Tạp chí Cơ Học T. VII, 1985 Số 2 (trang 13 — 20)

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BIẾN PHÂN THEO BIÊN ĐỘ – PHA Ở HỆ DAO ĐỘNG Á TUYẾN NHIỀU BẬC TỰ DO

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

§ MỞ ĐẦU

Trong [1, 2] đã đề xuất và xây dựng phương pháp lập hệ phương trình biến phân theo biên độ-pha, của chế độ cân bằng cho hệ thông số á tuyến một bậc tự do.

Trong bài báo này mở rộng kết quả thu được cho trường hợp nhiều bậc tự do ở chế độ dao động trong đó vắng mặt một số tần số như là có một số tọa độ (pháp) ở trạng thái cân bằng.

§ 1. HỆ KHẢO SÁT VÀ HỆ TRUNG BÌNH THEO BIÊN ĐỘ-PHA

Cho hệ dao động á tuyến, mô tả — ở tọa độ pháp — bởi hệ phương trình vi phân

$$\begin{aligned}
&\ddot{X}_i + \bar{P}_i^2 X_i = \varepsilon \bar{F}_i(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega t, \omega t),\\
&\ddot{Y}_k + Q_k^2 Y_k = \varepsilon G_k(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega t, \omega t),\\
&\ddot{x}_\alpha + \bar{p}_\alpha^2 x_\alpha = \varepsilon \bar{f}_\alpha(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega t, \omega t),\\
&\ddot{y}_\gamma + b_\gamma^2 y_\gamma = \varepsilon g_\gamma(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega t, \omega t).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N;\; k = 1, 2, \ldots, M;\; \alpha = 1, 2, \ldots, n;\; \gamma = 1, 2, \ldots, m$$

trong đó: ε — tham số bé; t — biến thời gian; dấu (.) trên các chữ — ký hiệu đạo hàm theo thời gian; $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_M)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — các tọa độ pháp; $\bar{P}_i$, Q_k, $\bar{p}_\alpha$, q_γ — các tần số riêng; $\Omega = \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_s)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ — các tần số kích động; $\bar{F}_i$, G_k, $\bar{f}_\alpha$, g_γ — các hàm biểu diễn dưới dạng tổng hữu hạn Phuriê của Ωt, ωt chu kỳ 2π với hệ số là đa thức của các tọa độ và tốc độ pháp. Giả thiết: Q_k, q_γ — các tần số không cộng hưởng; $\bar{P}_i$, $\bar{p}_\alpha$ — các tần số thỏa mãn các hệ thức cộng hưởng sau:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} d_i^{(\chi)} P_i + \sum_{e=1}^{s} l_e^{(\chi)} \Omega_e = 0, \; (\chi = 1, 2, \ldots, \zeta),\\
&p_\alpha = \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\omega_\alpha, \; (\alpha = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó: $P_i \approx \bar{P}_i$, $p_\alpha \approx \bar{p}_\alpha$, $d_i^{(\chi)}$, $l_e^{(\chi)}$ — các hệ số nguyên (tương ứng mỗi trị số χ, các hệ số này không đồng thời triệt tiêu và có tổng trị số tuyệt đối nhỏ hơn một số nào đó); m_α, n_α — hai số dương nguyên tố cùng nhau. Viết hệ (1.1) dưới dạng:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{X}_i + P_i^2 X_i = \varepsilon F_i(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega t, \omega t),\\
&\ddot{Y}_k + Q_k^2 Y_k = \varepsilon G_k(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega t, \omega t),\\
&\ddot{x}_\alpha + p_\alpha^2 x_\alpha = \varepsilon f_\alpha(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega t, \omega t),\\
&\ddot{y}_\gamma + q_\gamma^2 y_\gamma = \varepsilon g_\gamma(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega t, \omega t),
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

trong đó: $F_i = \overline{F}_i + (P_i^2 - \overline{P}_i^2) X_i \;;\; f_\alpha = \overline{f}_\alpha (p_\alpha^2 - \overline{p}_\alpha^2) x_\alpha$ (1.5)

