Tạp Chí Cơ Học T. VII, 1985 Số 2 (trang 1—7)

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH NGHIỆM BÀI TOÁN PHẲNG ĐỘNG ĐÀN HỒI – DẺO

NGUYỄN ĐĂNG BÍCH

Việc xác định nghiệm bài toán phẳng động đàn hồi thường chia làm hai bước:

1. Tìm nghiệm thỏa mãn phương trình chuyển động, nghiệm này chứa các hàm tùy ý đóng vai trò như các hằng số tích phân, ta gọi là đồng nhất thức. Như vậy đồng nhất thức là biểu thức biểu diễn nghiệm, chứa các hàm tùy ý, thỏa mãn phương trình chuyển động một cách đồng nhất.

2. Thỏa mãn các điều kiện đặt ra đối với bài toán, điều kiện đặt ra có thể là điều kiện biên, hoặc điều kiện biên và một phần điều kiện đầu v.v... Thỏa mãn các điều kiện này cho phép xác định các hàm tùy ý có mặt trong đồng nhất thức nói trên.

Bài báo này thực hiện bước thứ nhất trong việc xác định nghiệm của bài toán là xây dựng đồng nhất thức có lực khối, chứa các hàm tùy ý nhiều hơn hai để ngoài điều kiện biên, có thể thỏa mãn được cả điều kiện đầu mà các phương pháp [1, 9, 3] thường bỏ qua.

Thêm vào đó khi xác định nghiệm bài toán phẳng động đàn dẻo thường sai phân trực tiếp, hoặc dùng phương pháp đặc trưng để giải như [4, 5, 6].

Bài báo này trình bày một phương pháp gần đúng khác, trong đó mỗi bước gần đúng là giải một bài toán động đàn hồi có lực khối khác nhau và có thể dùng đồng nhất thức có lực khối thiết lập được ở trên để tìm nghiệm.

§ 1. LIÊN HỆ ỨNG SUẤT, BIẾN DẠNG VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH MÔ TẢ BÀI TOÁN

I. LIÊN HỆ ỨNG SUẤT BIẾN DẠNG

Theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ trong trường hợp phẳng ta có:

$$e_{ij} = \frac{1}{2G(1-\omega)}\left[\sigma_{ij} - \frac{3\nu + (1-2\nu)\omega}{3-(1-2\nu)\omega}\,\sigma\,\delta_{ij}\right], \tag{1.1}$$

$$\sigma_u = 3G\,e_u(1-\omega), \tag{1.2}$$

trong đó $\omega = \omega(e_u)$, $\sigma = \sigma_{ii}$; $i, j = 1, 2$. (1.3)

e_{ij} trong (1.1) là biến dạng toàn phần, được tách thành biến dạng phụ thuộc ứng suất theo quy luật đàn hồi và biến dạng dẻo

$$e_{ij} = e^{e}_{ij} + e^{p}_{ij} \tag{1.4}$$

trong đó e^{e}_{ij} có được khi trong (1.1) cho $\omega = 0$

$$e^{e}_{ij} = \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \nu\sigma\delta_{ij}) \tag{1.5}$$

và e^{d}_{ij} có được khi lấy (1.1) trừ đi (1.5)

$$e^{p}_{ij} = \frac{\omega}{2G(1-\omega)}\left[\sigma_{ij} - \frac{1+\nu+\nu(1-2\nu)(1-\omega)}{3-(1-2\nu)\omega}\sigma\,\delta_{ij}\right] \quad (1.6)$$

$e^{p}_{ij} = 0$ khi $\omega = 0$

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MÔ TẢ BÀI TOÁN

a) Phương trình chuyển động và phương trình tương thích viết theo ứng suất

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma = -\frac{\rho}{1-\nu}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\rho}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{p}_{xx} + e^{p}_{yy}) + \frac{2G}{1-\nu}\left[2\frac{\partial^2 e^{p}_{xy}}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 e^{p}_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e^{p}_{yy}}{\partial x^2}\right],$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} = -\rho\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\right) + 2\rho\frac{\partial^2 e^{p}_{xx}}{\partial t^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{yy} + 2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma =$$

$$= -\rho\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y}\right) + \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{p}_{xx} + e^{p}_{yy}). \quad (1.7)$$

trong đó C_1, C_2 là vận tốc truyền sóng dọc và ngang trong môi trường đàn hồi, σ tính theo (1.3), e^{p}_{ij} tính theo (1.6), X_1, X_2 là các thành phần lực khối, các chỉ số i, j, thì chỉ số 1 ứng với x chỉ số 2 ứng với y.

