

BẢN CỨNG ĐÉO TRONG VÙNG BIẾN DẠNG LỚN I

VŨ VĂN THẾ

Nội dung bài báo này là đưa ra một phương pháp mới xác định vùng chứa lò giải thực. Phương pháp được trình bày dựa trên cơ sở khái niệm các đường gãy theo quan điểm lý thuyết chày dẻo khi chú ý đến tác dụng của lực màng. Các kết quả mới cho các trường hợp cụ thể được đưa ra. Bài báo này chia làm hai phần. Phần một trình bày lý thuyết chung. Phần hai là ví dụ minh họa cho lý thuyết.

§1. DIỄN ĐẠT BÀI TOÁN VÀ CÁC HỆ THỨC CƠ BẢN

Xét bản có chu tuyến C làm từ vật liệu cứng dẻo lý tưởng có ứng suất giới hạn khi kéo σ_0 , độ dày $2H$, chịu ngoại lực $P_j(x, y)$, $P_3(x, y)$, các nội lực và các vận tốc biến dạng suy rộng M_{ij} , N_{ij} , T_i , κ_{ij} , λ_{ij} , γ_i . Ký hiệu $u_i(x, y)$ là các thành phần dịch chuyển theo hướng x, y nằm trong mặt phẳng trung bình của bản. $W(x, y)$ là thành phần dịch chuyển theo hướng Z vuông góc với mặt phẳng trung bình của bản, ở đây $i, j = x, y$. Chúng ta có các hệ thức hình học sau đây:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i} + W_{,i} \bar{W}_{,j} + \bar{W}_{,i} W_{,j}]$$

$\kappa_{ij} = -\bar{W}_{,ij}$ tổng theo các chỉ số giống nhau,

$$(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}, (\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \quad (1.1)$$

Sự cân bằng của bản được mô tả bởi các phương trình:

$$\begin{aligned} N_{ij,i} + P_j &= 0, \\ (T_i + N_{ij} W_{,j})_{,i} + P_3 &= 0, \\ T_i &= -M_{ij,j}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

P_3 — thành phần ngoại lực theo hướng Z .

Biên C được chia làm ba phần $C = C^* + C^{**} + C^{***}$ tương ứng chịu các liên kết

$$W = \bar{W} = 0, u_i = \bar{u}_i = 0, M_{ij} n_j = 0, N_{ij} n_j = P_i \text{ trên } C^* \quad (1.3)$$

$$W = \bar{W} = 0, W_{,i} = 0, u_i = \bar{u}_i = 0, N_{ij} n_j = P_i \text{ trên } C^{**} \quad (1.4)$$

$$W = \bar{W} = 0, M_{ij} n_j = 0, N_{ij} n_j = P_i \text{ trên } C^{***} \quad (1.5)$$

n_j — thành phần vec tơ pháp tuyến trên biên C.

Ký hiệu u_i^* , W^* là các thành phần của vectơ vận tốc dịch chuyển ảo từ (1.2) chúng ta nhận được hệ thức sau

$$\int_A (P_i u_i^* + P_3 W^*) dA = \int_A \{ (-M_{ij,i} + N_{ij} W_{,i})_{,j} W^* + N_{ij,i} u_j^* \} dA \quad (1.6)$$

ở đây A là diện tích bề mặt của bản

Chúng ta chú ý đến đồng nhất thức sau đây

$$N_{ij,i} u_j^* = (N_{ij} u_j^*)_{,i} - N_{ij} u_{j,i}^* \quad (1.7)$$

Giả sử diện tích A được chia thành L phần với diện tích A_m được bao quanh bởi đường cong C_m , trong vùng này $N_{ij}u_j^*$ liên tục, sự gián đoạn chỉ xảy ra trên các biên C_m . Khi tích phân (1.7) trên A và áp dụng công thức Green chúng ta có

$$\int_A N_{ij,i}u_j^* dA = \sum_{C_m}^L \int N_{mj}u_j^* n_m dC - \int_A N_{ij}u_{i,j}^* dA \quad (1.8)$$

