Tạp chí Cơ học. T. VIII 1986 số 4 (trang 9 – 14)

QUAN HỆ GIỮA BÀI TOÁN PHÁ HỦY DẺO VÀ BÀI TOÁN THÍCH ỨNG CỦA HỆ ĐÀN – DẺO

NGUYỄN VĂN PHÓ

§ MỞ ĐẦU

Bàn về quan hệ giữa bài toán phá hủy dẻo và bài toán thích ứng của vật thể đàn – dẻo lý tưởng, W.T.Koiter đã nêu ý kiến [4]:... « Cần lưu ý rằng các định lý về phá hủy dẻo là trường hợp giới hạn của các định lý thích ứng, tương ứng với sự trùng nhau của cận dưới và cận trên của tất cả các tải trọng.

Song các định lý về sự phá hủy dẻo được xét riêng, không những vì nó có giá trị thực tiễn to lớn, mà còn vì nó hiển nhiên hơn.

Mặt khác, rất ngạc nhiên là mối liên hệ giữa các định lý phá hủy dẻo và các định lý thích ứng cho đến nay có lẽ còn không được chú ý đến và lý thuyết phá hủy dẻo đã phát triển độc lập »...

Bài toán được đặt ra là tìm miền tải trọng mà hệ không bị phá hủy dẻo hay thích ứng trên đó.

Để giải các bài toán trên người ta dựa vào các định lý phá hủy dẻo và định lý thích ứng.

Trong bài này, chúng tôi xin trình bày các phần sau:

1. Dựa theo định lý phá hủy dẻo của D.C.Drucker và định lý thích ứng của E. Melan [4] để chứng minh rằng miền tải trọng an toàn theo định lý phá hủy dẻo bao miền tải trọng thích ứng.

2. Dựa trên cơ sở định lý phá hủy dẻo của D.C. Drucker và định lý thích ứng mà chúng tôi đã chứng minh trong [2] để chứng minh rằng miền tải trọng an toàn theo định lý phá hủy dẻo của D.C.Drucker trùng với miền tải trọng thích ứng theo định lý mới về sự thích ứng [2].

3. Từ kết quả của phần 2) ta chỉ ra rằng vấn đề biến suy rộng trong bài toán thích ứng là vấn đề rất phức tạp [1, 3, 5] được giải quyết một cách dễ dàng bằng cách tìm miền tải trọng an toàn đối với tiêu chuẩn phá hủy dẻo (trong đó vấn đề biến suy rộng đã được giải quyết), từ đó suy ra miền an toàn đối với bài toán thích ứng.

§ 1. QUAN HỆ GIỮA HAI BÀI TOÁN KHI DỰA THEO CÁC ĐỊNH LÝ CỦA D.C. DRUCKER VÀ ĐỊNH LÝ CỦA E. MELAN [4]

Sau đây chúng ta chứng minh rằng miền tải trọng thích ứng thuộc vào miền tải trọng an toàn theo định lý phá hủy dẻo.

Thật vậy, không mất tính chất tổng quát, để đơn giản sự trình bày, ta xét trường hợp một tải trọng $\vec{P}$.

Theo định lý D.C. Drucker, điều kiện đủ của an toàn là:

$$\exists\vec{\sigma}_{AT} \Rightarrow \begin{cases} \vec{L}\vec{\sigma}_{AT} = 0 & \forall\vec{x} \in V, \notin S_P & (1.1) \\ \vec{N}\vec{\sigma}_{AT} = \vec{P} & \forall\vec{x} \in S_P & (1.2) \\ f(\vec{\sigma}_{AT}) < C & \forall\vec{x} \in V & (1.3) \end{cases}$$

Trong đó $\vec{\sigma}_{AT}$ là trường ứng suất an toàn điều kiện $f = C$ là điều kiện dẻo.

L, N là các toán tử cân bằng

S_p là phần mặt vật chịu tác dụng tải trọng ngoài.

Theo định lý thích ứng của E. Melan, điều kiện đủ thích ứng là

$$\exists\vec{\rho}(\vec{x}) \Rightarrow \begin{cases} L\vec{\rho}(\vec{x}) = 0 & \forall\vec{x} \in V, \notin S_P & (1.4) \\ N\vec{\rho}(\vec{x}) = 0 & \forall\vec{x} \in S_P & (1.5) \\ f(\vec{\sigma}^{(e)} + \vec{\rho}) < C & \forall\vec{x} \in V & (1.6) \end{cases}$$

Trong đó $\vec{\rho}(\vec{x})$ là trường ứng suất dư không phụ thuộc thời gian, $\vec{\sigma}^{(e)}$ là trường ứng suất đàn hồi lý tưởng và vô hạn.