Giả thiết các hàm f_α thỏa mãn các tính chất ở hệ cộng hưởng thông số, cụ thể là các số hạng không chứa x_α, $\dot{x}_\alpha$ (có được bằng cách cho $x_\alpha = \dot{x}_\alpha = 0$) không phải là acmônic thứ nhất của p_α với hệ số là đa thức bậc chẵn đối với các tọa độ và tốc độ pháp X, $\dot{X}$ và bậc chẵn đối với từng cặp tọa độ và tốc độ pháp khác. Dưới dạng khai triển, chúng ta có:

$$
f_\alpha = (\triangle_\alpha + f_\alpha^{(11)}) x_\alpha + (h_\alpha + f_\alpha^{(12)}) \dot{x}_\alpha + \frac{1}{2} f_\alpha^{(2)}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.6}
$$

trong đó: $\triangle_\alpha$, h_α, $f_\alpha^{(11)}$, $f_\alpha^{(12)}$ – các hàm không chứa x_α, $\dot{x}_\alpha$ tương ứng không chứa và chỉ chứa các số hạng là acmônic thứ hai của p_α với các hệ số là đa thức bậc chẵn đối với các tọa độ và tốc độ pháp X, $\dot{X}$ và bậc chẵn đối với từng cặp tọa độ và tốc độ pháp khác; $f_\alpha^{(2)}$ – các hàm gồm các số hạng chứa x_α, $\dot{x}_\alpha$ từ bậc hai trở lên và những số hạng không chứa x_α, $\dot{x}_\alpha$ nhưng không phải là acmônic thứ nhất đã nói trên của p_α.

Đưa vào các biến biên độ – pha (R_i, E_i), (S_k, Φ_k), (r_α, ψ_α), $(\sigma_\gamma, \varphi_\gamma)$ theo các hệ thức:

$$
\begin{aligned}
X_i &= R_i \cos(P_i t - E_i), & \dot{X}_i &= -P_i R_i \sin(P_i t - E_i),\\
Y_k &= S_k \cos(Q_k t - \Phi_k), & \dot{Y}_k &= -Q_k S_k \sin(Q_k t - \Phi_k),\\
x_\alpha &= r_\alpha \cos(p_\alpha t - \psi_\alpha), & \dot{x}_\alpha &= -p_\alpha r_\alpha \sin(p_\alpha t - \psi_\alpha),\\
y_\gamma &= \sigma_\gamma \cos(q_\gamma t - \varphi_\gamma), & \dot{y}_\gamma &= -q_\gamma \sigma_\gamma \sin(q_\gamma t - \varphi_\gamma),
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Dễ dàng lập được và nhận thấy hệ phương trình trung bình có dạng:

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_i &= \frac{-\varepsilon}{P_i} \langle F_i \sin(P_i t - E_i) \rangle = \frac{\varepsilon}{P_i} \tilde{F}_i(R, E, S^2, r^2, \sigma^2),\\
R_i \dot{E}_i &= \frac{\varepsilon}{P_i} \langle F_i \cos(P_i t - E_i) \rangle = \frac{\varepsilon}{P_i} \tilde{F}_i'(R, E, S^2, r^2, \sigma^2),\\
\dot{S}_k &= \frac{-\varepsilon}{Q_k} \langle G_k \sin(Q_k t - \Phi_k) \rangle = \frac{\varepsilon}{Q_k} S_k \tilde{G}_k(R^2, S^2, r^2, \sigma^2),\\
S_k \dot{\Phi}_k &= \frac{\varepsilon}{Q_k} \langle G_k \cos(Q_k t - \Phi_k) \rangle = \frac{\varepsilon}{Q_k} S_k \tilde{G}_k'(R^2, S^2, r^2, \sigma^2),\\
\dot{r}_\alpha &= \frac{-\varepsilon}{p_\alpha} \langle f_\alpha \sin(p_\alpha t - \psi_\alpha) \rangle = \frac{\varepsilon}{2p_\alpha} r_\alpha \tilde{f}_\alpha(R^2, S^2, r^2, \xi_\alpha, \sigma^2),\\
r_\alpha \dot{\psi}_\alpha &= \frac{\varepsilon}{p_\alpha} \langle f_\alpha \cos(p_\alpha t - \psi_\alpha) \rangle = \frac{\varepsilon}{2p_\alpha} r_\alpha \tilde{f}_\alpha'(R^2, S^2, r^2, \xi_\alpha, \sigma^2),\\
\dot{\sigma}_\gamma &= \frac{-\varepsilon}{q_\gamma} \langle g_\gamma \sin(q_\gamma t - \varphi_\gamma) \rangle = \frac{\varepsilon}{q_\gamma} \sigma_\gamma \tilde{g}_\gamma(R^2, S^2, r^2, \sigma^2),\\
\sigma_\gamma \dot{\varphi}_\gamma &= \frac{\varepsilon}{q_\gamma} \langle g_\gamma \cos(q_\gamma t - \varphi_\gamma) \rangle = \frac{\varepsilon}{q_\gamma} \sigma_\gamma \tilde{g}_\gamma'(R^2, S^2, r^2, \sigma^2),
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

