

# GIẢI BÀI TOÁN ĐÀN ĐÉO DỊ HƯỚNG CỦA VẬT LIỆU TÁI BỀN ĐỘNG — ĐẲNG HƯỚNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN

TRẦN DƯƠNG HIỀN

## § 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Để mô tả sát đúng hơn sự làm việc của vật liệu, thuyết chảy dẻo dị hướng của Hill [1] (dạng tổng quát của thuyết Huber — Mises) đã được phát triển bởi Hu, Olszak, Sawczuk, Berman, Hodge, Mróz... và việc xây dựng mô hình toán chặt chẽ của vật liệu đàn dẻo dị hướng có tái bền động — đẳng hướng đã được giải quyết. Gần đây do sự phát triển mạnh của kỹ thuật tính số, mô hình này dần được áp dụng trong thực tế tuy chưa nhiều và thường ở các dạng rút gọn.

Mục đích của bài báo là chuyển sang dạng số của mô hình trên cho trường hợp tổng quát của bài toán 3 chiều. Quan hệ ứng suất — biến dạng được xây dựng cho phép kể đến hiệu ứng tái bền động, tái bền đẳng hướng và vật liệu đàn dẻo lý tưởng. Tính toán được thực hiện theo phương pháp gia số tải trọng [3], mô hình chuyển vị của phần tử hữu hạn được xây dựng. Các ví dụ minh họa được tính bởi chương trình số có thuật toán dựa trên cơ sở mô hình trên.

## § 2. QUAN HỆ ỨNG SUẤT — BIẾN DẠNG CÁC THÔNG SỐ DỊ HƯỚNG

### 2.1. QUAN HỆ ỨNG SUẤT — BIẾN DẠNG

Phương trình mặt chảy dẻo dị hướng Hill — Hu [1, 2] cho trường hợp tổng quát của bài toán 3 chiều có dạng

$$F = \left[ \frac{1}{2} (\underline{\sigma} - \underline{\alpha})^T \underline{A} (\underline{\sigma} - \underline{\alpha}) \right]^{1/2} - \bar{\sigma} = 0, \quad (2.1)$$

trong đó  $\underline{A}$ ,  $\underline{\sigma}$  và  $\underline{\alpha}$  tương ứng là ma trận thông số dị hướng, vectơ ứng suất và vectơ dịch chuyển tâm mặt dẻo,  $\bar{\sigma}$  là ứng suất tương đương với trường hợp bài toán một chiều

Biểu diễn vectơ gia số biến dạng qua 2 thành phần đàn hồi  $d\underline{\varepsilon}^e$  và dẻo  $d\underline{\varepsilon}^p$

$$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}^e + d\underline{\varepsilon}^p, \quad (2.2)$$

$$d\underline{\varepsilon}^e = (\underline{C}^e)^{-1} d\underline{\sigma}, \quad d\underline{\varepsilon}^p = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\lambda},$$

ta có thể viết

$$d\underline{\sigma} = \underline{C}^e \left( d\underline{\varepsilon} - \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\lambda} \right). \quad (2.3)$$

Để viết dạng cuối cùng của quan hệ ứng suất-biến dạng (2.3), cần biểu diễn  $d\bar{\epsilon}$  qua  $d\bar{\epsilon}$ .

Giả thiết vật liệu có hiệu ứng tái bền động-dạng hướng, vectơ gia số biến dạng dẻo có thể mô tả dưới dạng tổng của hai thành phần trong ứng tái bền đẳng hướng  $d\bar{\epsilon}^{Pi}$  và tái bền động  $d\bar{\epsilon}^{Pk}$  [4]

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon}^P &= d\bar{\epsilon}^{Pi} + d\bar{\epsilon}^{Pk}, \\ d\bar{\epsilon}^{Pi} &= \omega d\bar{\epsilon}^P, \quad d\bar{\epsilon}^{Pk} = (1 - \omega)d\bar{\epsilon}^P, \end{aligned} \quad (2.4)$$

ở đây  $\omega$  là hệ số tái bền,  $0 \leq \omega \leq 1$ .

