Tạp chí cơ học T. VIII 1986 Số 4 (trang 20 – 25)

ỔN ĐỊNH CỦA THANH TRONG ĐIỀU KIỆN TỪ BIẾN

TÔ VĂN TẤN

Về vấn đề ổn định trong điều kiện từ biến có nhiều nhà nghiên cứu đã đưa ra những tiêu chuẩn ổn định khác nhau, nhưng nhìn chung những tiêu chuẩn đó cho kết quả không phù hợp với thực nghiệm. Trong bài báo này, trên cơ sở lý thuyết chung về các điểm phân nhánh giả, một mặt đưa ra lời giải bài toán ổn định của thanh dưới dạng thời gian tới hạn, mặt khác nhằm khẳng định tiêu chuẩn ổn định đã được đưa ra [1, 2] trên cơ sở so sánh biến dạng tới hạn.

§1. XÁC ĐỊNH THỜI GIAN TỚI HẠN.

A) ĐỊNH NGHĨA PHÂN NHÁNH GIẢ BẬC N (PGN).

Như chúng ta đã biết [3] sự ổn định của vật thể đàn hồi được xác định trên cơ sở của điểm phân nhánh trạng thái hay phân nhánh bậc O (PO). Đối với vật thể đàn dẻo điểm đặc biệt có tính quyết định là điểm phân nhánh quá trình hay phân nhánh bậc một (P1). Còn đối với sự ổn định vật thể trong điều kiện từ biến thì xét đến các điểm đặc biệt khác : các điểm phân nhánh giả.

Xét quan hệ xác định dạng

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, e, \dot{e}) = 0 \tag{1.1}$$

Giả sử cùng với nghiệm $\sigma^{\circ}(t)$, $e^{\circ}(t)$ ứng với quá trình cơ bản tồn tại nghiệm lân cận $\sigma(t)$, $e(t)$ sao cho $\Delta\sigma = \sigma - \sigma^{\circ} \ll \sigma^{\circ}$, $\Delta e = e - e^{\circ} \ll e^{\circ}$. Khi đó đối với quá trình bị kích động từ (1.1) có thể viết phương trình đã được tuyến tính hóa như sau :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}}\Delta\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial f}{\partial \dot{e}}\Delta\dot{e} = 0 \tag{1.2}$$

Theo [3], nếu trường hợp $\Delta\sigma = \Delta e = 0$, $\Delta\dot{\sigma} \neq 0$, $\Delta\dot{e} \neq 0$ được gọi là phân nhánh bậc một (P1), thì trường hợp $\Delta\dot{\sigma} = \Delta\dot{e} = 0$, $\Delta\sigma \neq 0$, $\Delta e \neq 0$ được gọi một cách qui ước là phân nhánh giả bậc không (PG0).

Nếu xét quan hệ xác định dạng :

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \ldots, \sigma^{(M)}, e, \dot{e}, \ldots, e^{(M)}) = 0 \tag{1.3}$$

thì trường hợp $\Delta\sigma = \Delta e = \Delta\dot{\sigma} = \Delta\dot{e} = \ldots = \Delta\sigma^{(M)} = \Delta e^{(M)} = 0$, $\Delta\sigma^{(N)} \neq 0$, $\Delta e^{(N)} \neq 0$ $(N < M)$ được gọi là phân nhánh giả bậc N (PGN). Và trường hợp $\Delta\sigma = \Delta e = \Delta\dot{\sigma} = \Delta\dot{e} = \ldots = 0$, $\Delta\sigma^{(M)} \neq 0$, $\Delta e^{(M)} \neq 0$ được gọi là phân nhánh bậc M.

Lấy biến phân (1.3) và sử dụng định nghĩa PGN ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial \overset{(N)}{\sigma}} \overset{(N)}{\Delta\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \overset{(N)}{e}} \overset{(N)}{\Delta e} = 0 \quad \text{hay} \quad \overset{(N)}{\Delta\sigma} = \tilde{E}_N \overset{(N)}{\Delta e} \qquad (1.4)$$

trong đó $\tilde{E}_N$ là môđun đàn hồi ảo.