trong đó: $\langle . \rangle$ — ký hiệu trung bình theo thời gian; các hàm có dấu ~ phụ thuộc các biến ghi trong móc vòng ( ) với quy ước: R^2 — bậc chẵn đối với các biến $R_1, R_2, \ldots, R_N$; S^2, r^2, σ^2 — bậc chẵn đối với từng biến S_k, r_α, σ_γ.

Theo cấu trúc (1.6), có thể viết khai triển:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\alpha &= \tilde{h}_\alpha p_\alpha - (\tilde{B}'_\alpha + p_\alpha \tilde{C}_\alpha)\cos 2\psi_\alpha + (\tilde{B}_\alpha - p_\alpha \tilde{C}'_\alpha)\sin 2\psi_\alpha + r_\alpha \tilde{f}_\alpha^{(2)},\\ \tilde{f}'_\alpha &= \tilde{\Delta}_\alpha + (\tilde{B}_\alpha - p_\alpha \tilde{C}'_\alpha)\cos 2\psi_\alpha + (\tilde{B}'_\alpha + p_\alpha \tilde{C}_\alpha)\sin 2\psi_\alpha + r_\alpha \tilde{f}'^{(2)}_\alpha,\end{aligned} \tag{1.9}$$

trong đó:

$$\tilde{h}_\alpha = \tilde{h}_\alpha(R^2, S^2, r^2_{-\alpha}, \sigma^2) = \langle h_\alpha \rangle;\ \tilde{\Delta}_\alpha = \tilde{\Delta}_\alpha(R^2, S^2, r^2_{-\alpha}, \sigma^2) = \langle \Delta_\alpha \rangle,$$

$$\tilde{B}_\alpha = \tilde{B}_\alpha(R^2, S^2, r^2_{-\alpha}, \sigma^2) = \langle f_\alpha^{(11)} \cos 2p_\alpha t \rangle;\ \tilde{B}'_\alpha = \tilde{B}'_\alpha(R^2, S^2, r^2_{-\alpha}, \sigma^2) = \langle f_\alpha^{(11)} \sin 2p_\alpha t \rangle,$$

$$\tilde{C}_\alpha = \tilde{C}_\alpha(R^2, S^2, r^2_{-\alpha}, \sigma^2) = \langle f_\alpha^{(12)} \cos 2p_\alpha t \rangle;\ \tilde{C}'_\alpha = \tilde{C}'_\alpha(R^2, S^2, r^2_{-\alpha}, \sigma^2) = \langle f_\alpha^{(12)} \sin 2p_\alpha t \rangle,$$

là các hàm không phụ thuộc r_α, bậc chẵn đối với các biến R và đối với từng biến S, r, σ khác;

và:

$$r_\alpha^2 \tilde{f}_\alpha^{(2)}(R^2, S^2, r^2, \psi_\alpha, \sigma^2) = \langle f_\alpha^{(2)} \sin(p_\alpha t - \psi_\alpha) \rangle;$$

$$r_\alpha^2 \tilde{f}'^{(2)}_\alpha = \langle f_\alpha^{(2)} \cos(p_\alpha t - \psi_\alpha) \rangle$$