Ta gọi ứng suất tổng cộng là $\vec{\sigma}_{TC} = \vec{\rho} + \vec{\sigma}^{(e)}$

Vì

$$\begin{cases} L\vec{\sigma}^{(e)} = 0 & \forall\vec{x} \in V, \notin S_P \\ N\vec{\sigma}^{(e)} = \vec{P} & \forall\vec{x} \in S_P \end{cases}$$

và các toán tử L, N là tuyến tính, theo (1.4), (1.5), (1.6) ta có:

$$\begin{cases} L\vec{\sigma}_{TC} = 0 & \forall\vec{x} \in V, \notin S_P \\ N\vec{\sigma}_{TC} = \vec{P} & \forall\vec{x} \in S_P \\ f(\vec{\sigma}_{TC}) < C & \forall\vec{x} \in V \end{cases}$$

Rõ ràng $\vec{\sigma}_{TC}$ là trường ứng suất an toàn vì nó thỏa mãn các điều kiện (1.1) – (1.3).

Như vậy, hệ thích ứng trên G thì hệ an toàn (không phá hủy dẻo) trên G. Điều kết luận ngược lại nói chung là không đúng.

Thật vậy, nói chung trường ứng suất an toàn theo tiêu chuẩn phá hủy dẻo không thể phân thành hai phần ứng suất dư không phụ thuộc vào thời gian $\vec{\rho}(\vec{x})$ và ứng suất đàn hồi lý tưởng $\vec{\sigma}^{(e)}(\vec{x}, \vec{P})$.

Điều đó cũng hiển nhiên, trường ứng suất an toàn chỉ cần thỏa mãn điều kiện cân bằng và không đạt giới hạn dẻo, trong khi trường ứng suất đàn hồi cần phải thỏa mãn các điều kiện khác chẳng hạn điều kiện liên tục.

§ 2. QUAN HỆ GIỮA HAI BÀI TOÁN KHI DỰA TRÊN ĐỊNH LÝ CỦA D.C. DRUCKER VÀ ĐỊNH LÝ THÍCH ỨNG CỦA CHÚNG TÔI [2].

Theo [2]

$$\exists \vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P}) \Rightarrow \begin{cases} L\vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P}) = 0 & \forall \vec{x} \in V, \notin S_P \quad (2.1) \\ N\vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P}) = 0 & \forall \vec{x} \in S_P \quad (2.2) \\ f(\vec{\sigma}^{(e)} + \vec{\rho}) < C & \forall \vec{x} \in V \quad (2.3) \end{cases}$$

Sau đây ta chứng minh rằng nếu thỏa mãn (1.1) — (1.3) thì ta suy ra thỏa mãn (2.1) — (2.3) và ngược lại, nghĩa là hai miền tải trọng trùng nhau.

Trước khi chứng minh mệnh đề trên ta cần làm sáng tỏ một vấn đề là cách đặt tải trọng hai bài toán là khác nhau (đơn giản và phức tạp) thì sự trùng nhau của miền tải trọng được hiểu theo nghĩa nào?

Bài toán đặt ra ở đây là tìm miền tải trọng an toàn hay thích ứng, trong miền đó có thể đặt tải đơn giản ứng với các quỹ đạo tải trọng là những tia đường thẳng xuất phát từ gốc và tăng đơn điệu theo một hướng (bài toán phá hủy dẻo);

Còn đặt tải phức tạp (bài toán thích ứng), cũng trên miền tải trọng đó, song quỹ đạo tải trọng có thể là đường thẳng hay đường cong và quy luật biến thiên trên các quỹ đạo đó là tùy ý.

Trong bài toán thích ứng, ứng suất đàn hồi lý tưởng coi như đã biết, vì khi giải bài toán dẻo thì giả thiết đã biết nghiệm đàn hồi. Song các chứng minh sau đây, chỉ cần coi nghiệm đàn hồi đã biết, chứ không cần tính cụ thể chúng.

Để suy ra rằng nếu thỏa mãn (1.1) — (1.3) thì sẽ thỏa mãn (2.1) — (2.3) ta lập luận như sau:

Ta tìm trường ứng suất dư trong (2.1) — (2.3) là

$$\vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P}) \equiv \vec{\sigma}_{AT}(\vec{x}, \vec{P}) - \vec{\sigma}^{(e)}(\vec{x}, \vec{P})$$

hay

$$\vec{\sigma}_{AT} = \vec{\sigma}^{(e)} + \vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P})$$

Do L, N tuyến tính, $\vec{\sigma}_{AT}$ thỏa mãn (1.1) — (1.3) và $\vec{\sigma}^{(e)}(\vec{x}, \vec{P})$ thỏa mãn (1.1) — (1.2), nên

$$L\vec{\rho} = 0 \qquad \forall \vec{x} \in V, \notin S_p, \forall \vec{P} \in G$$

$$N\vec{\rho} = 0 \qquad \forall \vec{x} \in S_p, \forall \vec{P} \in G$$

Do điều kiện (1.3) mà $f\{\vec{\sigma}^{(e)} + \vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P})\} < c. \forall \vec{x} \in V, \forall \vec{P} \in G$

Nghĩa là ứng với $\vec{P}$ nào đó thì $\exists \vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P})$ thỏa mãn (2.1) — (2.3). Đó là điều phải chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh điều ngược lại, nghĩa là nếu $\exists \vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P})$ thỏa mãn (2.1) — (2.3) thì sẽ $\exists \vec{\sigma}_{AT}$ thỏa mãn (1.1) — (1.3).

