Tạp chí cơ học T. VII, 1985 Số 1 (trang 14 — 19)

MỘT BÀI TOÁN HAI CHIỀU CỦA LÝ THUYẾT THẤM

ĐÀO MINH NGỌC

§ MỞ ĐẦU

Công trình [1] đã áp dụng phương pháp sai phân ẩn luân hướng lân cận một chiều để giải số bài toán thấm phẳng về diễn biến của mặt tự do trong nước dưới đất. Công trình [2] đã tìm lời giải giải tích cho một số bài toán truyền chất trong trường hợp thấm hai chiều có xét tới khuếch tán đối lưu và trao đổi chất với đất. Công trình này xét bài toán thủy lực không dừng hai chiều về diễn biến của mặt tự do trong nước dưới đất và thay đổi nồng độ chất hòa tan có kể tới khuếch tán đối lưu và trao đổi chất với đất. Để giải số bài toán này, phương pháp sai phân ẩn luân hướng lân cận một chiều được áp dụng ở dạng xấp xỉ hiệu.

§ 1. ĐẶT BÀI TOÁN

Giả sử mặt phẳng tọa độ xoy song song với phương nằm ngang của chuyển động thấm phẳng. Từ mặt phẳng này, theo chiều hướng lên trên, ta đo mặt tự do của nước dưới đất z — như hàm của tọa độ x, y và thời gian t.

Với giả thiết là mặt tự do z (t, x, y) và lớp sét $z_Đ(x, y)$ dưới miền chuyển động của nước thấm thay đổi ít, nước dưới đất là chất lỏng không nén và đồng nhất, dòng chảy tuân theo định luật Đac-xi, đất là môi trường không nén và đẳng hướng, từ phương trình bảo toàn khối lượng có thể suy ra [3] phương trình Bu-si-net tổng quát cho z như sau:

$$\sigma \frac{\partial z}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot [(z - z_Đ) k \vec{\triangle} z] + K \frac{z_N - z}{H} + W, \tag{1.1}$$

Ở đây: $\sigma = \sigma(x, y)$ — độ rỗng tự do (hay tích cực) của đất,

$k = k(x, y)$ — hệ số thấm,

$K = K(x, y)$ — hệ số thấm của tầng sét;

$z_N = z_N(z, x, y)$ — cột áp của nước ngầm nằm dưới lớp sét,

$H = H(x, y)$ — chiều dày của lớp sét,

$W = W(t, x, y)$ — cường độ nước mặt thấm tới mặt tự do z.

Giả sử trong nước có chứa chất hòa tan với nồng độ khối lượng lấy trung bình theo chiều cao là C(t, x, y). Nếu lấy thể tích kiểm tra là hình lăng trụ có đáy $\Delta x \Delta y$ và chiều cao $(z - z_Đ)$ thì khối lượng chất hòa tan chứa trong đó sẽ là

$$\sigma(z - z_Đ) \Delta x \Delta y C$$

Sự thay đổi theo thời gian của khối lượng chất hòa tan này là

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} [(z - z_Đ) C] \Delta x \Delta y$$

Theo không gian, khối lượng chất hòa tan này thay đổi do dòng thấm mang đi là

$$\vec{\nabla} \cdot [(z - z_Đ) \vec{v} C] \Delta x \Delta y$$

và do khuếch tán đối lưu là

$$\vec{\nabla} \cdot [(z - z_Đ) D \vec{\nabla} C] \Delta x \Delta y.$$

Ở đây, vận tốc thấm $\vec{v}$ được tính theo định luật Đac-xi:

$$\vec{v} = -k \vec{\nabla} z.$$

Hệ số khuếch tán đối lưu đẳng hướng D được lấy trung bình theo chiều cao và được biểu diễn theo [4] như sau

$$D = \lambda |\vec{v}|$$

với $\lambda = \lambda(t, x, y)$ là hệ số tán xạ đẳng hướng. λ được lấy trung bình theo chiều cao và phụ thuộc vào cấu trúc của đất.

