đơn giản, ta biểu diễn $\vec{x}$ dưới dạng tham số hóa [6]

$$x(t, \vec{\theta}) = x(\vec{y}, \vec{\theta}) = \sum_k y_k(t) v_k(\vec{\theta}, t)$$

Trong đó $y_k(t)$ là các hàm tiền định chưa xác định, còn v_k là các hàm đã biết của $\vec{\theta}$, t.

Vì vậy, không mất tính chất tổng quát, từ nay ta chọn ẩn của bài toán là $\vec{x} = \{x_i\}$ không phụ thuộc vào $\vec{\theta}$

Gọi X là tập hợp xác định bởi các điều kiện tiền định của bài toán.

Hiển nhiên, ta tìm $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} \in X$ và thỏa mãn các hệ thức dạng xác suất

$$P[\varphi_j(\vec{x}, \vec{\theta}, t) \leqslant C_j] \geqslant p_j, \; j = \overline{1, n}.$$

Trong đó t được coi như là tham số.

Do đó bài toán độ tin cậy là xác định xác suất

$$P(\vec{x}, t) = P\left\{\begin{array}{l} P[\varphi_j(\vec{x}, \vec{\theta}, \tau) \leqslant C_j] \geqslant P_j \\ j = \overline{1, n} \\ \vec{x} \in X \quad \tau \in [o, t] \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Ký hiệu như trên, được hiểu theo nghĩa là xác suất đồng thời thỏa mãn tất cả các điều kiện đặt ra cho bài toán.

Bài toán độ tin cậy tối ưu, được đặt ra như sau: Hãy xác định $\vec{x} = \{x_i\}$ sao cho $P(\vec{x}\ t)$ đạt cực đại, nghĩa là tìm

$$P(t) = \max_{\{\vec{x}\}} P(\vec{x}, t) \qquad (2.3)$$

Trường hợp giải (1.1) ta tìm được $\vec{x} = \vec{f}\ (\vec{\theta}, t)$ thì (2.3) trùng với định nghĩa độ tin cậy của V. V. Bô-lô-chin [4, 5].

§3. PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH ĐỘ TIN CẬY CỦA HỆ TỐI ƯU

I. LƯỢC ĐỒ TÍNH TOÁN TỔNG QUÁT

Để xác định P(t) theo (2.3) ta tiến hành theo các bước sau:

Bước I: Chọn $P_1 = \min_j p_j$

giải bài toán quy hoạch ngẫu nhiên

$$(I)\begin{cases} P[\varphi_1(\vec{x}, \vec{\theta}, \tau) \leqslant C_1] \to \max \\ \text{với điều kiện}\begin{cases} P[\varphi_j \leqslant C_j] \geqslant P_j\ (I)_1 \\ j = \overline{2, n}\ (j \neq 1) \\ \vec{x} \in X, \tau \in [o, t]\ (I)_2 \end{cases}\end{cases}$$

Kết quả giải bài toán (I) có thể dẫn đến các trường hợp sau:

Giả sử $\max_{\{\vec{x}\}} P[\varphi_1 \leqslant C_1] = p_1^{max}$

a) Nếu $p_1^{max} < \min_{\{j\}} p_j = p_1$ thì bài toán vô nghiệm

b) Nếu $p_1^{max} = \min_{\{j\}} p_j = p_1$ thì $p(t) = p_1^{max}$

c) Nếu $p_1^{max} > \min_{\{j\}} p_j$ thì ta chuyển sang bước 2.

Bước 2: Thay điều kiện $P[\varphi_1 \leqslant C_1] \geqslant P_1$

bởi điều kiện $p[\varphi_1 < C_1] \geqslant p_1^{max}$

Ta lại chọn $p_2 = \min_{\{j \neq 1\}} \{p_j, p_1^{max}\}$

Giải bài toán

$$(II)\begin{cases} P[\varphi_2(\vec{x}, \vec{\theta}, t) \leqslant C_2] \to \max \\ \text{với các điều kiện } (I)_1^* \text{ và } (I)_2 \end{cases}$$

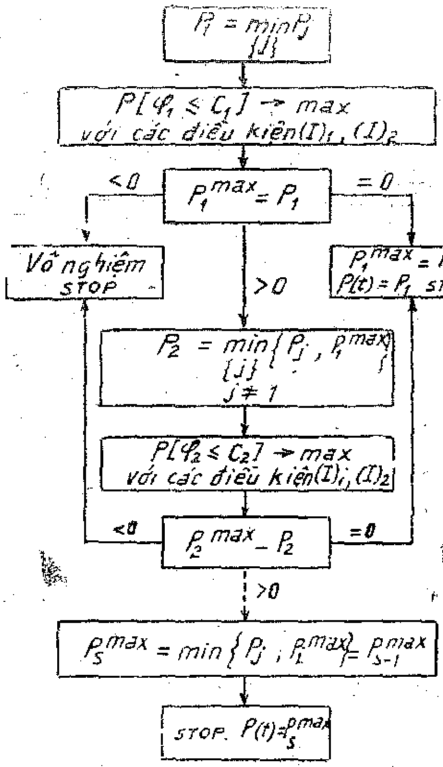
Trong đó ta hiểu $(I)_1^*$ là điều kiện $(I)_1$ khi thay p_1 bởi p_1^{max}. Khi tìm được P_2^{max} là lại xét các trường hợp a, b, c như bước 1. Quá trình tiếp tục tương tự.