Từ các định nghĩa của Prager và Ziegler, vectơ gia số dịch chuyển tâm mặt dẻo theo định nghĩa của Sawczuk có dạng

$$d\bar{\alpha} = D d\bar{\epsilon}^{Pk} \quad (2.5)$$

trong đó  $D$  - ma trận các môđul dẻo.

Ứng suất trong đường  $\bar{\sigma}$  tính được từ đường cong  $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$  của phép thử một chiều. Trong vùng biến dạng dẻo, đường cong này được tuyến tính hóa từng bước tương ứng với các bước gia tải.

$$d\bar{\sigma} = \omega C_p d\bar{\epsilon}_p, \quad (2.6)$$

trong đó  $C_p$  - môđul dẻo của đường cong mẫu tại bước tải tính toán,  $d\bar{\epsilon}_p$  là gia số cường độ biến dạng dẻo dị hướng [7]

$$d\bar{\epsilon}_p = \sqrt{2} \cdot (d\bar{\epsilon}^{PTA-1} d\bar{\epsilon}^P)^{1/2} \quad (2.7)$$

Sử dụng các công thức từ (2.2) đến (2.7) tính vi phân toàn phần (2.1) ta có

$$d\lambda = \eta \frac{\partial F}{\partial \sigma^T} C^e d\bar{\epsilon}, \quad (2.8)$$

Từ đó (2.3) trở thành

$$d\bar{\sigma} = C^{eP} d\bar{\epsilon}, \quad (2.9)$$

trong đó

$$\begin{aligned} C^{eP} &= C^e + C^P = C^e - \eta C^e \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma^T} C^e, \\ \eta &= \left\{ \omega C_p + \frac{\partial F}{\partial \sigma^T} \left[ C^e + (1 - \omega) D \right] \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^{-1}, \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2\sigma} A[\bar{\sigma} - (1 - \omega) D\bar{\epsilon}^P]. \end{aligned}$$

Từ quan hệ ứng suất-biến dạng (2.9) nhận thấy các mô hình tái bền động ( $\omega = 0$ ) tái bền đẳng hướng ( $\omega = 1$ ) và vật liệu dẻo lý tưởng ( $C_p = 0$ ) được xem là những trường hợp riêng. Với  $\omega = 1$ , (2.9) trùng với kết quả trong [5] nhận được từ cách trình bày khác

## 2.2. VỀ CÁC THÔNG SỐ DỊ HƯỚNG

Các thông số dị hướng trong ma trận  $A$  được xác định từ lúc trạng thái ứng suất thỏa mãn điều kiện dẻo ban đầu. Các thông số ban đầu tính được từ phương trình mặt chảy dẻo (2.1) cho 6 trường hợp của bài toán 1 chiều tương ứng 6 chiều của vectơ ứng suất [2]. Với vật liệu tái bền, trong quá trình chảy dẻo  $A$  là hàm trạng thái biến dạng và các thành phần của nó được xác định khi cân bằng gia số công sinh ra trong quá trình biến dạng dẻo lần lượt với 6 trường hợp của bài toán 1 chiều [6].

### § 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

#### 3.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG

Dùng mô hình chuyển vị, vector chuyển vị  $\underline{u}$  tại điểm bất kỳ của phần tử hữu hạn được biểu diễn qua các chuyển vị nút  $\underline{r}^e$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{r}^e, \quad (3.1)$$

trong đó hàm dạng  $\underline{N}$  được chọn thỏa mãn các tiêu chuẩn liên tục và hội tụ. Vec to biến dạng xác định từ phương trình hình học

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{r}^e. \quad (3.2)$$

quan hệ  $\sigma - \varepsilon$  do đó có thể viết từ (2.9)

$$\underline{d}\sigma = \underline{C}^{ep} \underline{B} \underline{d}r^e. \quad (3.3)$$

Cân bằng năng lượng biến dạng của phần tử chiếm miền  $v$  với công sinh ra do các lực nút, nhận được ma trận cứng phần tử dưới dạng

$$\underline{K}^e = \int_v \underline{B}^T \underline{C}^{ep} \underline{B} \, dv. \quad (3.4)$$