b) Đường cong biến dạng duy nhất (1.2)

§ 2. XÂY DỰNG CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN PHẲNG ĐỘNG ĐÀN HỒI

Đồng nhất thức cần tìm phải thỏa mãn đồng nhất phương trình (1.7) khi cho $\omega = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma = -A,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} = -B, \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{yy} + 2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma = -C,$$

trong đó:

$$A = \frac{\rho}{1-\nu}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y}\right), \quad B = \rho\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\right), \quad C = \rho\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y}\right).$$

Để có thể áp phép biến đổi tích phân Fuariê theo biến x với tham số α, phép biến đổi Laplat một phía theo biến y và t với tham số γ, β vào hai vế của phương trình (2.1), cũng như phương pháp phép biến đổi tích phân trình bày trong [7, 8] ta giả thiết: các thành phần ứng suất σ_{ij} với i, j = 1, 2 cần tìm và các thành phần lực khối

X_i với $i = 1,2$ cho trước phải bằng không khi $x \to \pm\infty$ và phải hữu hạn khi $y, t \to +\infty$. Với giả thiết như thế ta tìm được ảnh của nghiệm:

$$\overline{\sigma} = -\frac{1}{m_1 C_1^2}(\beta P_1 + P_2) + \frac{1}{m_1}(\gamma P_3 + P_4) - \frac{1}{m_2}\overline{A},$$

$$\overline{\tau_{xy}} = -\frac{1}{m_2 C_2^2}(\beta Q_1 + Q_2) + \frac{1}{m_2}(\gamma Q_3 + Q_4 + i\alpha P_3) + \frac{i\alpha\gamma}{m_1 m_2 C_1^2}(\beta P_1 + P_2) -$$
$$-\frac{i\alpha\gamma}{m_1 m_2}(\gamma P_3 + P_4) + \frac{i\alpha\gamma}{m_1 m_2}\overline{A} - \frac{1}{m_2}\overline{B},$$

$$\overline{\sigma_{yy}} = \frac{1}{m}(\gamma K_1 + K_2 + 2i\alpha Q_3) + \frac{2i\alpha\gamma}{m m_2 C_2^2}(\beta Q_1 + Q_2) - \frac{2i\alpha\gamma}{m m_2}(\gamma Q_3 + Q_4 + i\alpha P_3) +$$
$$+\frac{2\alpha^2\gamma^2}{m m_1 m_2 C_1^2}(\beta P_1 + P_2) - \frac{2\alpha^2\gamma^2}{m m_1 m_2}(\gamma P_3 + P_4) + \frac{2\alpha^2\gamma^2}{m m_1 m_2}\overline{A} + \frac{2i\alpha\gamma}{m m_2}\overline{B} -$$
$$-\frac{1-\nu}{m C_1^2}(\beta P_1 + P_2) - \frac{1}{m m_1 C_1^2}\left(\alpha^2 + \frac{1-\nu}{C_1^2}\beta^2\right)(\beta P_1 + P_2) +$$
$$+\frac{1}{m m_1}\left(\alpha^2 + \frac{1-\nu}{C_1^2}\beta^2\right)(\gamma P_3 + P_4) - \frac{1}{m m_1}\left(\alpha^2 + \frac{1-\nu}{C_1^2}\beta^2\right)\overline{A} - \frac{1}{m}\overline{C}, \quad (2.2)$$

trong đó:
$$m = \gamma^2 + \alpha^2,\ m_1 = \gamma^2 - \nu_1^2,\ m_2 = \gamma^2 - \nu_2^2,$$
$$\nu_1 = (\alpha^2 + \beta^2/C_1^2)^{1/2},\ \nu_2 = (\alpha^2 + \beta^2/C_2^2)^{1/2}, \quad (2.3)$$

$\overline{\sigma}, \overline{\tau_{xy}}, \overline{\sigma_{yy}}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ là ảnh của các hàm $\sigma, \tau_{xy}, \sigma_{yy}, A, B, C$ qua phép biến đổi tích phân theo biến x, y, t do đó là hàm của α, β, γ;

