Tạp chí cơ học. T. VII, 1985 Số 1 (trang 5 — 7)

DAO ĐỘNG THAM SỐ — CƯỠNG BỨC CỦA DẦM ĐÀN HỒI CHỊU TẢI TRỌNG NGẪU NHIÊN Ở CHẾ ĐỘ KHÔNG DỪNG

NGUYỄN XUÂN HÙNG, NGUYỄN TIẾN KHIÊM

Nhiều bài toán dao động của các công trình như nhà cao tầng, tháp vô tuyến, các dàn khoan v.v... khi nền bị rung động một cách ngẫu nhiên có thể mô tả bằng mô hình của một dầm thẳng đứng, phía dưới ngàm chặt với nền, điểm ngàm thực hiện một dao động ngẫu nhiên với gia tốc $\ddot{\xi}$ tạo với phương nằm ngang một góc α (Hình 1). Khi $\alpha = 0$ bài toán được đưa về xét dao động cưỡng bức của dầm chịu tải trọng ngẫu nhiên, đã được nghiên cứu trong [1], [2]. Trong bài báo này chúng ta xét trường hợp $\alpha \neq 0$. Bài toán này dẫn đến việc nghiên cứu dao động của dầm dưới tác dụng đồng thời của các kích động tham số và cưỡng bức ngẫu nhiên.

Giả thiết quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu có dạng

$$\sigma = E\varepsilon + a\dot{\varepsilon} \qquad (1)$$

Bỏ qua dao động dọc của dầm dễ dàng nhận được phương trình dao động ngang như sau:

$$EJW^{IV} + aJ\dot{W}^{IV} + \rho F\ddot{W} - [P(l - x)W']' - q = 0, \qquad (2)$$

$$P = \rho F\ddot{\xi}\sin\alpha; \quad q = \rho F\ddot{\xi}\cos\alpha \qquad (3)$$

trong đó $W(x, t)$ dịch chuyển ngang tương đối của dầm so với điểm ngàm, J là mômen quán tính của tiết diện ngang, F diện tích tiết diện ngang và ρ — khối lượng riêng.

Đặt: $$W(x, t) = \varphi(x)y(t) \qquad (4)$$

với $\varphi(x)$ là dạng dao động riêng của dầm. Sử dụng phương pháp Galerkin cho phương trình (2) ta nhận được phương trình đối với y:

$$\ddot{y} + \omega^2 y + 2D\omega\dot{y} + \gamma\ddot{\xi}y = \beta\ddot{\xi}, \qquad (5)$$

$$\gamma = \left(\int_0^l (\varphi'\varphi - l\varphi\varphi'' + x\varphi\varphi'')dx \Big/ \int_0^l \varphi^2 dx\right)\sin\alpha;$$

$$\beta = \left(\int_0^l \varphi dx \Big/ \int_0^l \varphi^2 dx\right)\cos\alpha; \quad \omega^2 = \frac{EJk^4}{\rho F l^4}; \quad 2D = \frac{a\omega}{E} \qquad (6)$$

k là giá trị riêng của phương trình : $\varphi^{IV} - (k^4/l^4)\varphi = 0$ với điều kiện biên tương ứng. Gia tốc $\ddot{\xi}(t)$ giả thiết có dạng:

$$\ddot{\xi}(t) = I(t)\,\eta(t) \qquad (7)$$

trong đó $\eta(t)$ là hàm ngẫu nhiên ...

còn $I(t)$ là hàm ... (8)

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 \leqslant t < T \\ 0 & \text{khi } t \geqslant T \end{cases} \tag{9}$$

Quá trình ngẫu nhiên như vậy thường được dùng để mô tả hiện tượng động đất tác dụng trong khoảng thời gian T. Đối với phương trình (5) lập phương trình FPK tương ứng:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\dot{y}f) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}}[(-\omega^2 y - 2D\omega\dot{y})f] - \frac{1}{2}\bar{S}\frac{\partial^2}{\partial \dot{y}^2}[(\beta - \gamma y)^2 f] = 0 \tag{10}$$

$$\bar{S} = \begin{cases} S & \text{khi } 0 \leqslant t < T \\ 0 & \text{khi } t \geqslant T \end{cases} \tag{11}$$

Bằng phương pháp mô men hoặc trực tiếp từ (10) có thể nhận được phương trình vi phân đối với phương sai:

$$\dddot{\sigma}_{yy} + 6D\omega\ddot{\sigma}_{yy} + (4\omega^2 + 8D^2\omega^2)\dot{\sigma}_{yy} + (8D\omega^3 - 2\gamma^2\bar{S})\sigma_{yy} = 2\beta^2\bar{S} \tag{12}$$

Đây là phương trình vi phân có hệ số biến đổi nên để giải nói chung phải sử dụng phương pháp số. Tuy nhiên trong trường hợp có dạng (11) việc tích phân được tiến hành đơn giản bằng cách đưa về phương trình hệ số hằng với điều kiện chuyển tiếp ở $t = T$.

Trường hợp $\gamma = 0$ nghiệm của (12) có dạng $(\sigma_{yy}(o) = \dot{\sigma}_{yy}(o) = \ddot{\sigma}_{yy}(o) = 0)$:

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} \dfrac{\beta^2 S}{4D\omega^3}\left\{1 - e^{-2D\omega t}\left[\dfrac{1}{1-D^2} + \dfrac{D}{\sqrt{1-D^2}}\sin 2\omega\sqrt{1-D^2}\,t - \dfrac{D^2}{1-D^2}\cos 2\omega\sqrt{1-D^2}\,t\right]\right\} & \text{khi } 0 \leqslant t < T \\ e^{-2D\omega t}(A + B\sin 2\omega\sqrt{1-D^2}\,t + C\cos 2\omega\sqrt{1-D^2}\,t) & \text{khi } t \geqslant T \end{cases} \tag{13}$$

Hằng số A, B, C xác định từ điều kiện chuyển tiếp. (Nghiệm này đã nhận được trong [1], [2]).