Cho toàn kết cấu ta có hệ phương trình

$$\underline{K} \underline{d}r = \underline{d}F, \quad (3.5)$$

trong đó  $\underline{K}$ ,  $\underline{d}r$ ,  $\underline{d}F$  tương ứng là ma trận cứng, các vector gia số chuyển vị và tải trọng nút. Hệ (3.5) không còn là tuyến tính như trong bài toán đàn hồi vì  $\underline{K}$  là hàm trạng thái, nên được viết dưới dạng gia số để thích ứng với đường lối gia số tải trọng.

#### 3.2. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG

Có hai cách thường dùng để giải hệ phi tuyến (3.5): phương pháp độ cứng thay đổi và phương pháp tải trọng ban đầu.

Dùng phương pháp độ cứng thay đổi [3], tại bước tải trọng thứ  $i$  hệ (3.5) có dạng tuyến tính

$$\underline{K}_{i-1} \underline{d}r_i = \underline{d}F_i \quad (3.6)$$

Phương pháp này đơn giản nên được dùng rộng rãi. Tuy vậy với mỗi bước tải trọng phải tính lại ma trận cứng  $\underline{K}$ , khó đánh giá sai số tích lũy của nghiệm và không dùng được cho mô hình phần tử hữu hạn nửa giải tích vì nó phá vỡ tính trực giao Fourier — ưu điểm cơ bản của mô hình này [7].

Dùng phương pháp tải trọng ban đầu [5], ma trận cứng  $\underline{K}$  được tách ra 2 thành phần đàn hồi  $\underline{K}^e$  và dẻo  $\underline{K}^p$ . Hệ (3.5) cho bước tải trọng thứ  $i$  có dạng

$$\begin{aligned} \underline{K}^e \underline{d}r_i &= \underline{d}F_i + \underline{d}J, \\ \underline{d}J &= -\underline{K}_i^p \underline{d}r_i, \end{aligned} \quad (3.7)$$

với  $\underline{d}J$  là vector tải trọng ban đầu. Hệ (3.7) giải bằng phương pháp lặp. Ở bước lặp thứ  $j$  ta có hệ tuyến tính

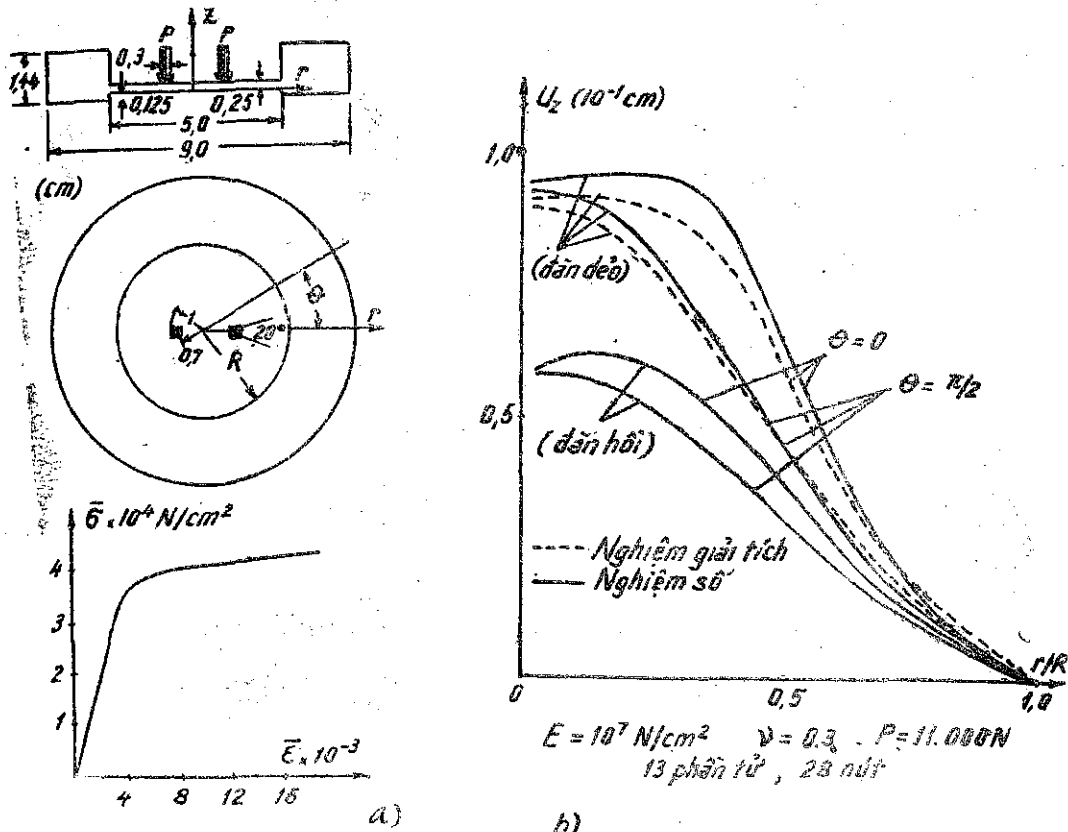
$$\underline{K}^e \underline{d}r_j = \underline{d}F_i + \underline{d}J_{j-1}$$