Quan hệ (1.4) có dạng định luật Huc và được gọi là tương tự đàn hồi. Để giải bài toán ổn định cần kết hợp (1.4) với các phương trình cơ bản khác. Như vậy việc giải bài toán ổn định trong điều kiện từ biến đưa về giải bài toán ổn định vật thể đàn hồi mà trong đó môđun E được thay bằng $\tilde{E}_N$.

B – ỔN ĐỊNH TRONG ĐIỀU KIỆN TỪ BIẾN TÁI BỀN VỚI QUI LUẬT HÀM SỐ MŨ.

Xét phương trình của lý thuyết tái bền dạng :

$$\dot{P}P^{\alpha} = A\sigma^{n}$$

trong đó P, $\dot{p}$ là biến dạng từ biến và vận tốc biến dạng từ biến, A, α, n – các hằng số của vật liệu.

Ở đây ta chỉ xét trường hợp từ biến thuần túy ($\dot{\sigma} = 0$)

Lấy biến phân (1.5) và sử dụng định nghĩa PGO ta thu được tương tự đàn hồi đối với PGO :

$$\Delta\sigma = \tilde{E}_o \Delta e \qquad (1.6)$$

trong đó $$\tilde{E}_o = E \Big/ \left(1 + \frac{EnP}{\alpha\sigma}\right)$$

Để tìm thời điểm PG1 ta lấy đạo hàm (1.5) một lần theo t và lấy biến phân biểu thức thu được. Sử dụng định nghĩa PG1 vào đó ta thu được:

$$\Delta\mathring{\sigma} = \tilde{E}_1 \Delta\mathring{e} \qquad (1.7)$$

trong đó $$\tilde{E}_1 = E \Big/ \left(1 + \frac{EnP}{2\alpha\sigma}\right).$$

Tương tự như vậy đối với PG2, ..., PGN ta có :

$$\overset{(N)}{\Delta\sigma} = \tilde{E}_N \overset{(N)}{\Delta e} \qquad (1.8)$$

trong đó $$\tilde{E}_N = E \Big/ \left(1 + \frac{EnP}{(N+1)\alpha\sigma}\right)$$

Bây giờ điều kiện tới hạn được biểu diễn dưới dạng công thức Ole, nhưng trong đó E được thay bằng $\tilde{E}_N$. Với thanh liên kết khớp chịu nén, ta viết được :

$$\sigma = \pi^2 \tilde{E}_N J/Fl^2 = (\pi^2 EJ/Fl^2)\ [1 + EPn/(N+1)\alpha\sigma]^{-1}$$

Thừa số đứng trước dấu ngoặc vuông là ứng suất Ole của thanh. Từ đó ta thu được :

$$P = (N+1)\alpha\,(\sigma_\sigma - \sigma)/En \qquad (1.9)$$

Khi N = 0 điều kiện (1.9) trùng với tiêu chuẩn ổn định Rabôtnôv – Shesterikov, khi N = 1 trùng với tiêu chuẩn Kurshin [3].

Theo giá trị tới hạn P vừa tìm được và trên cơ sở (1.5) xác định được thời gian tới hạn

$$t^* = P^{\alpha+1}/(\alpha+1)\ A\sigma^n \qquad (1.10)$$

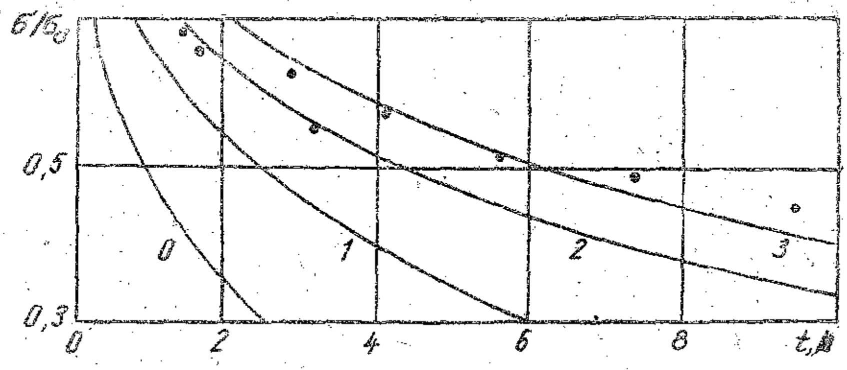
hay

$$t^* = \frac{\{(N+1)\alpha\,(\sigma_\sigma - \sigma)\}^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Delta\sigma^n\,(E_n)^{\alpha+1}} \qquad (1.11)$$