§2. CHẾ ĐỘ KHẢO SÁT, HỆ BIẾN PHÂN, CÁC ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH

Giả thiết tồn tại chế độ dao động trong đó có mặt các tần số P, Q nhưng vắng mặt các tần số p, q nghĩa là các tọa độ X, Y dao động trong khi các tọa độ x, y ở trạng thái cân bằng. Khi đó có thể viết hệ (1.8) dưới dạng:

$$\dot{R}_i = \frac{\varepsilon}{P_i} \tilde{F}_i(R, E, S^2, r^2, \sigma^2),$$

$$\dot{E}_i = \frac{\varepsilon}{P_i R_i} \tilde{F}'_i(R, E, S^2, r^2, \sigma^2),$$

$$\dot{S}_k = \frac{\varepsilon}{Q_k} S_k \tilde{G}_k(R^2, S^2, r^2, \sigma^2),$$

$$\dot{\Phi}_k = \frac{\varepsilon}{Q_k} \tilde{G}'_k(R^2, S^2, r^2, \sigma^2),$$

$$\dot{r}_\alpha = \frac{\varepsilon}{2p_\alpha} r_\alpha \{\tilde{h}_\alpha p_\alpha - (\tilde{B}'_\alpha + p_\alpha \tilde{C}_\alpha)\cos 2\psi_\alpha + (\tilde{B}_\alpha - p_\alpha \tilde{C}'_\alpha)\sin 2\psi_\alpha + r_\alpha \tilde{f}_\alpha^{(2)}\},$$

$$r_\alpha \dot{\psi}_\alpha = \frac{\varepsilon}{2p_\alpha} r_\alpha \{\Delta_\alpha + (\tilde{B}_\alpha - p_\alpha \tilde{C}'_\alpha)\cos 2\psi_\alpha + (\tilde{B}'_\alpha + p_\alpha \tilde{C}_\alpha)\sin 2\psi_\alpha + r_\alpha \tilde{f}'^{(2)}_\alpha\},$$

$$\dot{\sigma}_\alpha = \frac{\varepsilon}{q_\gamma} \sigma_\gamma \tilde{g}_\gamma(R^2, S^2, r^2, \sigma^2),$$

$$\sigma_\gamma \dot{\varphi}_\gamma = \frac{\varepsilon}{q_\gamma} \sigma_\gamma \tilde{g}'_\gamma(R^2, S^2, r^2, \sigma^2). \tag{2.1}$$

Chế độ dao động dừng nói trên tương ứng nghiệm:

$$r_{\alpha_0} = 0,\ \sigma_{\gamma 0} = 0,\ (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \gamma = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.2}$$

và R_{i0}, E_{i_0}, S_{k_0} thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_i(R_o, E_o, S_o^2, O, O) = 0, \\ &\tilde{F}_i'(R_o, E_o, S_o^2, O, O) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, N), \\ &\tilde{G}_k(R_o^2, S_o^2, O, O) = 0, \ (k = 1, 2, \ldots, M). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Các góc lệch pha Ψ_α, φ_γ là bất kỳ còn góc lệch pha Φ_{ko} được xác định bởi hệ thức

$$\Phi_{ko} = \frac{\varepsilon}{Q_k} \int_0^t \tilde{G}_k'(R_o^2, S_o^2, O, O)dt + \Phi_{k_o}(O), \ (k = 1, 2, \ldots, M) \tag{2.4}$$

trong đó: $\Phi_{ko}(O)$ — giá trị ban đầu của Φ_{ko}.