Sai số cho phép thường đạt được sau 4-6 bước lặp. Phương pháp này khắc phục được những nhược điểm của phương pháp trên. Ưu điểm chính của nó là  $\underline{K}^e$  — ma trận cứng đàn hồi nên không đổi trong suốt quá trình tính toán.

Tuy vậy phải chia các bước tải trọng khá nhỏ và điều chỉnh giá trị véc tơ ứng suất trong mỗi bước lập để thỏa mãn điều kiện dẻo (2.1). Ngoài ra, việc chọn cách tính  $d_1$  (bằng phương pháp ứng suất ban đầu hay biến dạng ban đầu) phụ thuộc lớp bài toán xét.

#### § 4. VÍ DỤ MINH HỌA

Từ quan hệ  $\sigma - \varepsilon$  xây dựng trong §2, và áp dụng các phương pháp số giới thiệu tóm tắt trong §3, thuật toán và chương trình mẫu đã được viết cho lớp bài toán trên. Hệ phi tuyến (3.5) giải bằng phương pháp ứng suất ban đầu. Dưới đây đưa ra 2 ví dụ minh họa. Xét chỉ liết máy đối xứng trục chịu lực tập trung (hình 1a). Trên hình trình bày các đặc trưng hình học, vật liệu và tải trọng. Tính toán tiến hành cho phần giữa của kết cấu khi xem phần ngoài không biến dạng. Mô hình hình học gồm 13 phần tử dạng xuyên mặt cắt chữ nhật. Hình 1b biểu diễn sự thay đổi của chuyển vị  $u_z$  theo bán kính ở các vị trí khác nhau của góc  $\theta$  khi vật liệu làm việc trong trạng thái đàn dẻo chịu tải bền đẳng hướng được so sánh với nghiệm giải tích và nghiệm của bài toán đàn