Khi $\gamma \neq 0$ nghiệm có dạng phức tạp hơn nhiều, nếu $\dfrac{\gamma^2 S}{8\sqrt{3}\omega^3} \ll 1$ nghiệm gần đúng có dạng:

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} \sigma_{yy}^{(1)} & \text{khi } 0 \leqslant t < T \\ \sigma_{yy}^{(2)} & \text{khi } t \geqslant T \end{cases} \tag{14}$$

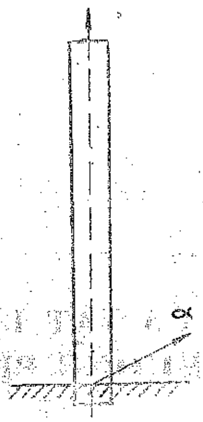
$$\sigma_{yy}^{(i)} = \frac{\beta^2 S}{4D\omega^3 - \gamma^2 S} + A_i \exp\left[-\left(2D\omega - \frac{\gamma^2 S}{2\omega^2(1-D^2)}\right)t\right] +$$

$$+ [B_i \cos 2\omega\sqrt{1-D^2}\,t + C_i \sin 2\omega\sqrt{1-D^2}\,t]\exp\left[-\left(2D\omega + \frac{\gamma^2 S}{4\omega^2(1-D^2)}\right)t\right]$$

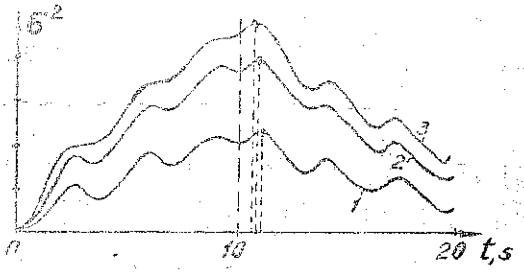
A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2)$ xác định từ điều kiện chuyển tiếp và điều kiện đầu. Trên hình 2 là nghiệm đúng của (12) với $\bar{S}$ có dạng (11) ứng với các góc nghiêng khác nhau, β và γ tính theo (6), φ là hàm riêng thỏa mãn điều kiện biên:

$$\varphi(o) = \varphi'(o) = \varphi''(L) = \varphi'''(L) = 0 \tag{15}$$

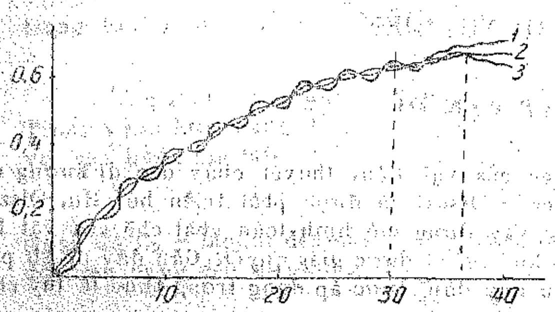
thời gian động đất $T = 10s$. Hình vẽ cho thấy khi tính đến góc nghiêng α dao động giảm



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

đi rõ rệt, như vậy việc tính toán cho trường hợp $\alpha = 0$ sẽ cho điều kiện an toàn lớn hơn, ngoài ra hình vẽ cũng cho thấy dịch chuyền của dầm có phương sai tăng dần theo thời gian và sau khi đã tắt động đất nó vẫn tiếp tục tăng thêm một lúc nữa rồi mới bắt đầu tắt.

Để xác định ảnh hưởng của kích động tham số trên hình vẽ 3 cho nghiệm của phương trình (12) với β không đổi (ứng với $\alpha = \pi/8$) còn γ được tính theo (6) với α nhận các giá trị 0, $\pi/8$, $\pi/4$. Như vậy khi có kích động tham số, trong giai đoạn chuyền tiếp làm dao động quanh giá trị tương ứng với $\alpha = 0$ (chỉ có kích động ngoài) và ảnh hưởng không lớn lắm. Nhưng ở trạng thái dừng thì dao động khi có kích động tham số vượt lên hẳn so với dao động cưỡng bức thuần túy, do đó trong thời gian chuyền tiếp có thể bỏ qua kích động tham số.

Địa chỉ

Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 6/10/1983

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. HEINRICH W., BENNIG K. Zufallsschwingungen Mechanischer Systems. Berlin 1977
2. FRIEDRICH H., LANGE C. Nireaunberschreitungen bei Stochatisch Belasteten Mechanischer Systemer. Berlin 1981. Report Ader W. DDR.

РЕЗЮМЕ

ВЫНУЖДЕНО – ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЛУЧАЙНОЕ КОЛЕБАНИЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрено колебание вертикального упругого стержня с закрепленным нижним концом при случайном возмущении основания. В отличии от рассмотренных другими авторами задач, которые предполагали перемешение основания чисто горизонтальным, в этой работе кроме того, учитывается и вертикальная составляющая перемешения, что приводит задачу к исследованию колебания при одновременном воздействии внешнего и параметрического возмущений. Для анализ влияния параметрического воздействия на данную систему. Решение данное на рисунках получено с помощью ЭВМ.