Tính ổn định của chế độ dao động dừng liên quan đến quy luật biến thiên của các biến R, E, S, Φ, r, σ lân cận các giá trị R_o, E_o, S_o, Φ_o, r_o, $\sigma_o = 0$. Do đó, theo cách thông thường lập hệ biến phân của chế độ dao động (thực sự) dừng và cách lập hệ biến phân của chế độ cân bằng đã tiến hành ở [2], có chú ý đến cấu trúc của vế phải hệ (2.1) và các hệ thức (2.2 — 2.4), hệ biến phân của chế độ dao động đang được khảo sát là:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{R}_i &= \frac{\varepsilon}{P_i}\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial R_j}\delta R_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial E_j}\delta E_j + \sum_{e=1}^{M}\frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial S_e}\delta S_e\right\}, \\
\delta\dot{E}_i &= \frac{\varepsilon}{P_iR_{i_o}}\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\tilde{F}_i'}{\partial R_j}\delta R_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\tilde{F}_i'}{\partial E_j}\delta E_j + \sum_{e=1}^{M}\frac{\partial\tilde{F}_i'}{\partial S_e}\delta S_e\right\}, \\
\delta\dot{S}_k &= \frac{\varepsilon}{Q_k}S_{k_o}\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\tilde{G}_k}{\partial R_j}\delta R_j + \sum_{e=1}^{M}\frac{\partial\tilde{G}_k}{\partial S_e}\delta S_e\right\}, \\
\delta\dot{\Phi}_k &= \frac{\varepsilon}{Q_k}\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\tilde{G}_k'}{\partial R_j}\delta R_j + \sum_{e=1}^{M}\frac{\partial\tilde{G}_k'}{\partial S_e}\delta S_e\right\}, \\
\delta\dot{r}_\alpha &= \frac{\varepsilon}{2p_\alpha}\delta r_\alpha\left\{\tilde{h}_\alpha p_\alpha - (\tilde{B}_\alpha' + p_\alpha\tilde{C}_\alpha)\cos 2\psi_\alpha + (\tilde{B}_\alpha - p_\alpha\tilde{C}_\alpha')\sin 2\psi_\alpha\right\}, \\
\dot{\psi}_\alpha &= \frac{\varepsilon}{2p_\alpha}\left\{\tilde{\Delta}_\alpha + (\tilde{B}_\alpha - p_\alpha\tilde{C}_\alpha')\cos 2\psi_\alpha + (\tilde{B}_\alpha' + p_\alpha\tilde{C}_\alpha)\sin 2\psi_\alpha\right\}, \\
\delta\dot{\sigma}_\gamma &= \frac{\varepsilon}{q_\gamma}\delta\sigma_\gamma\cdot\tilde{g}_\gamma, \\
\dot{\varphi}_\gamma &= \frac{\varepsilon}{q_\gamma}\tilde{g}_\gamma',
\end{aligned} \tag{2.5}$$

trong đó các đạo hàm riêng và các hàm $\tilde{h}_\alpha$, $\tilde{\Delta}_\alpha$, $\tilde{B}_\alpha$, $\tilde{B}_\alpha'$, $\tilde{C}_\alpha$, $\tilde{C}_\alpha'$ và $\tilde{g}_\gamma$, $\tilde{g}_\gamma'$ được tính tại các giá trị R_o, E_o, S_o, $r_o = 0$, $\sigma_o = 0$. Các điều kiện đủ để có ổn định tiệm cận là:

1. Phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon}{P_i}\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial R_j} - \lambda\delta_{ij} & \frac{\varepsilon}{P_i}\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial E_j} & \frac{\varepsilon}{P_i}\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial S_e} \\ \frac{\varepsilon}{P_i R_{i_0}}\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial R_j} & \frac{\varepsilon}{P_i R_{i_0}}\frac{\partial \widetilde{F}_i'}{\partial E_j} - \lambda\delta_{ij} & \frac{\varepsilon}{P_i R_{i_0}}\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial S_e} \\ \frac{\varepsilon}{Q_k} S_{k_0}\frac{\partial \widetilde{G}_k}{\partial R_j} & 0 & \frac{\varepsilon}{Q_k} S_{k_0}\frac{\partial \widetilde{G}_k}{\partial S_e} - \lambda\delta_{ke} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.6)$$

có các nghiệm λ với phần thực âm:

$$R_e(\lambda) < 0 \qquad (2.7)$$

trong đó: δ_{ij}, δ_{ke} — các ký hiệu Crônêke.