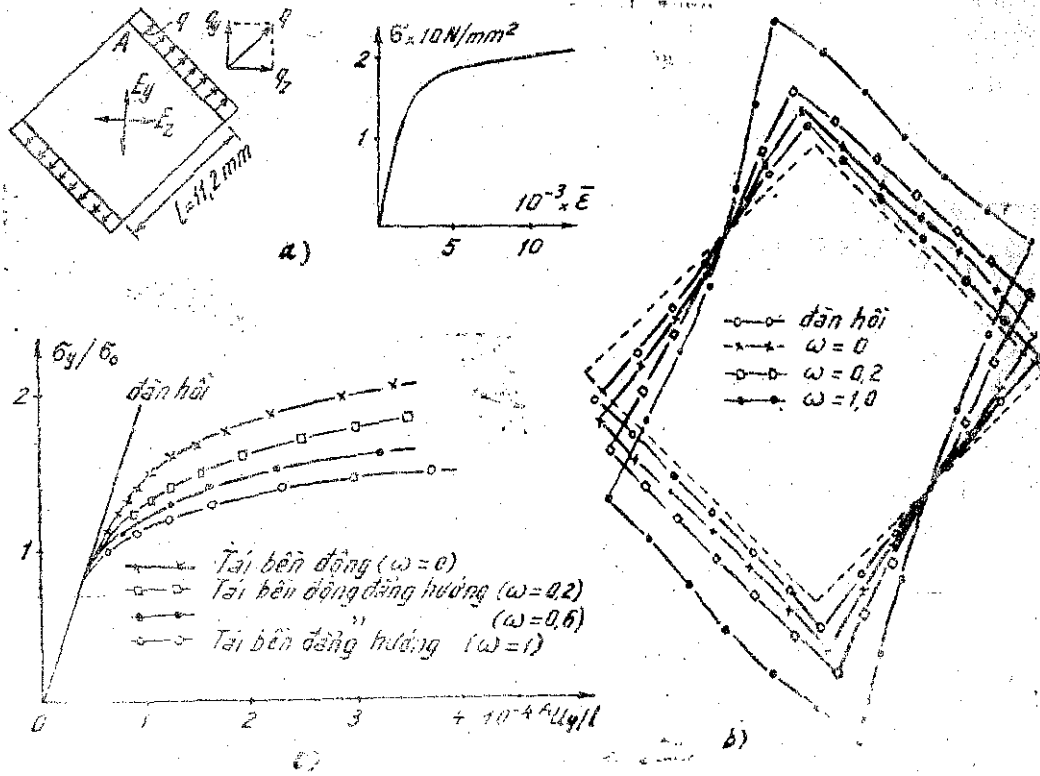


Hình 1

hồi. Do số bước tải trọng dùng còn ít (50 bước) nên có sự chênh lệch kết quả ở các điểm quanh vùng đặt tải thuộc miền dẻo của vật liệu. Tuy vậy sự khác biệt có thể xem là không lớn (max 8%).

Trong ví dụ 2, kết cấu có mặt cắt vuông (hình 2a) chịu lực phân bố đều ở 2 mặt đối diện, có các đặc trưng vật liệu sau: hệ số Poisson  $\nu_x = 0,12$ ;  $\nu_y = 0,23$ , modul đàn hồi (thứ nguyên  $N/mm^2$ )  $E_x^e = 7000$ ;  $E_y^e = 3500$ ;  $E_z^e = 7000$ ;  $G_{xy} = 200$ ;  $G_{xz} = 300$ ;  $G_{yz} = 200$ ;

modul dẻo  $E_x^p = 150$ ;  $E_y^p = 100$ ;  $E_z^p = 150$ ;  $G_{xy} = 40$ ;  $G_{xz} = 60$ ;  $G_{yz} = 40$ ; giới hạn dẻo ban đầu  $\sigma_x^0 = 15$ ;  $\sigma_y^0 = 10$ ;  $\sigma_z^0 = 15$  và đường cong 1 trực lấy theo trục x. Hiệu ứng của tải bên động - đẳng hướng được tính với  $\omega = 0,2$ ;  $\omega = 0,6$  và so sánh với các mô hình tải bên động ( $\omega = 0$ ) và tải bên đẳng hướng ( $\omega = 1$ ) cho 50 bước tải trọng. Sự thay đổi dạng mặt cắt sau quá trình biến dạng được thể hiện định tính trên hình 2b. Quan hệ ứng suất - chuyển vị vẽ trên hình 2c cho thấy: Tại điểm A với  $q_y/\sigma^0 = 1,5$  ta có  $u_y^p/u_y^0 = 1,87$  trong đó  $q_y = q\sqrt{2}/2$ ,  $u_y^0$  và  $u_y^p$  tương ứng là chuyển vị theo hướng y của vật liệu đàn hồi và đàn dẻo. Hình 2c trình bày ảnh hưởng của giả thiết các mô hình tải bên đối xử của vật liệu ứng với các mức tải trọng khác nhau.