Các phép tính tương tự cũng xảy ra đối với các đại lượng khác, cuối cùng từ (1.6) và (1.7) chúng ta có hệ thức

$$\begin{aligned} \int_A (P_i u_i^* + P_3 \dot{W}^*) dA = & - \sum_{C_m}^L \int N_{ij} u_i^* n_j dC + \int_A N_{ij} u_{i,j}^* dA + \\ & \sum_{C_k}^K \int M_{ij,i} n_j \dot{W}^* dC + \sum_{C_n}^R \int M_{ij} \dot{W}^* n_j dC - \sum_{C_s}^S \int N_{ij} W_{,j} \dot{W}^* n_i dC + \\ & + \sum_{C_q}^Q \int N_{ij} W W_{,i} \dot{W}^* n_j dC - \int_A (N_{ij,j} \dot{W}^* W + N_{ij} \dot{W}^*_{,j} W) dA. \end{aligned} \quad (1.9)$$

ở đây C_m, C_k, C_n, C_s, C_q tương ứng là đường gián đoạn của các biểu thức dưới dấu tích phân. Nói chung $C_m \neq C_k \neq C_n \neq C_s \neq C_q$. Nếu chúng ta chọn trường vận tốc ảo sao cho u khả vi, W có đạo hàm cấp hai trừ ra một số đường tại đây W có gián đoạn. Từ (1.2), (1.9) chúng ta có:

$$\begin{aligned} \int_A (P_i u_i^* + P_3 \dot{W}^*) dA = & \oint_C (-N_{ij} u_i^* + M_{ij,i} \dot{W}^* - N_{ij} W_{,i} \dot{W}^*) n_j dC + \\ & + \int_A N_{ij} u_{i,j}^* dA + \int_A M_{ij} \dot{W}^*_{,ij} dA - \sum_{C_n}^R \int M_{ij} \dot{W}^*_{,j} n_i dC + \\ & + \sum_{C_n}^R \int N_{ij} W W_{,i} \dot{W}^* dC - \int_A (N_{ij,j} \dot{W}^* W + N_{ij} \dot{W}^*_{,j} W) dA. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Từ phương trình cân bằng thứ nhất trong (1.2) ta có:

$$\int_A N_{ij,i} \dot{W}^*_{,j} W dA = - \int_A P_i \dot{W}^*_{,i} W dA$$

Chú ý là $\dot{W}^*|_C = 0$ trong tất cả các điều kiện biên (1.3), (1.4), (1.5) dạng thức (1.10) sẽ cho ta hệ thức:

$$\begin{aligned} \int_A (P_i u_i^* + P_3 \dot{W}^*) dA - \int_A P_i W \dot{W}^*_{,i} dA = & - \oint_C (N_{ij} u_i^* + M_{ij} \dot{W}^*_{,j}) n_j dC + \\ & + \sum_{C_n}^R \int (N_{ij} W - M_{ji}) \dot{W}^*_{,j} n_i dC + \int_A [(-N_{ij} W + M_{ji}) \dot{W}^*_{,ij} + N_{ij} u_{i,j}^*] dA. \end{aligned} \quad (1.11)$$

ở đây \bar{C}_n chỉ các đường gãy nằm trong miền A của bản. Khi chú ý tới các điều kiện biên (1.3), (1.4), (1.5) ta sẽ thu được:

$$\oint_C [-N_{ij} \dot{u}_i^* n_j - M_{ij} \dot{W}_{,ij}^*] dC = - \oint_{C^{**}} M_{ij} \dot{W}_{,ij}^* dC \quad (1.12)$$

Số hạng thứ hai trong vế phải của (1.11) cho giá trị hao tán năng lượng trên các đường gián đoạn, số hạng cuối cùng là hao tán năng lượng trong vùng biến dạng liên tục.

Cơ cấu các đường gãy cho phép dưới tác dụng của tải trọng bản sẽ phân chia thành một số hữu hạn hoặc vô cùng các đường gãy có vị trí không thay đổi theo thời gian [1]. Các đường gãy này được xác định tại các điểm gián đoạn của \dot{W}^* [2]. Chuyển động của cơ cấu sẽ gây ra do các phần tử cứng quay tương đối với nhau theo phương đường gãy. Sự hao tán năng lượng chỉ xảy ra trên các đường gãy, tại đó có các biến dạng tập trung.

Như đã chỉ ra trong [2, 3] các giả thiết nêu ra trong lý thuyết các đường gãy cho phép chúng ta bỏ qua u_i^* so với \dot{W}^* . Do đó các cơ cấu đường gãy có thể xem là động cho phép chỉ đối với bản có biên khớp và biên ngàm.