P_1, P_2, Q_1, Q_2 là ảnh của các hàm $\sigma, \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}, \tau_{xy}, \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial t}$ tại $t = 0$ qua phép biến đổi tích phân theo biến x và y do đó là hàm của α, γ;

$P_3, P_4, Q_3, Q_4, K_1, K_2$ là ảnh của các hàm $\sigma, \partial\sigma/\partial y, \tau_{xy}, \partial\tau_{xy}/\partial y, \sigma_{yy}, \partial\sigma_{yy}/\partial y$ tại $y = 0$ qua phép biến đổi tích phân theo biến x và t do đó là hàm của α, β.

Giả sử bài toán phẳng động hồi được giải đối với nửa mặt phẳng, biên của nửa mặt phẳng chọn là trục x. Các đại lượng P_i, Q_i với $i = \overline{1,4}$, K_i với $i = 1,2$ không thể cho đồng thời mà chỉ có thể cho một vài trong số đó (xem [2]). Chẳng hạn có thể cho

a) Điều kiện biên:

$$\sigma_{yy} = -f_1(x, t),\ \tau_{xy} = -g_3(x, t) \qquad \text{Khi } y = 0 \quad (2.4)$$

b) Điều kiện đầu:

$$\sigma_{yy} = f_2(x, y),\ \tau_{xy} = g_1(x, y) \qquad \text{Khi } t = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial t} = f_3(x, y),\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial t} = g_2(x, y) \qquad \text{Khi } t = 0 \quad (2.6)$$

Theo đó chỉ có Q_1 Q_2, Q_3, K_1 là ảnh của g_1, g_2, g_3 và f_1 là đã biết. (2.7)

Trong (2.2) còn 6 hàm chưa biết và phải tìm qua 6 điều kiện biên và điều kiện đầu (2.4) − (2.6).

Biểu thức ảnh của nghiệm có thể nhóm lại như sau:

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^{(1)} + \overline{\sigma}^{(2)} + \overline{\sigma}^{(3)},$$
$$\overline{\tau_{xy}} = \overline{\tau}_{xy}^{(1)} + \overline{\tau}_{xy}^{(2)} + \overline{\tau}_{xy}^{(3)}, \quad (2.8)$$
$$\overline{\sigma_{yy}} = \overline{\sigma}_{yy}^{(1)} + \overline{\sigma}_{yy}^{(2)} + \overline{\sigma}_{yy}^{(3)}$$

Biết ảnh nghiệm có thể thu được nghiệm nhờ phép biến đổi ngược

1. NHÓM CHỨA LỰC KHỐI

$$\overline{\sigma}^{(1)} = -\frac{1}{m_1}\overline{A},$$

$$\overline{\tau}^{(1)}_{xy} = \frac{i\alpha\gamma}{m_1 m_2}\overline{A} - \frac{1}{m_2}\overline{B}, \tag{2.9}$$

$$\overline{\sigma}^{(1)}_{yy} = \frac{1}{mm_1}\left[\alpha^2 + \frac{1-\nu}{C_1^2}\beta^2 - \frac{2\alpha^2\gamma^2}{m_2}\right]\overline{A} + \frac{2i\alpha\gamma}{mm_2}\overline{B} - \frac{1}{m}\overline{C}$$

Áp phép biến đổi ngược Fuariê theo α, phép biến đổi ngược Laplat theo γ, β vào hai vế của phương trình (2.9) ta được:

$$\sigma^{(1)} = \frac{-1}{(2\pi i)^2\sqrt{2\pi}}\iiint \frac{1}{m_1}\overline{A}\exp(i\alpha x + \gamma y + \beta t)d\alpha d\gamma d\beta,$$

$$\tau^{(1)}_{xy} = \frac{1}{(2\pi i)^2\sqrt{2\pi}}\iiint \left(\frac{i\alpha\gamma}{m_1 m_2}\overline{A} - \frac{1}{m_2}\overline{B}\right)\exp(i\alpha x + \gamma y + \beta t)d\alpha d\gamma d\beta,$$