Trong công trình thực nghiệm [4] đã nghiên cứu ổn định các thanh từ đuyara D16T ở nhiệt độ 250°C, có $E = 5{,}9\,.\,10^3 kG/mm^2$, $\sigma_\sigma = 13{,}1 kG/mm^2$. Với giá trị ứng suất nhỏ hơn $9kG/mm^2$ đã xác định được các hằng số :

$$A = 9.10^{-7},\ n = 1{,}36,\ \alpha = 0{,}36 \qquad (1.12)$$

Sử dụng các giá trị (1.12) vào (1.11) ta vẽ được các đường cong ứng với các N khác nhau (hình 1). Ta nhận thấy rằng các điểm thực nghiệm nói chung nằm vào vạch giữa PG2 và PG3



Hình 1

c) LÝ THUYẾT TẢI BỀN VỚI QUI LUẬT HÀM E

Xét phương trình của lý thuyết tải bền dạng

$$\dot{P}P^{\alpha} = Ke^{\sigma/c} \qquad (1.13)$$

trong đó K, C, α — các hằng số của vật liệu.

Ở đây cũng tiến hành các biến đổi tương tự như trường hợp B, ta thu được tương tự đàn hồi đối với PGN

$$\overset{(N)}{\Delta\sigma} = \widetilde{E}_N \overset{(N)}{\Delta e} \qquad (1.14)$$

trong đó

$$\widetilde{E}_N = E\Big/\left(1 + \frac{pE}{(N+1)\alpha C}\right) \qquad (1.15)$$

Điều kiện tới hạn bây giờ được biểu diễn bằng công thức Ơle mà trong đó môđun E cần thay bằng $\widetilde{E}_N$, kết quả là ta thu được điều kiện tới hạn đối với biến dạng từ biến p.

$$p = \left(\frac{\sigma_\sigma}{\sigma} - 1\right)\frac{(N+1)\alpha C}{E} \qquad (1.16)$$

Trên cơ sở phương trình (1.13) xác định thời gian tới hạn tương ứng:

$$t^* = \frac{p^{\alpha+1}}{(\alpha+1)Ke^{\sigma/c}} \qquad (1.17)$$

Từ (1.16) và (1.17) ta thu được

$$t^* = \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)\frac{\alpha C(N+1)}{E}\right]^{\alpha+1} \Big/ \left[(\alpha+1)K\exp\frac{\omega\sigma_\sigma}{C}\right] \qquad (1.18)$$

trong đó

$$\omega = \sigma/\sigma_\sigma$$

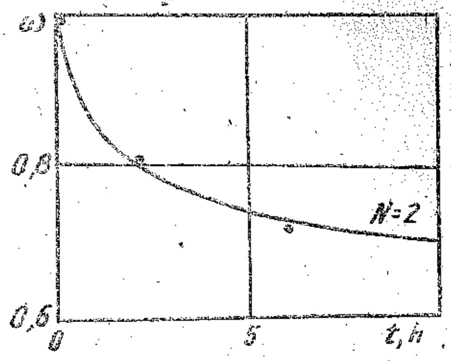
Trong công trình [5] đã tiến hành thực nghiệm nghiên cứu ổn định các thanh đuyara D16T, nhưng không cho trước α, C, K hoặc đường cong từ biến. Do đó ta sử dụng các hằng số từ [6] của D16T ở 200°C;

$$\alpha = 1{,}38\,;\ C = 3{,}4\,;\ K = 1{,}22\,.\,10^{-11};$$

$$E = 6\,.\,10^3 kG/mm^2 \qquad (1.19)$$

Sử dụng (1.18) với $N = 2$ và các giá trị (1,19) vẽ được đường cong $\omega \sim t$ (hình 2). Các điểm thực nghiệm lấy từ [5] cho thấy chúng nằm cạnh đường ứng với $N = 2$.

Qua hai bài toán trên ta thấy đối với thanh từ vật liệu mà tính chất của nó được viết bởi phương trình của lý thuyết tái bền có thể xem bậc phân nhánh giả tới hạn $N_{th} = 2$.