Giả sử nồng độ chất hòa tan của nước mặt và nước ngầm cũng là C. Trong một đơn vị thời gian, khối lượng vi lượng do nước mặt và nước ngầm mang vào thể tích kiểm tra là

$$W \cdot C \Delta x \Delta y$$

và

$$K \frac{z_N - z}{H} C \Delta x \Delta y.$$

Gọi q là cường độ trao đổi chất giữa nước và đất được lấy trung bình theo chiều cao. Trong thể tích kiểm tra được xét, lượng vi lượng tăng thêm trong một đơn vị thời gian do trao đổi chất với đất là

$$q(z - z_Đ) \Delta x \Delta y.$$

Giả sử quá trình trao đổi chất với đất là thuận nghịch và chỉ xét ở dạng kết tinh hay hòa tan, từ [4] ta có

$$q = \gamma (C_b - C)$$

với $\gamma = \gamma(t, x, y)$ là hệ số vận tốc hòa tan và $C_b = C_b(t, x, y)$ là nồng độ bão hòa.

Khối lượng chất hòa tan trong thể tích kiểm tra thay đổi theo thời gian và không gian do các nguồn nước mặt, nước ngầm gây ra và do trao đổi chất với đất. Ta có

$$\sigma \frac{\partial [(z - z_Đ) C]}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [z - z_Đ] \vec{v} C] - \vec{\nabla} \cdot [(z - z_Đ) D \vec{\nabla} C] =$$

$$= W \cdot C + \frac{K(z_N - z)}{H} C + q(z - z_Đ).$$

Dựa vào (1.1) ta có phương trình cho nồng độ C trong trường hợp thấm phẳng như sau

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\vec{\nabla} [(z - z_Đ) D \vec{\nabla} C}{z - z_Đ} + k \vec{\nabla} z \cdot \vec{\nabla} C + q \tag{1.2}$$

Trong (1.2), nước mặt và nước ngầm không ảnh hưởng gì tới sự biến đổi của C. Trường hợp nồng độ của nước mặt và nước ngầm khác với C được xét trong [5].

Với các điều kiện $\sigma > 0$, $k > 0$, $z > z_Đ$, $\lambda > 0$, $|\vec{\nabla} z| > 0$ hệ phương trình đạo hàm riêng bậc 2 (1.1), (1.2) là hệ phương trình parabôlic á tuyến tính đối với Z và C [6]. Ngoài ra, trong [6] cũng chỉ rõ, với các điều kiện đã nêu, phương trình (1.1) (hay (1.2)) là phương trình parabôlic đối với ẩn z (hay C) «của mình». Nhận xét này được sử dụng để xây dựng thuật giải số thống nhất cho (1.1) và (1.2) được trình bày ở § 2

Để đơn giản trong việc trình bày phương pháp tính, ta giải hệ phương trình (1.1), (1.2) trong miền

$$0 < t \leqslant T, \; 0 < x < X, \; 0 < y < Y \tag{1.3}$$

với các điều kiện ban đầu, điều kiện biên (bậc nhất hoặc bậc hai) và điều kiện liên hợp tương ứng cho z và C.

§2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Miền (1.3) được rời rạc thành lưới sau

$$
\begin{aligned}
t^n &= n\Delta t,\ 0 < n \leqslant N,\ \ N = T/\Delta t,\\
x_i &= i\Delta x,\ 0 < i < I,\ \ \ I = X/\Delta x,\\
y_j &= j\Delta y,\ 0 < j < J,\ \ \ J = Y/\Delta y
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Ở từng thời điểm t^{n+1}, phương trình (1.1) được giải trước để tìm z^{n+1}, sau đó C^{n+1} được tính từ (1.2). Việc giải từng phương trình (1.1) hay (1.2) đối với ẩn «của mình» được tiến hành theo phương pháp sai phân ẩn luân hướng lân cận một chiều ở dạng xấp xỉ hiệu như sau