2. $$\widetilde{g}_\gamma < 0, \ (\gamma = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.8)$$

3. $$\widetilde{h}_\alpha < 0, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.9)$$

$$\widetilde{h}_\alpha^2 p_\alpha^2 + \widetilde{\Delta}_\alpha^2 - (\widetilde{B}_\alpha' + p_\alpha\widetilde{C}_\alpha)^2 - (\widetilde{B}_\alpha - p_\alpha\widetilde{C}_\alpha')^2 > 0, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.10)$$

Như đã nhận xét ở [2], có thể thay điều kiện (2.10) bởi điều kiện là hệ phương trình đại số:

$$\begin{aligned} (\widetilde{B}_\alpha' + p_\alpha\widetilde{C}_\alpha)\, u_\alpha - (\widetilde{B}_\alpha - p_\alpha\widetilde{C}_\alpha')\, v_\alpha &= h_\alpha p_\alpha, \\ (\widetilde{B}_\alpha - p_\alpha\widetilde{C}_\alpha')\, u_\alpha + (\widetilde{B}_\alpha' + p_\alpha\widetilde{C}_\alpha)\, v_\alpha &= -\Delta_\alpha, \end{aligned} \qquad (2.11)$$

có nghiệm u_α, v_α thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\frac{1}{p_\alpha^2} = \frac{1}{u_\alpha^2 + v_\alpha^2} < 1 \qquad (2.12)$$

với quy ước là khi: $(\widetilde{B}_\alpha^2 + p_\alpha C_\alpha)^2 + (\widetilde{B}_\alpha - p_\alpha\widetilde{C}_\alpha)^2 = 0$, chúng ta xem như $\frac{1}{p_\alpha^2} < 1$ nghĩa là xem như (2.12) thỏa mãn.

Cũng như đã chú ý ở [3], khi (2.7) thỏa mãn, các biến δR, δS tiến tới không theo luật mũ nên biến phân $\delta\Phi_k$ của góc lệch pha Φ_{k_0} tiến tới giá trị hằng.

§ 3. VÍ DỤ

— Để minh họa, xét hệ dao động hai bậc tự do mô tả bởi hệ phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 &= \varepsilon(h_1\dot{x}_1 - k_1 x_1^3 + \triangle_1 x_1 + m_1 x_1 x_2^2 + n_1\dot{x}_1 x_2^2 + 2f x_1 \cos 2p_1 t), \\ \ddot{x}_2 + p_2^2 x_2 &= \varepsilon(h_2\dot{x}_2 - k_2 x_2^3 + \triangle_2 x_2 + m_2 x_2 x_1^2 + n_2\dot{x}_2 x_1^2), \end{aligned} \qquad (3.1)$$

trong đó: p_1, p_2 — các tần số riêng không nội cộng hưởng: $\triangle_1$, $\triangle_2$, h_1, k_1, m_1, n_1, f, h_2, k_2, m_2, n_2 — các hằng số.

Hệ phương trình trung bình theo biên độ – pha là:

$$
\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= \frac{\varepsilon}{2p_1} r_1 \left(h_1p_1 - \frac{3}{4} k_1p_1^3r_1^2 + \frac{1}{2} n_1p_1r_2^2 + f\sin 2\varphi_1 \right), \\
r_1\dot{\varphi}_1 &= \frac{\varepsilon}{2p_1} r_1 \left(\triangle_1 + \frac{1}{2} m_1r_2^2 + f\cos 2\varphi_1 \right), \\
\dot{r}_2 &= \frac{\varepsilon}{2p_2} r_2 \left(h_2p_2 - \frac{3}{4} k_2p_2^3r_2^2 + \frac{1}{2} n_2p_2r_1^2 \right), \\
r_2\dot{\varphi}_2 &= \frac{\varepsilon}{2p_2} r_2 \left(\triangle_2 + \frac{1}{2} m_2r_1^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Chế độ cân bằng tương ứng nghiệm $r_{10} = r_{20} = 0$ (φ_1, φ_2 – bất kỳ) và có hệ biến phân:

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{r}_1 &= \frac{\varepsilon}{2p_1}\delta r_1(h_1p_1 + f\sin 2\varphi_1), \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\varepsilon}{2p_1}(\Delta_1 + f\cos 2\varphi_1), \\
\delta\dot{r}_2 &= \frac{\varepsilon}{2p_2}\delta r_2 h_2p_2, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\varepsilon}{2p_2}\Delta_2.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Các điều kiện ổn định tiệm cận là:

$$h_1 < 0,\ h_1^2p_1^2 + \Delta_1^2 - f^2 > 0,\ h_2 < 0. \tag{3.4}$$

Chế độ dao động của riêng tọa độ x_1 tương ứng nghiệm $r_{20} = 0$ với r_{10}, φ_{10} xác định từ hệ phương trình:

$$h_1p_1 - \frac{3}{4} k_1p_1^3r_{10}^2 + f\sin 2\varphi_{10} = 0 .\ \Delta_1 + f\cos 2\varphi_{10} = 0. \tag{3.5}$$

Hệ biến phân là:

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{r}_1 &= \frac{\varepsilon}{2p_1} r_{10}\left(-\frac{3}{2} k_1p_1^3r_{10}\delta r_1 + 2f\cos 2\varphi_{10}\delta\varphi_1 \right), \quad \delta\dot{\varphi}_1 = \frac{-\varepsilon}{p_1} f\sin 2\varphi_{10} \cdot \delta\varphi_1, \\
\delta\dot{r}_2 &= \frac{\varepsilon}{2p_2}\delta r_2 \left(h_2p_2 + \frac{1}{2} n_2p_2r_{10}^2 \right), \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\varepsilon}{2p_2}\left(\Delta_2 + \frac{1}{2} m_2r_{10}^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

và điều kiện ổn định tiệm cận là:

$$k_1 > 0,\ f\sin 2\varphi_{10} > 0,\ h_2p_2 + \frac{1}{2} h_2p_2r_{10}^2 < 0. \tag{3.7}$$

Chế độ dao động của riêng tọa độ x_2 tương ứng nghiệm $r_{10} = 0$ với, r_{20}, φ_{20} xác định từ hệ phương trình:

$$h_2 - \frac{3}{4} k_2p_2^2r_{20}^2 = 0,\ \varphi_{20} = \frac{\varepsilon}{2p_2}\Delta_2 t + \varphi_{20}(0). \tag{3.8}$$

Hệ biến phân là:

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{r}_1 &= \frac{\varepsilon}{2p_1}\delta r_1 \left(h_1p_1 + \frac{1}{2} n_1p_1r_{20}^2 + f\sin 2\varphi_1 \right), \\
\dot{\varphi}_1 &= \frac{\varepsilon}{2p_1}\left(\Delta_1 + \frac{1}{2} m_1r_{20}^2 + f\cos 2\varphi_1 \right), \\
\delta\dot{r}_2 &= \frac{-3\varepsilon}{4} r_{20}^2p_2^2\delta r_2, \delta\dot{\varphi}_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

và điều kiện ổn định là:

$$h_1p_1 + \frac{1}{2} n_1p_1r_{20}^2 < 0, \tag{3.10}$$

$$\left(h_1p_1 + \frac{1}{2} n_1p_1r_{20}^2\right)^2 + \left(\Delta_1 + \frac{1}{2} m_1r_{20}^2\right)^2 - f^2 > 0.$$

Chế độ dao động của toàn hệ (của cả hai tọa độ) tương ứng các giá trị r_{10}, φ_{10} r_{20}, φ_{20} xác định từ hệ phương trình:

$$h_1p_1 - \frac{3}{4} k_1p_1^3r_{10}^2 = \frac{1}{2} n_1p_1r_{20}^2 + f\sin 2\varphi_{10} = 0,$$

$$\Delta_1 + \frac{1}{2} m_1r_{20}^2 + f\cos 2\varphi_{10} = 0,$$

$$h_2p_2 - \frac{3}{4} k_2p_2^3r_{20}^2 + \frac{1}{2} n_2p_2r_{10}^2 = 0, \tag{3.11}$$

$$\varphi_2 = \frac{\varepsilon}{2p_2}\left(\Delta_2 + \frac{1}{2} m_2r_{10}^2\right)t + \varphi_{20}(0).$$