Hình 2

§2. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA PG0, PG1, PG2

Ta chọn đối tượng nghiên cứu là mô hình thanh Senli [3]. Phương trình ở trạng thái mới có dạng

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma u,\ e_1 - e_2 = 2\eta u$$

trong đó

$$\eta = h^2/ld,\ u = W/h,\ \sigma = P/F.$$

Khi đó với điều kiện $\dot{\sigma} = 0$, ta có

$$\overset{(K)}{\Delta\sigma_1} - \overset{(K)}{\Delta\sigma_2} = 2\sigma\overset{(K)}{\Delta u},\ \overset{(K)}{\Delta e_1} - \overset{(K)}{\Delta e_2} = 2\eta\overset{(K)}{\Delta u}\ (K = 1, 2, ..) \qquad (2.1)$$

và

$$\overset{(K)}{\Delta P_1} - \overset{(K)}{\Delta P_2} = 2\left(\eta - \frac{\sigma}{E}\right)\overset{(K)}{\Delta u} \qquad (2.2)$$

Giả sử tính chất vật liệu được viết bởi phương trình

$$\dot{P}P^{\alpha} = A\sigma^n \qquad (2.3)$$

Lấy biến phân (2.3) và sử dụng (2.3) vào phương trình vừa thu được ta có

$$\Delta\dot{P}P + \alpha\dot{P}\Delta P = n\frac{\dot{P}P}{\sigma}\Delta\sigma \qquad (2.4)$$

Nhờ (2.1) và (2.2), quan hệ (2.4) sẽ có dạng

$$\Delta\dot{u} + \frac{\dot{P}}{P}(\alpha - \xi)\Delta u = 0 \qquad (2.5)$$

trong đó

$$\xi = \frac{nPE}{\sigma_\sigma - \sigma},\ \sigma_\sigma = E\eta$$

Từ (2.5) ta thu được:

$$\Delta\dot{u} = -C\frac{\dot{P}}{P}(\alpha - \xi)\exp\left[-\frac{\dot{P}}{P}(\alpha - \xi)t\right] \qquad (2.6)$$

Như vậy từ (2.6) ta có

Khi $\xi < \alpha$ thì $\Delta\dot{u} < 0$ nên Δu giảm

» $\xi = \alpha$ « $\Delta\dot{u} = 0$

» $\xi > \alpha$ « $\Delta\dot{u} > 0$ nên Δu tăng,

và đặt $\Delta u(t_o) = m_o$

Bây giờ lấy đạo hàm (2.3) theo t và sau đó lấy biến phân biểu thức thu được trong đó sử dụng (2.1), (2.2) ta có :

$$\Delta\ddot{u} + \frac{\dot{P}}{P}(2\alpha - \xi)\Delta\dot{u} - \alpha\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)^2\Delta u = 0 \tag{2.7}$$

Tìm nghiệm của (2.7) và sử dụng điều kiện của PG1 ta sẽ thu được :

$$\Delta\ddot{u}(t_o) = \frac{\dot{P}}{2P}(\xi - 2\alpha) \tag{2.8}$$

Vì vậy, khi $\xi < 2\alpha$ thì $\Delta\ddot{u} < 0$ nên $\Delta\dot{u}$ giảm

« $\xi = 2\alpha$ « $\Delta\ddot{u} = 0$

« $\xi > 2\alpha$ « $\Delta\ddot{u} > 0$ nên $\Delta\dot{u}$ tăng

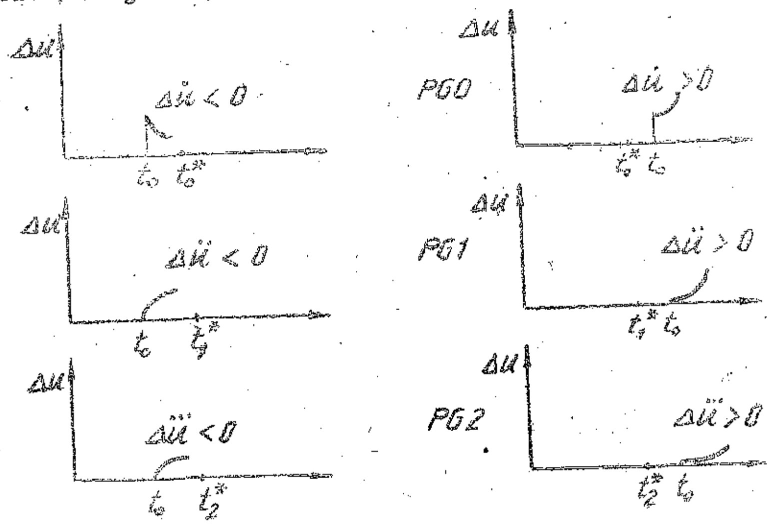
Tương tự như đối với PG2.