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}\frac{z_{ij}^{n+1/2}-z_{ij}^{n}}{\Delta t} &= k_{ij}(\tilde{z}_{ij}-z_{Đij})\frac{z_{i+1,j}^{n+1/2}-2z_{ij}^{n+1/2}+z_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}+\\
&+\left[\frac{\tilde{z}_{i+1,j}-\tilde{z}_{i-1,j}-z_{Đi+1,j}+z_{Đi-1,j}}{2\Delta x}k_{ij}+(\tilde{z}_{ij}-z_{Đij})\frac{k_{i+1,j}-k_{i-1,j}}{2\Delta x}\right]\times\\
&\times\frac{z_{i+1,j}^{n+1/2}-z_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x}+\frac{1}{2}K_{ij}\frac{z_{Nij}^{n+1/2}-z_{ij}^{n+1/2}}{H_{ij}}+\frac{1}{2}W_{ij}^{n+1/2},
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}\frac{z_{ij}^{n+1}-z_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t} &= k_{ij}(\tilde{z}_{ij}-z_{Đij})\frac{z_{i,j+1}^{n+1}-2z_{ij}^{n+1}+z_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}+\\
&+\left[\frac{\tilde{z}_{i,j+1}-\tilde{z}_{i,j-1}-z_{Đi,j+1}+z_{Đi,j-1}}{2\Delta y}k_{ij}+(\tilde{z}_{ij}-z_{Đij})\frac{k_{i,j+1}-k_{i,j-1}}{2\Delta y}\right]\times\\
&\times\frac{z_{i,j+1}^{n+1}-z_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y}+\frac{1}{2}K_{ij}\frac{z_{Nij}^{n+1}-z_{ij}^{n+1}}{H_{ij}}+\frac{1}{2}W_{ij}^{n+1},
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

hay

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}\left(C_{ij}^{n+1/2}-C_{ij}^{n}\right)\Big/\Delta t &= \lambda_{ij}k_{ij}|\overrightarrow{\nabla}z|_{ij}^{n+1/2}\left(C_{i+1,j}^{n+1/2}-2C_{ij}^{n+1/2}+C_{i-1,j}^{n+1/2}\right)\Big/\Delta x^2+\\
&\Big[(\lambda_{i+1,j}-\lambda_{i-1,j})k_{ij}|\overrightarrow{\nabla}z|_{ij}^{n+1/2}+\lambda_{ij}(k_{i+1,j}-k_{i-1,j})|\overrightarrow{\nabla}z|_{ij}^{n+1/2}+\\
&+\lambda_{ij}k_{ij}\left(|\overrightarrow{\nabla}z|_{i+1,j}^{n+1/2}-|\overrightarrow{\nabla}z|_{i-1,j}^{n+1/2}\right)+k_{ij}\left(z_{i+1,j}^{n+1/2}-z_{i-1,j}^{n+1/2}\right)+\\
&+\lambda_{ij}k_{ij}|\overrightarrow{\nabla}z|_{ij}^{n+1/2}\left(z_{i+1,j}^{n+1/2}-z_{i-1,j}^{n+1/2}-z_{Đi+1,j}+z_{Đi-1,j}\right)\Big/\left(z_{ij}^{n+1/2}-z_{Đij}\right)\Big]\times\\
&\left(C_{i+1,j}^{n+1/2}-C_{i-1,j}^{n+1/2}\right)\Big/4\Delta x^2+\frac{1}{2}\gamma_{ij}^{n+1/2}\left(C_{bij}^{n+1/2}-C_{ij}^{n+1/2}\right),
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}\left(C_{ij}^{n+1}-C_{ij}^{n+1/2}\right)\Big/\Delta t &= \lambda_{ij}k_{ij}|\overrightarrow{\nabla}z|_{ij}^{n+1}\Big(C_{i,j+1}^{n+1}-2C_{ij}^{n+1}+\\
&+C_{i,j-1}^{n+1}\Big)\Big/\Delta y^2+\Big[(\lambda_{i,j+1}-\lambda_{i,j-1})k_{ij}|\overrightarrow{\nabla}z|_{ij}^{n+1}+\lambda_{ij}(k_{i,j+1}-\\
k_{i,-j-1})|\overrightarrow{\nabla}z|_{ij}^{n+1}&+\lambda_{ij}k_{ij}\left(|\overrightarrow{\nabla}z|_{i,j+1}^{n+1}-|\overrightarrow{\nabla}z|_{i,j-1}^{n+1}\right)+k_{ij}\left(z_{i,j+1}^{n+1}-z_{i,j-1}^{n+1}\right)+\\
&+\lambda_{ij}k_{ij}|\overrightarrow{\nabla}z|_{ij}^{n+1}\left(z_{i,j+1}^{n+1}-z_{i,j-1}^{n+1}-z_{Đi,j+1}+z_{Đi,j-1}\right)\Big/\left(z_{ij}^{n+1}-z_{Đij}\right)\Big]\times\\
&\times\left(C_{i,j+1}^{n+1}-C_{i,j-1}^{n+1}\right)\Big/4\Delta y^2+\frac{1}{2}\gamma_{ij}^{n+1}\left(C_{bij}^{n+1}-C_{ij}^{n+1}\right).
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Giả sử đã có z_{ij}^{n}, C_{ij}^{n}. Đầu tiên ta tính $z_{ij}^{n+1/2}$ từ (2.2), tính z_{ij}^{n+1} từ (2.3) và sau đó tính $C_{ij}^{n+1/2}$ từ (2.4), tính C_{ij}^{n+1} từ (2.5). Hệ sai phân (2.2), (2.3) là hệ á tuyến tính. Để tuyến tính hóa, ta dùng phép lặp, trong đó ẩn $\tilde{z}_{ij}$ chứa trong các hệ số được coi là đã biết ở bước lặp trước. Phép lặp ở đây là phép lặp trong từng nửa phương trình (2.2) hay (2.3). Tương tự, ta có thể tiến hành phép lặp cho từng phương trình.