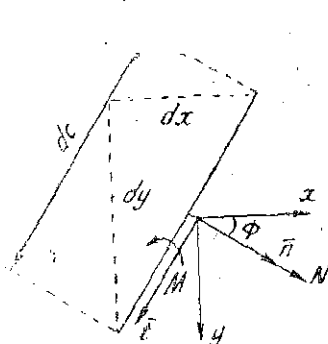
Khi sử dụng trường động cho phép là cơ cấu các đường gãy thẳng từ (1.11) chúng ta thu được kết quả:

$$\int_A P_3 \dot{W}^* dA - \int_A P_i \dot{W}_{,i}^* dA = - \int_{C^{**}} M \dot{\theta}^* dC + \sum_{\bar{C}_n} \int (NW - M) \dot{\theta}^* dC \quad (1.13)$$

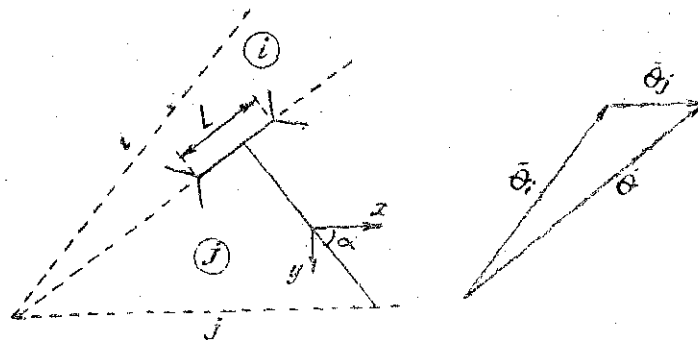
ở đây N, M lấy giá trị dọc theo \bar{C}_n được xác định bởi hệ thức

$$N = N_{ij} n_i n_j, M = M_{ij} n_i n_j \quad (1.14)$$

là mômen và nội lực của thiết diện theo phương đường gãy (hình 1).



Hình 1



Hình 2

θ — là góc quay tương đối dọc theo đường của hai phần tử kề nhau. Hai tấm cứng i, j có góc quay tương đối θ_i^* , θ_j^* thì θ^* sẽ được xác định theo hình 2.

§2. CÁC VẬN TỐC BIẾN DẠNG SUY RỘNG — ĐIỀU KIỆN GIỚI HẠN — QUY LUẬT CHÀY

Trạng thái ứng suất và biến dạng của bản khi xây dựng hệ tọa độ địa phương trùng với tiếp tuyến t và pháp tuyến n của các đường gãy được đặc trưng bởi các ứng suất suy rộng $M_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$, T_α và các vận tốc biến dạng suy rộng $\kappa_{\alpha\beta}$, $\lambda_{\alpha\beta}$, γ_α ($\alpha, \beta = n, t$); hàm hao tán có dạng sau:

$$D = M_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta} + T_\alpha \dot{\gamma}_\alpha \quad (2.1)$$

Đối với bản dẹt hướng điều kiện giới hạn có thể trình bày trong dạng

$$\Phi_k(M_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}, T_\alpha) = 0 \quad (2.2)$$

Các hàm Φ_k xác định một mặt lồi trong không gian các ứng suất suy rộng.

Quy luật chảy dẻo được xác định theo hệ thức:

$$\kappa_{\alpha\beta} = \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial M_{\alpha\beta}}, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial N_{\alpha\beta}}, \quad \gamma_\alpha = \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial T_\alpha}, \quad \lambda_k \geq 0. \quad (2.3)$$

Trong trường hợp tổng quát khi chú ý đến tất cả các thành phần nội lực thì việc xác định Φ_k rất khó khăn. Trong thực tế chỉ có thể xây dựng trong một số trường hợp riêng, ví dụ như bỏ qua ảnh hưởng của các lực màng và lực cắt [1, 2] hoặc chỉ xét trong mặt phẳng (M, N).