Khi $\xi < 3\alpha$ thì $\Delta\dddot{u} < 0$ nên $\Delta\ddot{u}$ giảm

« $\xi = 3\alpha$ » $\Delta\dddot{u} = 0$

« $\xi > 3\alpha$ » $\Delta\dddot{u} > 0$ nên $\Delta\ddot{u}$ tăng

Như vậy ý nghĩa của PGO là ở chỗ : Nếu truyền cho thanh chuyển dịch bé m_o tại thời điểm $t_o < t_o^*$ (t_o^* ứng với $\xi = \alpha$) thì chuyển động bị kích động sẽ giảm dần (ổn định). Nếu thanh nhận được chuyển dịch m_o tại $t_o > t_o^*$ thì chuyển động bị kích động sẽ tăng dần (không ổn định (hình 3).



Hình 3

Ý nghĩa PG1 là ở chỗ nếu ta truyền cho thanh một xung kích động tại $t_o > t_1^*$ thì chuyền động bị kích động sẽ có vận tốc giảm theo thời gian (ổn định). Nếu truyền cho thanh xung kích động tại $t^o > t_1^*$ thì chuyền động bị kích động sẽ có vận tốc tăng (không ổn định) (t_*^1 ứng với $\xi = 2\alpha$). Để xét ý nghĩa PG2 ta truyền cho thanh một lực làm cho nó chuyền động với gia tốc thay đổi rồi xét sự thay đổi gia tốc trong một khoảng thời gian bé sau t_o. Nếu truyền kích động tại $t_o < t_2^*$ thì thanh bị kích động sẽ chuyền động với gia tốc giảm (ổn định) Nếu truyền kích động tại $t_o > t_2^*$ nó sẽ chuyền động với gia tốc tăng (không ổn định) (t_2^* ứng với $\xi = 3\alpha$) (hình 3).

§3. KẾT LUẬN

Từ các nghiên cứu trên ta đi đến kết luận sau:

1. Đối với các thanh làm việc trong điều kiện từ biến có thể xem phân nhánh giả bậc 2 là biên giới của miền ổn định.

2. Khác với thanh đàn hồi hoặc đàn dẻo, sự mất ổn định của thanh trong điều kiện từ biến mang tính chất qui ước nhiều hơn và sự mất ổn định xảy ra khi thanh bỏ qua một vài điểm đặc biệt ban đầu và liên quan với sự thay đổi gia tốc của chuyền động.

3. Có thể tính thời gian tới hạn của thanh từ kim loại theo công thức (1.11) hoặc (1.18) với $N = 2$.

Địa chỉ
Trường ĐH Xây dựng HN

Nhận ngày 26/3/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. КЛЮШНИКОВ В.Д., ТО ВАН ТАН. Устойчивость при ползучести: вариант теории и эксперимент. Изв. АН СССР МТТ, №2, 1986.
2. ТО ВАН ТАН. Устойчивость тонкостенных конструкций, обладающих реологическим свойством. Канд. дисс., М. 1985.
3. КЛЮШНИКОВ В.Д. Устойчивость упруго — пластических систем. Наука, М., 1980.
4. КУЗНЕЦОВ А.П. Устойчивость сжатых стержней из дуралюмина в условиях ползучести. ПМТФ, №6, 1961.
5. БЕЛОУС А.А., ПОСПЕЛОВ И.И. Об устойчивости стержня при ползучести. Труды ЦАГИ, вып 1140, 1973.
6. НАМЕСТНИКОВ В.С., ХВОСТУНКОВ А.А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, №4, 1961.

РЕЗЮМЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

На основании общей теории псевдобифуркационных точек построены упругие эквиваленты определяющего соотношения в случаях устойчивости деформирования стержней. Получены решения задачи устойчивости стержней. Дано сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными и подтвержден новый критерий устойчивости в условиях ползучести. Показан механический смысл ПБО, ПБ1, ПБ2.