Quá trình lặp dừng ở bước thứ S khi mà

$$p_s^{max} = \min_{\substack{j,i \\ j \neq K_i}} \{p_j, p_{K_i}^{max}\} = p_{s-1}^{max}$$

Các bài toán (I), (II) là những bài toán quy hoạch ngẫu nhiên, thuật toán giải chúng đã được trình bày trong [6, 7]

Sơ đồ khối



Hình 2

2. CHỨNG MINH SỰ PHÙ HỢP CỦA LƯỢC ĐỒ TRÊN

Thật vậy, sau khi giải bài toán (I)

– Nếu $p_1^{max} < \min_{\{j\}} p_j$ thì hiển nhiên bài toán vô nghiệm, vì không tồn tại $\vec{x}$ thỏa mãn $p[\varphi_1 \leqslant C_1] \geqslant p_1$

– Nếu $p_1^{max} = \min_{\{j\}} p_j = p_1$ quá trình dừng lại, vì không thể tìm được phương án tốt hơn để nâng cao xác suất.

– Nếu $p_1^{max} > \min_{\{j\}} p_j \equiv p_1$ thì $\exists\, \vec{x}$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài toán và thỏa mãn

$$p[\varphi_1 \leqslant C_1] \geqslant p_1^{max} > p_1$$

nghĩa là còn khả năng tăng xác suất, do đó ta thay p_1 bởi p_1^{max}, quá trình tiếp tục tương tự ở bước 2.

Ghi chú: Trên đây ta đã đã chọn trước các xác suất p_j, để điều kiện được « mềm » hơn ta có thể coi p_j là các ẩn của bài toán và

$$p_j^{\circ} \leqslant p_j \leqslant 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

Lúc đó ta chọn p_j là p_j°, quá trình tính toán tiến hành theo lược đồ trên.

Khối lượng tính toán theo sơ đồ trên phụ thuộc chủ yếu vào việc giải hai bài toán (I) và (II). Đó là hai bài toán quy hoạch ngẫu nhiên, khả năng giải chúng đã được bàn đến trong [6, 7]. Ở đây trong những điều kiện nhất định của bài toán cơ học các bài toán (I), (II) có thể đưa về bài toán quy hoạch tiền định.

§4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. XÁC ĐỊNH XÁC SUẤT CỦA KHẢ NĂNG CHỊU LỰC CỦA HỆ VỚI LỰC TỚI HẠN CHO TRƯỚC

Như ta đã biết, lực tới hạn trong bài toán trạng thái giới hạn P_{max} thỏa mãn các điều kiện

$$L\vec{\sigma} = P, \quad f(\vec{\sigma}) \leqslant C \; \forall \vec{x} \in V$$

Khi kể đến đặc trưng ngẫu nhiên của điều kiện dẻo. Bài toán đặt ra là:

Xác suất để hệ an toàn với tải trọng P_o nào đó là bao nhiêu?

(P_o có thể chọn là tải trọng phá hoại khi không kể đến yếu tố ngẫu nhiên)

Tức tìm $P[p_{max} \geqslant p_o]$

Bài toán đặt ra tương đương với bài toán sau:

$$\text{(III)} \begin{cases} P\{p \leqslant p_o\} \to \min \\ \text{Với các điều kiện} \begin{cases} L\vec{\sigma} = P \\ p\{f(\vec{\sigma}) \leqslant C\} \geqslant q. \; \vec{\sigma}, p \text{ là ẩn.} \end{cases} \end{cases}$$

Bài toán thích ứng cũng thành lập tương tự.

2. BÀI TOÁN THIẾT KẾ TỐI ƯU THEO ĐỘ TIN CẬY CHO TRƯỚC

$$\text{(IV)} \begin{cases} MJ(\vec{x}, \vec{\theta}) \to \max (\min) \\ \text{Với các điều kiện:} \; P \left\{ \begin{array}{l} P[\varphi_j \leqslant C_j] \geqslant P_j, \; j = \overline{1, n} \\ \vec{x} \in X \end{array} \right\} = P_T \end{cases}$$

Trong đó M là kỳ vọng, J là phiếm hàm mục tiêu, P_T là xác suất cho trước. Ta thay bài toán (IV) bởi bài toán tương đương sau:

$$\text{(IV)'} \begin{cases} MJ(\vec{x}, \vec{\theta}) \to \max (\min) \\ \text{Với các điều kiện} \begin{cases} P[\varphi_j \leqslant C_j] \geqslant P_j, \; J = \overline{1, n} \\ P_T \leqslant P_j \leqslant 1, \; \forall j \\ \vec{x} \in X \end{cases} \end{cases}$$

(IV)' là bài toán quy hoạch ngẫu nhiên.

KẾT LUẬN

Bài báo đã nêu bài toán và thuật toán để tìm độ tin cậy cực đại của một cơ hệ, trong trường hợp một số tham số của hệ chưa xác định (thuộc một miền cho trước) đó là một bài toán tối ưu của lý thuyết độ tin cậy. Lược đồ tính toán của V. V. Bôlôchin chỉ là trường hợp riêng.

Do khuôn khổ bài báo chúng tôi không nêu thí dụ bằng số, vấn đề khả năng giải bài toán theo lược đồ nêu ra, phụ thuộc vào khả năng giải bài toán quy hoạch ngẫu nhiên [6]. Ngày nay đã có nhiều thuật toán tốt để giải các bài toán đó. Trong điều kiện cụ thể của bài toán cơ học, thì việc giải bài toán lại dễ dàng hơn.

Địa chỉ:
Trường Đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 21/3/1984

(xem tiếp bìa 3)