Khi các đường gãy là thẳng và bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt ta có

$$\kappa_{11} = \kappa_{22} = \lambda_{11} = \lambda_{22} = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (2.4)$$

Từ đó hàm hao tán (1.13) sẽ biểu diễn trong dạng đơn giản sau:

$$D = (N_{nn}W - M_{nn})\theta^*. \quad (2.5)$$

Biểu thức (2.5) là hàm hao tán của bản trên các đường gãy theo mô tả Lagrange gây ra do một trường vận tốc biến dạng tập trung. Như vậy để khảo sát năng lượng hao tán chúng ta chỉ cần chú ý đến các mô men M_{nn} và các nội lực N_{nn} theo tiết diện của đường gãy. Nếu các đại lượng này được chọn là ứng suất suy rộng thì các vận tốc biến dạng suy rộng tương ứng với nó sẽ là:

$$\lambda_{nn} = W\theta^*, \quad \kappa_{nn} = -\theta^*. \quad (2.6)$$

Các ứng suất suy rộng khác không gây ra sự hao tán năng lượng được xem như là các phản lực bên trong.

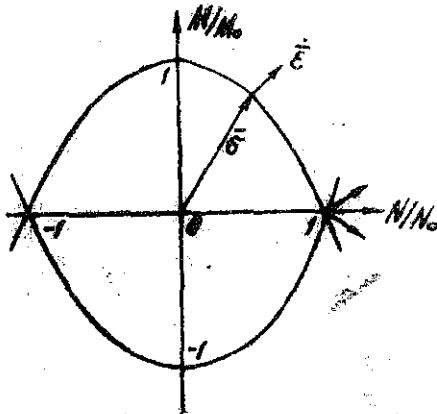
Việc xác định đường giới hạn trong mặt phẳng (M_{nn}, N_{nn}) có thể bằng ba cách sau đây:

— Chuyển trực tiếp đường giới hạn trong không gian các ứng suất Pioli Kirchhof sang các ứng suất suy rộng như trong [5].

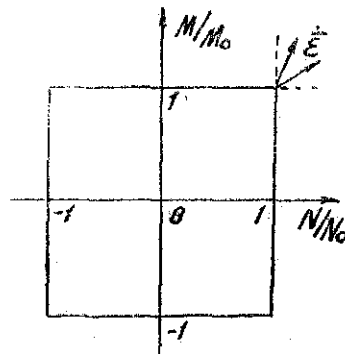
— Xét tiết diện của phần tử theo đường gãy chúng ta sẽ được tiêu chuẩn giới hạn ứng suất pháp cực đại có dạng (hình 3).

$$f = (N/N_0)^2 \pm (M/M_0) - 1 = 0 \quad (2.7)$$

— Bỏ qua sự tương tác giữa M và N, chúng ta sẽ nhận được tiêu chuẩn giới hạn hình vuông (hình 4). Giả thiết về sự làm việc độc lập của các nội lực đã được Johansen [1, 2] sử dụng khi nghiên cứu uốn bản thuần túy.



Hình 3



Hình 4

$$N = N_{nn}, \quad M = M_{nn}, \\ M = \sigma_0 H^2, \quad N = 2\sigma_0 H$$

Sau khi thừa nhận một đường cong giới hạn kín và lồi trong mặt phẳng (M, N) , hàm hao tán năng lượng

$$D = (N W - M) \theta^* \quad (2.8)$$

được xây dựng từ các ứng suất thực M, N và dịch chuyển thực W dọc theo các đường gãy cùng với đặc trưng chuyển động của cơ cấu các đường gãy là góc quay tương đối của hai phần tử cứng kề nhau.

Khi áp dụng bất đẳng thức ổn định Drucker

$$(N^* - N) W \theta^* - (M^* - M) \theta^* \geq 0 \quad (2.9)$$

chúng ta có:

$$D \leq D^* = (N^* W - M^*) \theta^* \quad (2.10)$$

Ở đây M^*, N^* liên hệ với $W \theta^*, -\theta^*$ qua quy luật chảy (2.3). Nói chung $N^* = N^*(W, \theta^*)$, $M^* = M^*(W, \theta^*)$ không phải là trường phân bố ứng suất trong cơ cấu các đường gãy, cũng không phải là trường phân bố ứng suất trong cơ cấu thực. Chỉ khi nào trường cơ cấu các đường gãy trùng với trường biến dạng thực thì M^*, N^* sẽ là trường phân bố ứng suất thực. Như trong [4] đã chỉ ra rằng khả năng này hầu như không xảy ra vì các cơ cấu đường gãy không bao hết các trường động cho phép. Hao tán năng lượng trên biên C cũng được xử lý một cách thích hợp. Từ quy luật chảy dẻo điều kiện ứng suất ứng với biến dạng trên biên sẽ cho mô men uốn cực đại trong trường hợp biên ngàm và không phụ thuộc vào dịch chuyển thực $W(x, y)$.