Cho từng nửa phương trình, hệ sai phân tương ứng được giải bằng phương pháp truy đuổi. Trong [6] đã chứng minh rằng điều kiện đủ để phương pháp truy đuổi ổn định khi giải (2.2), (2.4) là

$$
\begin{aligned}
&\max_{1\leqslant i\leqslant I-1} |k_{i+1,j}-k_{i-1,j}| \leqslant \min_{0\leqslant i\leqslant I} k_{ij},\\
&\max_{1\leqslant i\leqslant I-1} |\lambda_{i+1,j}-\lambda_{i-1,j}| \leqslant \min_{0\leqslant i\leqslant I} \lambda_{ij} = m_{\lambda_j},\\
&\max_{1\leqslant i\leqslant I-1} |z_{Đi+1,j}-z_{Đi-1,j}| \leqslant \frac{1}{2}\min_{0\leqslant i\leqslant I} |z_{ij}-z_{Đij}| = \frac{1}{2} m_{TĐj},\\
&\max_{1\leqslant i\leqslant I-1} \left| |\vec{\nabla} z|_{i+1,j} - |\vec{\nabla} z|_{i-1,j}\right| \leqslant \min_{0\leqslant i\leqslant I} |\vec{\nabla} z|_{ij} = m_{grj},\\
&\max_{1\leqslant i\leqslant I-1} |z_{i+1,j}-z_{i-1,j}| \leqslant \min\{m_{\lambda_j}, m_{grj}/2, m_{TĐj}/4\}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

với mọi giá trị j của miền (2.1).

Khi giải (2.3), (2.5), ta có điều kiện đủ để phương pháp truy đuổi ổn định tương tự như (2.6).

§ 3. CÁC BÀI TOÁN CỤ THỂ

Mô hình tính toán được thử nghiệm với các giá trị không thứ nguyên như sau

$$\sigma = 0{,}1,\ k = 10^{-9},\ z_Đ = 0,\ K = 0,\ W = 0,\ \lambda = 1,\ \gamma = 0.$$

Lúc đó, z và C thỏa mãn các phương trình sau

$$\sigma \frac{\partial z}{\partial t} = k\vec{\nabla}\cdot(z\vec{\nabla} z), \tag{3.1}$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \lambda k \frac{\vec{\nabla}\cdot(z|\vec{\nabla} z|\vec{\nabla} C)}{z} + k\vec{\nabla} z\cdot\vec{\nabla} C. \tag{3.2}$$