Hình 2

## § 5 KẾT LUẬN

Một mô hình phần tử hữu hạn mô tả quan hệ  $\sigma - \epsilon$  cho phép kể đến tính dị hướng của vật liệu đàn dẻo chịu tải bên động - đẳng hướng trong trường hợp của bài toán 3 chiều được xây dựng. Khả năng đánh giá được chính xác sai số của mô hình do việc dùng đồng thời một tập hợp các phương pháp gần đúng: phần tử hữu hạn, gia số tải trọng, tích phân số và phương pháp ứng suất ban đầu. Tuy vậy, phân tích kết quả nhận được thấy được sự phù hợp với nghiệm giải tích. Chương trình số có thể dùng ngay trong tính toán thực tế, không đòi hỏi người tính phải hiểu biết sâu về phương pháp số và cơ học vật rắn biến dạng.

Địa chỉ  
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 20/6/1984

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. HILL R. The mathematical theory of plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.
2. HU L. W. Studies on plastic flow of anisotropic metals, J. Appl. Mech. 23, 3, 1956.
3. ARGYRIS J. H., KLEIBER M. Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto - plasticity - Natural approach, Comp Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 11, N<sup>o</sup> 25, 1977.
4. KLEIBER M. Lagrangian and Eulerian finite element formulation for large strain elasto-plasticity, Bull. Acad. Pol. Sci., Série Sci. Tech., Vol. 23, N<sup>o</sup> 3, 1975.
5. ZIENKIEWICZ O. C. The finite element method in engineering science, Mc. Graw Hill, London 1971.
6. WHANG B. Elasto-plastic orthotropic plates and shells, Proc. Symp. Appl. FEM Civ. Eng., Vanderbilt Univ., Tennessee 1969.
7. T. D. HIỂN, Nonlinear dynamics of complex axisymmetric structures under arbitrary loading, Praca IPPT PAN, N<sup>o</sup> 37, 1981.

### SUMMARY

#### ELASTO - PLASTIC ANALYSIS OF ANISOTROPIC HARDENING MATERIALS BY FINITE ELEMENT METHOD

An elasto - plastic analysis for general three dimensional problems using a finite element model is presented. The analysis is based on Hill's yield criterion which included anisotropic materials displaying kinematic - isotropic hardening. The validity and practical applicability of the algorithm are illustrated by a number of numerical examples, calculated by a computer program written in fortran.

## CÁC BÁO CÁO KHOA HỌC . . .

(Tiếp theo trang 4)

### Tháng 3 năm 1984.

1. Vũ Văn thế (Viện Cơ học) Xác định khả năng chịu lực của công trình sau trạng thái giới hạn.
2. Nguyễn Công Hợp (ĐHTH) Về định lý tồn tại duy nhất nghiệm bài toán biên của lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo.
3. Dương Tất Thắng (ĐHTH) Về các hàm vật liệu trong thuyết xác định địa phương của quá trình biến dạng đàn dẻo.
4. Trần Dương Hiền (Viện Cơ học) Một dạng biểu diễn của gia số cường độ biến dạng dẻo trong lý thuyết chảy dẻo.

### Tháng 4 năm 1984.

1. Đào Huy Bích (ĐHTH) Về những phương pháp giải gần đúng bài toán của lý thuyết quá trình biến dạng dẻo.
2. Đồ Sơn (Viện Cơ học) Giải bài toán tối ưu hóa hình dáng kết cấu thanh và bản bằng phương pháp quy hoạch toán học.

### Tháng 5 năm 1984.

1. Nguyễn Văn Phó (ĐHTH) Một số ý kiến về cách xử lý thông tin trong cơ học.
2. Nguyễn Văn Tinh (ĐHXD) Dao động hỗn hợp xoắn lắc ngang của cầu treo.
3. Nguyễn Văn Vương (ĐHBK) Về một mô hình đàn hồi nhớt phi tuyến ba thông số.

### Tháng 6 năm 1984.

1. Nguyễn Văn lệ (ĐHTL) một số mô hình nền và ứng dụng vào tính toán kết cấu.