Kết quả chúng ta nhận được hệ thức:

$$D^* = (N^* W - M^*) \theta^* = F(W, \theta^*) \quad (2.11)$$

Dạng của hàm F trong trường hợp tổng quát sẽ phụ thuộc vào cơ cấu các đường gãy và điều kiện giới hạn được chọn.

Từ (2.10), (2.11), (1.12), (1.13) chúng ta nhận được đánh giá sau

$$\int_A P_3 \bar{W}^* dA - \int_A P_1 W \bar{W}_1^* dA \leq \oint_C M_{\max} \theta^* dC + \sum_{C_n}^R \int_{C_n} F(W, \theta^*) dC. \quad (2.12)$$

Ở đây M_{\max} là giá trị cực đại của mô men theo tiêu chuẩn giới hạn được chọn, $C^{**} = 0$ khi biên khớp toàn bộ, $C^{**} = C$ khi biên ngàm toàn bộ. Bất đẳng thức (2.12) trở thành đẳng thức khi trường biến dạng động cho phép trùng với trường thực. Nói chung điều này ít xảy ra khi lớp các trường động cho phép là cơ cấu các đường gãy. Như vậy khi cho trước một cơ cấu các đường gãy và một mặt giới hạn được chọn, (2.12) cho ta mối liên hệ giữa ngoại lực và dịch chuyển thực của bản.

§ 3. KẾT LUẬN

Trong bài này đề xây dựng một phương pháp mới đánh giá mối liên hệ lực - dịch chuyển của bản làm việc sau trạng thái giới hạn trên cơ sở khái niệm các đường gãy khi chú ý tới các lực màng. Đã nhận được biểu thức đánh giá (2.12) cho bản có hình dáng bất kỳ, có các điều kiện biên ngàm và khớp và chịu tải trọng dạng bất kỳ. Đề từ (2.12) rút ra được mối liên hệ cụ thể giữa lực - dịch chuyển thực chúng ta cần giải quyết các bài toán sau đây

- Chọn thích hợp cơ cấu các đường gãy thẳng
- Chọn các điều kiện dẻo thích hợp.

Minh họa cho điều này được trình bày trong phần hai tiếp theo. Kết quả nhận được trên đây có thể mở rộng cho bản bê tông cốt thép cũng như các bản dẹt hướng tổng quát.

Địa chỉ

Viện cơ Viện KHVN

Nhận ngày 29/5/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. SAVE M. A. MASSONNET C. E. Plastic analysis and design of plates shells and disks North. Holland Publishing Company 1972.
2. SAWCZUK A. On initiation of membrane action in rigid plastic plates. J. Mec. Vol. 9 N°1, 1964.
3. SAWCZUK A. Large deflections of rigid plastic plates. Proc. 11th. Cong. Appl. Mech. MUNICH 1964.
4. JANAS M. Kinematical compatibility problems in yield line theory Mag. Concret. Res Vol. 19, N°58, 1967.
5. SAWCZUK A. On plastic shell theories at large strains and displacements Int. J. Mech. Sci. Vol. 24, N°4, 1982.

SUMMARY

RIGID PLASTIC PLATES AT LARGE DEFORMATIONS I

By being statically loaded plastic plates can support loads exceeding the bending collapse pressure. The behaviour of perfectly rigid plastic plates beyond the yield load depends on changes in geometry to the plastic flow. Therefore in post yield behaviour the deflection can not be considered small in comparison with the plate thickness. In this paper we employ the equations of plates at moderately large deflections and the approximative behaviour of plates introduced in [2,3] by dividing plates into a number of rigid regions which have been separated by line hinges situated at locations where their discontinuities in W, i occur, an estimative method of the load-deflection relationship of arbitrarily shaped plates having arbitrarily boundary conditions is developed. This method is directly extended to anisotropic and reinforced concrete plates.