Nếu ta có trên biên của miền (1.3) $z = z_B(t)$ chỉ phụ thuộc vào t và trong miền (1.3) $z(o, x, y) = z_B(o)$ khi $t = 0$ thì lời giải của (3.1), (1.3) là

$$z(t, x, y) = z_B(t)$$

và của (3.2), (1.3) là

$$C(t, x, y) = C(o, x, y)$$

với bất cứ điều kiện đầu $C(o, x, y)$ và điều kiện biên cho C như thế nào. Vì cơ chế khuếch tán phân tử không được xét tới nên nồng độ của muối ở biên và thời điểm ban đầu không có ảnh hưởng gì tới nồng độ trong miền (1.3) cho bài toán đang xét:

Nếu ta có điều kiện biên

$$
\begin{aligned}
&x = 0 \text{ hay } x = X : \partial z/\partial x = 0,\ \partial C/\partial x = 0;\\
&y = 0 \qquad : z = z_{y_0}(t),\ C = C_{y_0}(t);\\
&y = Y \qquad : z = z_{y_Y}(t),\ C = C_{y_Y}(t),
\end{aligned}
$$

VIỆN KHOA ... THƯ VIỆN ...

điều kiện ban đầu

$$z = z_{t_0}(y), \quad C = C_{t_0}(y)$$

thì các ẩn $z(t, x, y)$, $C(t, x, y)$ chỉ là các hàm của t, y và thỏa mãn các phương trình

$$\sigma \frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial y}\left(z \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\lambda k}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(z \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \frac{\partial C}{\partial y}\right) + k \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial y}.$$

Tương tự như vậy, nếu y đổi chỗ cho x, ta cũng có lời giải của bài toán 2 chiều (3.1), (3.2) chỉ phụ thuộc vào t và x.

Các trường hợp vừa nêu đã được dùng để kiểm tra thuật toán và chương trình [7]. Ngoài ra, trong [7] đã tiến hành giải số các bài toán với các điều kiện biên khác.

Với các giá trị

$$I = J = 50, \quad \Delta x = \Delta y = 0{,}02, \quad \Delta t = 86400$$

của miền rời rạc (2.1) và điều kiện ban đầu

$$z(o, x, y) = 1, \quad C(o, x, y) = 0,$$

ta xét các trường hợp sau:

a) Mặt tự do và nồng độ được cho trên cả biên $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ hay $y = 0$:

$$z(t, x, y) = 1 + 0{,}2t/86400,$$
$$C(t, x, y) = 10^{-3}t/86400.$$

b) Mặt tự do và nồng độ được cho như trường hợp a) trên nửa biên liên tục $x = 0$ hay $y = 1$. Trên nửa biên liên tục còn lại ($x = 1$ hay $y = 0$), đạo hàm của ẩn theo phương vuông góc với biên bằng không:

$$\partial z(t, x, y)/\partial n = 0, \quad \partial C(t, x, y)/\partial n = 0.$$

c) Mặt tự do và nồng độ được cho tại một cạnh $x = 0$ theo công thức ở trường hợp a). Trên ba cạnh biên còn lại, đạo hàm của ẩn theo phương vuông góc với biên bằng không.

d) Mặt tự do và nồng độ được cho theo công thức ở trường hợp a) chỉ tại 1 điểm của biên có tọa độ (1.1). Ở các điểm khác trên biên, đạo hàm của ẩn theo phương vuông góc với biên bằng không.

Kết quả giải số các bài toán trên đã được trình bày trong [7].

§ 4. KẾT LUẬN

Như vậy, bài toán biên hai chiều không dừng theo mô hình thủy lực để xét diễn biến của mặt tự do trong nước dưới đất và sự chuyển chất hòa tan theo cơ chế khuếch tán đối lưu có kể đến việc trao đổi chất với đất đã được đặt ra. Phương pháp sai phân ẩn luân hướng lân cận một chiều ở dạng xấp xỉ hiệu đã được áp dụng cho từng phương trình của hệ và được thử nghiệm qua một số bài toán cụ thể.