$$\sigma^{(1)}_{yy} = \frac{-1}{(2\pi i)^2\sqrt{2\pi}}\iiint\left[\frac{1}{mm_1}\left(\alpha^2 + \frac{1-\nu}{C_1^2}\beta^2 - \frac{2\alpha^2\gamma^2}{m_2}\right)\overline{A} - \frac{2i\alpha\gamma}{mm_2}\overline{B} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m}\overline{C}\right]\exp(i\alpha x + \gamma y + \beta t)d\alpha d\gamma d\beta, \tag{2.10}$$

trong đó cận tích phân theo α, γ, β lấy như sau:

$$\alpha \in (-\infty, +\infty),\ \gamma \in (\gamma_0 - i\infty, \gamma_0 + i\infty),\ \beta \in (\beta_0 - i\infty, \beta_0 + i\infty). \tag{2.11}$$

Ta thấy (2.10) nghiệm đúng phương trình (2.1) và đó là nghiệm riêng chứa lực khối của phương trình (2.1)

2. NHÓM CHỨA CÁC HÀM XUẤT HIỆN DO PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLAT MỘT PHÍA THEO BIẾN t

$$\overline{\sigma}^{(2)} = \frac{-1}{m_1'}(\beta P_1 + P_2),$$

$$\overline{\tau}^{(2)}_{xy} = \frac{-1}{m_2'}\left[\beta Q_1 + Q_2 + \frac{i\alpha\gamma C_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}(\beta P_1 + P_2)\right] + \frac{i\alpha\gamma C_2^2}{m_1'(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}(\beta P_1 + P_2),$$

$$\overline{\sigma}^{(2)}_{yy} = \frac{1}{mm_2'}\left[2i\alpha\gamma(\beta Q_1 + Q_2) - \frac{2\alpha^2\gamma^2 C_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}(\beta P_1 + P_2)\right] +$$

$$\frac{1}{mm_1}\left(\frac{2\alpha^2\gamma^2 C_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} - \alpha^2 - \frac{1-\nu}{C_1^2}\lambda_1^2\right)(\beta P_1 + P_2), \tag{2.12}$$

trong đó P_1, P_2, Q_1, Q_2 là hàm của α, γ

$$\lambda_1 = C_1(\gamma^2 - \alpha^2)^{1/2},\ \lambda_2 = C_2(\gamma^2 - \alpha^2)^{1/2}, \tag{2.13}$$

$$m_1' = \lambda_1^2 - \beta^2,\ m_2' = \lambda_2^2 - \beta^2. \tag{2.14}$$

Áp phép biến đổi ngược Fuariê theo α, phép biến đổi ngược Laplat theo γ, β vào hai vế của phương trình (2.12) rồi tích phân theo β nhờ áp dụng định lý thặng dư và bằng cách đặt:

$$(\lambda_1 P_1 + P_2)\, C_2^2/2\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = P(\alpha, \gamma),$$

$$\frac{1}{2\lambda_2}\left[\lambda_2 Q_1 + Q_2 + \frac{i\alpha\gamma C_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}(\lambda_2 P_1 + P_2)\right] = Q(\alpha, \gamma), \tag{2.15}$$

ta được:

$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \iint \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{C_2^2} P(\alpha,\gamma) \exp(\lambda_1 t + i\alpha x + \gamma y)\, d\alpha d\gamma,$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \frac{-1}{i(2\pi)^{3/2}} \iint [\, i\alpha\gamma P(\alpha,\gamma)\, e^{\lambda_1 t} - Q(\alpha,\gamma)\, e^{\lambda_2 t}] \exp(i\alpha x + \gamma y)\, d\alpha\, d\gamma,$$

$$\sigma_{yy}^{(2)} = \frac{-1}{i(2\pi)^{3/2}} \iint \left[aP(\alpha,\gamma) e^{\lambda_1 t} + \frac{2i\alpha\gamma}{m} Q(\alpha,\gamma)\, e^{\lambda_2 t} \right] \exp(i\alpha x + \gamma y)\, d\alpha d\gamma \qquad (2.16)$$

trong đó: m tính theo (2.3),

$$a = \alpha^2 + \frac{C_1^2}{2C_2^2}(\gamma^2 - \alpha) \qquad (2.17)$$

P, Q tính theo (2.15), theo (2.7) chỉ có Q_1, Q_2 là đã biết như vậy P, Q vẫn là chưa biết khi cho điều kiện biên, điều kiện đầu (2.4) – (2.6), cận tích phân tương ứng tính theo (2.11)

Ta thấy (2.16) nghiệm đúng phương trình thuần nhất (2.1) và đó là đồng nhất thức chứa hai hàm tùy ý của phương trình thuần nhất (2.1).