Hệ phương trình biến phân có dạng quen biết:

$$\delta\dot{r}_1 = \frac{\varepsilon}{2p_1}\left\{\left(h_1p_1 - \frac{9}{4} k_1p_1^2r_{10}^2 + \frac{1}{2} n_1p_1r_{20}^2 + f\sin 2\varphi_{10}\right)\delta r_1 + \right.$$

$$\left. + 2fr_{10}\cos 2\varphi_{10}\delta\varphi_1 + n_1p_1r_{20}r_{10}\delta r_2\right\},$$

$$\delta\dot{\varphi}_1 = \frac{\varepsilon}{2p_1}\left\{-2f\sin 2\varphi_{10}\,.\,\delta\varphi_1 + m_1r_{20}\delta r_2\right\}, \tag{3.12}$$

$$\delta\dot{r}_2 = \frac{\varepsilon}{2p_2}\left\{n_2p_2r_{10}r_{20}\delta r_1 + \left(h_2p_2 - \frac{9}{4} k_2p_2^3r_{20}^2 + \frac{1}{2} n_2p_2r_{10}^2\right)\delta r_2\right\},$$

$$\delta\dot{\varphi}_2 = \frac{\varepsilon}{2p_2} m_2r_{10}\delta r_1,$$

và từ đó có thể dễ dàng lập phương trình đặc trưng để tìm ra các điều kiện ổn định tiệm cận.

Qua ví dụ có thể thấy rõ là khi khảo sát chế độ dao động trong đó vắng mặt một số tần số, việc sử dụng biến biên độ – pha sẽ vẫn giữ được nhiều thuận lợi nếu chú ý đến những đặc điểm của hệ biến phân trong trường hợp này.

KẾT LUẬN

Trong bài báo hoàn toàn sử dụng các biến biên độ pha, hệ phương trình biến phân được thực sự thiết lập và trong các tần số vắng mặt, ngoài các tần số không cộng hưởng còn có các tần số cộng hưởng thông số.

Nhận ngày 5/3/1984

Địa chỉ

Trường Đại học Bách khoa

Hà Nội

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN ĐÌNH. Về một phương pháp lập hệ phương trình biến phân theo biên độ – pha của chế độ cân bằng. Tạp chí CƠ HỌC Số 2. 1984.
2. NGUYỄN VĂN ĐÌNH. Hệ phương trình biến phân theo biên độ – pha của chế độ cân bằng ở hệ thông số. Tạp chí CƠ HỌC, Số 4, 1984.
3. МАЛКИН И.Г. Некоторые задачи теорий нелинейных колебаний. Госуд. Изд. Москва, 1956.

РЕЗЮМЕ

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ ПО АМПЛИТУДЕ-ФАЗЕ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Распространяются полученные в [1, 2] результаты для квазилинейной колебательной системы с многими степенями свободы. Были составлена система уравнений в вариациях по амплитуде-фазе и условия устойчивости колебательного режима, при котором отсутствуют некоторые нерезонансные и параметрические резонансные частоты.

BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG CỦA TÀU HAI THÂN TRÊN SÓNG ĐIỀU HÒA

(Tiếp trang 12)

4. MIKIO TAKAKI «On the hydrodynamic forces and moments acting on the two-dimentional bodies oscillating in shallow water». Report of research institute for applied mechanics. Vol. 24 N° – 78, 1977.
5. Ship motion and sea load.
6. ДУБРОВСКИЙ В. А. Исследование волкового сопротивления катамарана. Судостроение. №7, 1972.
7. «ПРОЧНОСТИ СУДОВ». Внешние силы, действующие на двухкорпусное судно на волнении; Л., Судостроение, 1975.
8. ХАСКИНД М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля. Изд. Наука, Москва, 1973.

SUMMARY

ABOUT MOTIONS OF A CATAMARAN IN REGULAR WAVES

In this paper, the author uses Khaskind method with Frank Close Fit method to calculate motions and loads for a ship and a catamaran at zero speed in regular waves of arbitrary frequency and direction. The hydrodynamical interaction between the two hulls of a catamaran has been taken into consideration. Comparisons with model tests have given good agreement.