Địa chỉ
Phân viện KHVN tại TPHCM

Nhận ngày 15/4/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. V. G. PRYAJINCKAYA, L. M. PLESKOVA. Tính số sự thay đổi mặt tự do của dòng thấm hai chiều. Tạp chí Tin tức các trường đại học. Địa chất và thăm dò, No. 7, 1965 (Tiếng Nga).
2. V. I. LAVRIK. Giải các bài toán truyền chất hòa tan trong trường hợp hệ số khuếch tán đối lưu phụ thuộc vào vận tốc thấm. Báo cáo khoa học 81.18 Viện Toán học AN UXXR, K, 1981. (Tiếng Nga).

3. P. YA. POLUBARINOVA–KOCHINA, V. G. PRYAJINXKAYA, V. N. EMIKH. Các phương pháp toán trong vấn đề tưới tiêu. Nauka, M. 1977, (Tiếng Nga).
4. N. N. VIERIGIN, X.V. VAXILIEP, N. P. KURANOV, V. X. XARKIXIAN, D. F. SULGIN. Các phương pháp dự báo chế độ muối của đất và nước dưới đất, « Kolox », 1979 (Tiếng Nga).
5. ĐÀO MINH NGỌC. Một mô hình toán học cho việc nghiên cứu cân bằng nước và chất lượng nước ở Đồng Tháp Mười. Báo cáo khoa học số 83.201. Phòng Toán học ứng dụng. Phân Viện KHVN tại TP Hồ Chí Minh, 1983.
6. ĐÀO MINH NGỌC. Về một bài toán hai chiều của lý thuyết thấm. Báo cáo khoa học số 82.202. Phòng Toán học ứng dụng Phân viện KHVN tại TP Hồ Chí Minh, 1982.
7. TRẦN VĂN LANG, ĐÀO MINH NGỌC. Cân bằng và chất lượng nước dưới đất vào mùa khô. Báo cáo khoa học số 83.203, Phòng Toán học ứng dụng. Phân Viện Khoa học Việt Nam tại TP Hồ Chí Minh, 1983.

SUMMARY

A TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF FILTRATION THEORY.

The problem about free surface of ground water flow is settled completely with considering the convection diffusion of soluble matter and the matter exchange with ground. A local one-dimensional method of changeable directions is used to perform calculations.

CÁC BÁO CÁO KHOA HỌC ĐÃ TRÌNH BÀY TẠI XEMINE CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG TRONG NĂM HỌC 1984 – 1985

(*Mỗi tháng sinh hoạt một lần vào sáng thứ 7 tuần thứ ba*)
Địa điểm thường trực: Trường đại học thủy lợi 299 Tây Sơn Hà Nội

Tháng 9/1894: Lê Minh Khanh (ĐHTH). Tính toán nhà nhẹ trên nền yếu chịu gió mạnh thường xuyên.
Vũ Văn Thế (Viện Cơ) Bản cứng dẻo biến dạng lớn.

Tháng 10/1984. Dương Tất Thắng (ĐHTH) Về sự truyền gián đoạn yếu trong mô trường dẻo chịu tải phức tạp.
Vũ Văn Thế, Nguyễn Mạnh Thành, Phạm Đức Chính (Viện Cơ) Ứng dụng phương pháp phần tử biên giải bài toán đàn hồi phẳng.

Tháng 11/1984. Bùi Hữu Dân (Viện Cơ) Mô hình dẻo trượt đa tinh thể.
Nguyễn Trân (ĐHXD) Thông báo Luận án Tiến sĩ KHKT.

Tháng 12/1984. Phạm Hồng Giang (ĐHTL) Mô hình tấm lớp có chuyển vị lớn
Trần Dương Hiền (Viện Cơ) Mô phỏng số quan hệ ứng suất biến dạng của vật liệu đàn dẻo dị hướng chịu biến dạng lớn.

Tháng 3/1985. Phạm Thị Oanh (ĐHTH) Sóng trụ và sóng nón trong môi trường có biến dạng trước.