3. NHÓM CHỨA CÁC HÀM XUẤT HIỆN DO PHÉP BIẾN ĐỔI LALAT MỘT PHÍA THEO BIẾN Y

$$\bar{\sigma}^{(3)} = \frac{1}{m_1}(\gamma P_3 + P_4),$$

$$\bar{\tau}_{xy}^{(3)} = \frac{-i\alpha}{(\nu_1^2 - \nu_2^2)\, m_1}(\nu_1^2 P_3 + \gamma P_4) + \frac{1}{m_2}\left[\gamma Q_3 + Q_4 + \frac{i\alpha}{\nu_1^2 - \nu_2^2}(\nu_1^2 P_3 + \gamma P_4)\right],$$

$$\bar{\sigma}_{yy}^{(3)} = \frac{\gamma}{m}\left[K_1 + \frac{2i\alpha}{a_2}(Q_4 + Qi\alpha P_3) - \left(\frac{2\alpha^2\nu_1^2}{a_2} - \alpha^2 + \frac{1-\nu}{C_1^2}\beta^2\right)\frac{P_3}{a_1}\right] +$$

$$\frac{1}{m}\left[K_2 + \frac{2i\alpha\nu_2^2}{a_2} Q_3 - \left(\frac{2\alpha^2\nu_2^2}{a_2} - \alpha^2 + \frac{1-\nu}{C_1^2}\beta^2\right)\frac{P_4}{a_1}\right] +$$

$$\frac{1}{m_1 a_1}\left(-\alpha_2 + \frac{1-\nu}{C_1^2}\beta^2 - \frac{2\alpha^2\nu_2^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}\right)(\gamma P_3 + P_4) -$$

$$- \frac{2i\alpha}{m_2 a_2}\left[\nu_2^2 Q_3 + \gamma(Q_4 + i\alpha P_3) + \frac{i\alpha\nu_2^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}(\gamma P_3 + P_4)\right]. \qquad (2.18)$$

trong đó: P_3, P_4, Q_3, Q_4, K_1, K_2 là hàm của α, β; ν_1, ν_2, m_1, m_2 tính theo (2.3);

$$a_1 = \alpha^2 + \nu_1^2, \quad a_2 = \alpha^2 + \nu_2^2 \qquad (2.19)$$

Áp phép biến đổi ngược Fuariê theo α, phép biến đổi ngược Laplat theo γ, β rồi lấy tích phân theo γ nhờ áp dụng định lý thặng dư và bằng cách đặt:

$$K_1 + \frac{2i\alpha}{a_2}(Q_4 + i\alpha P_3) - \left(\frac{\alpha^2}{a_2 C_2^2} + \frac{1-\nu}{C_1^2}\right)\frac{\beta^2 P_5}{a_1} = R_1(\alpha,\beta),$$

$$\frac{1}{i\alpha}\left[K_2 + \frac{2i\alpha\nu_2^2}{a_2} Q_3 - \left(\frac{\alpha^2}{a_2 C_2^2} + \frac{1-\nu}{C_1^2}\right)\frac{\beta^2 P_4}{a_1}\right] = R_2(\alpha,\beta),$$

$$\frac{P_4 - \nu_1 P_3}{2\nu_1(\nu_1^2 - \nu_2^2)} = R_3(\alpha,\beta),$$

$$\frac{1}{2}\left[Q_4 - \nu_2 Q_3 + i\alpha P_3 - \frac{i\alpha\nu_2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}(P_4 - \nu_2 P_3)\right] = R_4(\alpha,\beta), \qquad (2.20)$$

ta được:

$$\sigma^{(3)} = \frac{-1}{i(2\pi)^{3/2}} \iint (\nu_1^2 - \nu_2^2) R_3(\alpha, \beta) \exp(-\nu_1 y + i\alpha x + \beta t)\, d\alpha d\beta,$$

$$\tau_{xy}^{(3)} = \frac{-1}{i(2\pi)^{3/2}} \iint \left[i\alpha\nu_1 R_3(\alpha, \beta) e^{-\nu_1 y} + \frac{1}{\nu_2} R_4(\alpha, \beta) e^{-\nu_2 y} \right] \exp(i\alpha x + \beta t)\, d\alpha d\beta,$$

$$\sigma_{yy}^{(3)} = \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \iint \Big[R_1(\alpha, \beta) \operatorname{ch} i\alpha y + R_2(\alpha, \beta) \operatorname{sh} i\alpha y + \frac{a_2}{2} R_3(\alpha, \beta) e^{-\nu_1 y} -$$

$$- \frac{2i\alpha}{a_2} R_4(\alpha, \beta) e^{-\nu_2 y} \Big] \exp(i\alpha x + \beta t)\, d\alpha d\beta, \tag{2.21}$$

trong đó R_i với $i = \overline{1,4}$ tính theo (2.20), theo (2.7) chỉ có Q_3, K_1 là đã biết, như vậy R_i $i = \overline{1,4}$ vẫn là chưa biết khi cho điều kiện biên, điều kiện đầu (2.4) — (2.6), cận tích phân tương ứng lấy theo (2.11). Ta thấy (2.21) nghiệm đúng phương trình thuần nhất (2.1) và đó là đồng nhất thức chứa bốn hàm tùy ý của phương trình thuần nhất (2.1).

Do tính chất tuyến tính của phương trình (2.1), nên cộng (2.10) với (2.16) và (2.21) ta được một đồng nhất thức chứa sáu hàm tùy ý của phương trình (2.1)

Việc xác định các hàm tùy ý trong các đồng nhất thức theo các điều kiện đặt ra, thường dẫn đến việc giải các phương trình tích phân.

§3. PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM ĐÀN HỒI ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN PHẲNG ĐỘNG ĐÀN DẺO.

Để giải bài toán phẳng động đàn deo theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ, ta dùng phương pháp gần đúng liên tiếp, mang tên là phương pháp nghiệm đàn hồi, trước đây vốn dùng để giải bài toán tĩnh [10] nay được mở rộng để giải bài toán động. Trong đó mỗi bước gần đúng là giải một bài toán động đàn hồi với lực khối khác nhau. Ở gần đúng thứ không đặt $\omega(e_u) = \omega^{(0)} = 0$. Khi đó phương trình (1.7) có dạng (2.1). Nghiệm của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện biên, điều kiện đầu (2.4) — (2.6) giả sử ta tìm được. Theo giá trị nghiệm của bài toán này $\sigma_{ij}^{(0)}$ ta tính $\sigma_u^{(0)}$ và theo đường cong biến dạng duy nhất (1.2) ta tìm $e_u^{(0)}$. Nếu tại mọi điểm của môi trường đang xét $e_u^{(0)} < e_s$ thì biến dạng dẻo chưa xuất hiện và gần đúng thứ không sẽ là nghiệm của bài toán, biến dạng xác định qua ứng suất theo định luật Húc.

Nếu tại miền nào đấy của môi trường đang xét $e_u^{(0)} > e_s$ ta xác định $\omega^{(1)} = \omega(e_u^{(0)})$ như hàm của tọa độ. Với gần đúng thứ nhất trong biểu thức của e_{ij}^p ta thay $\omega(e_u)$ bằng hàm đã biết $\omega^{(1)} = \omega(e_u^{(0)})$ và thay σ_{ij} bằng $\sigma_{ij}^{(0)}$. Khi đó các số hạng liên quan đến e_{ij}^p trong phương trình (1.7) đóng vai trò như các lực khối giả định, bổ xung vào thành phần lực khối đã biết. Chúng ta lại giải bài toán động đàn hồi lần nữa, với lực khối đã được bổ xung, nghiệm tìm được gọi là $\sigma_{ij}^{(1)}$. Theo giá trị này của ứng suất ta lại tính $\sigma_u^{(1)}$ và theo đường cong biến dạng duy nhất (1.2) ta lại tìm $e_u^{(1)}$.

Trong miền được xét nếu tồn tại $e_u^{(1)} > e_s$ ta tính $\omega^{(2)} = \omega(e_u^{(1)})$ sau đó xây dựng gần đúng thứ hai tương tự như cách làm trên.

Quá trình này cứ tiếp tục mãi, cho đến khi gần đúng thứ n + 1 không khác biệt mấy so với gần đúng thứ n.

§4. KẾT LUẬN

Cách thành lập các đồng nhất thức để xác định nghiệm trong miền đàn hồi và thuật toán lặp để xác định nghiệm trong miền dẻo trình bày trên đây, cho một lược đồ chung nhất, để đi tới công thức biểu diễn nghiệm, trên cơ sở giả thiết tồn tại các phép biến đổi tích phân thuận và nghịch. Trong nhiều lớp bài toán cụ thể, các phép biến đổi tích phân như thế là tồn tại, bước đầu vận dụng cho những kết quả sau đây:

Có thể suy ra các đồng nhất thức của phương pháp nghiệm phiếm hàm bất biến [1], phương pháp hàm phức [9] và những kết quả của phương pháp phép biến đổi tích phân [3], điều này chứng tỏ nó giải được những bài toán mà các phương pháp khác đã giải được. Dựa vào đồng nhất thức trong tọa độ Đề Các có thể thiết lập đồng nhất thức để giải bài toán trong tọa độ cực và bài toán đối xứng trục với điều kiện biên phức tạp hơn những điều kiện biên được khảo sát trước đó. Dùng đồng nhất thức có lực khối có thể tìm được nghiệm cho mỗi bước lặp của phương pháp nghiệm đàn hồi, cụ thể đã tìm được lời giải bài toán động đàn dẻo đối với nửa mặt phẳng, trên biên chịu tải trọng chuyển động với một vận tốc vượt âm $C = C_2\sqrt{2}$. Dùng đồng nhất thức chứa bốn hàm tùy ý đã giải được lớp bài toán mới với điều kiện đầu là nghiệm của bài toán tiếp xúc. Việc đặt và giải bài toán dùng đồng nhất thức chứa sáu hàm tùy ý còn cần được nghiên cứu tiếp tục, để sao cho nghiệm của bài toán đồng thời là nghiệm của phương trình xuất phát ban đầu.

Tác giả cám ơn giáo sư I Đào Huy Bích đã hướng dẫn, giúp đỡ tận tình trong quá trình viết bài báo này.

Địa chỉ: TrườngĐại học Tổnghợp HN. *Nhận ngày 11/11/1984*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. СМИРНОВ В. И., СОБОЛЕВ И. С. Новые методы решения плоской задачи упругих колебаний. Тр. Сейсмологического ин-та, №20, 1932.
2. РИЦЦО Ф. Метод граничных интегральных уравнений, современные вычислительные методы прикладной механики. Механика. Новое в зарубежной науке. №15, Изд Мир, Москва, 1978.
3. ШИППИ Д. ДЖ. Применение метода граничных интегральных уравнений к изучению нестационарных явлений в твердых телах. Механика. Новое в зарубежной науке. Изд Мир, Москва, №15, 1978.
4. НОВАЦКИЙ В. К. Волновые задачи теории пластичности. Изд Мир, Москва, 1978.
5. БЫКОВЦЕВ Г. И., ВЕРВЕЙКО Н. Д., ЗИНОВЬЕВ Н. М. Применение метода характеристик к решению задачи о движений ступенчатом нагрузки. Материалы Всесоюзного симпозиума « Распространение упругих и упруго-пластических волн ». Алма-Ата, 1973.
6. НГО ДИНГЬ ЧАНГ. Распространение упруго-пластических волн в полуплоскости при воздействи переменной нагрузкой движуцейся вдоль её границы. Вестник Московского университета, №2, 1978.
7. БОРОДАЧЕВ Н. М. Колебания упругой полуплоскости. Труды Куйбышевского инженерно строительного. Ин-та, в. 5, 1958.
8. СНЕДДОН И. Н., БЕРРИ Д. С. Классическая теория упругости. Физматгиз, 1961.
9. RADOK J. R. Quart. Appl — Math — 14, 1956
10. ĐÀO HUY BÍCH. Cơ sở lý thuyết dẻo. Nhà xuất bản ĐH và THCN. Hà nội, 1975

РЕЗЮМЕ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКО-ДИНАМИЧЕСКОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Данная статья рассматривает один метод, выражающий решение плоско-динамической упругой задачи с учётом обьёмной силы и содержащей более двух произвольные функций, чтобы могли удовлетворять граничным и начальным условиям, одновременно статья предполагает итерационный оператор для определения решения плоско-динамической упруго-пластической задачи.