Thật vậy, tương tự như trên ta chọn trường ứng suất an toàn là

$$\vec{\sigma}_{AT} \equiv \vec{\sigma}^{(e)}(\vec{x}, \vec{P}) + \vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P})$$

Dễ ràng ta suy ra rằng $\vec{\sigma}_{AT}$ thỏa mãn (1.1) — (1.3)

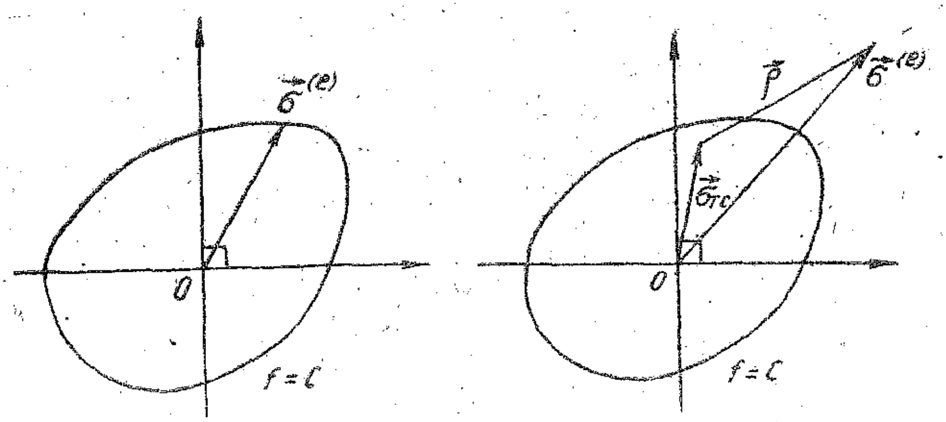
Chú ý: Như ta đã biết, trong khi chứng minh định lý thích ứng ta cần điều kiện trường ứng suất dư $\vec{\rho} \not\equiv 0$ $\forall \vec{x} \in V$, $\forall \vec{P} \in G$ tức là ta phải thỏa mãn điều kiện

$$\vec{\sigma}_{AT}(\vec{x}, \vec{P}) - \vec{\sigma}^{(e)}(\vec{x}, \vec{P}) \not\equiv 0 \qquad \forall \vec{x} \in V, \forall \vec{P} \in G$$

Ta thấy $\vec{\sigma}_{AT}$ chỉ là nghiệm của phương trình cân bằng, còn $\vec{\sigma}^{(e)}$ là nghiệm đàn hồi của bài toán, nên đối với hệ tĩnh định có khả năng trùng nhau của $\vec{\sigma}_{AT}$ và $\vec{\sigma}^{(e)}$, còn đối với hệ siêu tĩnh khả năng trùng nhau ít xảy ra.

Trường hợp hệ siêu tĩnh, nếu ta thấy với một trường $\vec{\sigma}_{AT}(\vec{x}, \vec{P})$ nào đó trùng với nghiệm đàn hồi $\vec{\sigma}^{(e)}(\vec{x}, \vec{P})$ thì ta chọn trường $\vec{\sigma}_{AT}$ khác cũng ứng với giá trị $\vec{P}$ đó. Vì rằng trong trường hợp hệ siêu tĩnh thì số trường $\vec{\sigma}_{AT}(\vec{x}, \vec{P})$ là vô hạn (ứng với cùng một giá trị $\vec{P}$).

Về phương diện hình học ta có thể minh họa điều kiện $f(\vec{\sigma}^{(e)}) < C$ và $f(\vec{\sigma}^{(e)} + \vec{\rho}) < C$ như hình vẽ sau:



Hình 1

ứng suất đàn hồi lý tưởng $\vec{\sigma}^{(e)}(\vec{x}, \vec{P})$ có thể ra ngoài mặt giới hạn $f = c$, còn $\vec{\sigma}_{TC}$ chỉ có thể nằm trong mặt đó, nếu ta có thể tìm được véc tơ hiệu $\vec{\rho}(\vec{x}, \vec{P}) \not\equiv 0$

Thí dụ: Xin xét một thí dụ đơn giản mà một số tác giả đã đưa ra để minh họa cho định lý hoặc phương pháp của mình [6, 7]. Ở đây chúng tôi cũng dùng thí dụ đó để minh họa cho sự so sánh nêu ở các phần trên.

Tìm miền thích ứng của thanh tròn bán kính a chịu tác dụng của mômen xoắn M
Nghiệm đàn hồi là

$$\tau_{\varphi z} = \frac{2M}{\pi a^4} r$$

Ta dùng các biến không thứ nguyên

$$\bar{\rho} = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_s}, \quad m = \frac{2M}{\pi a^3 \tau_s}$$

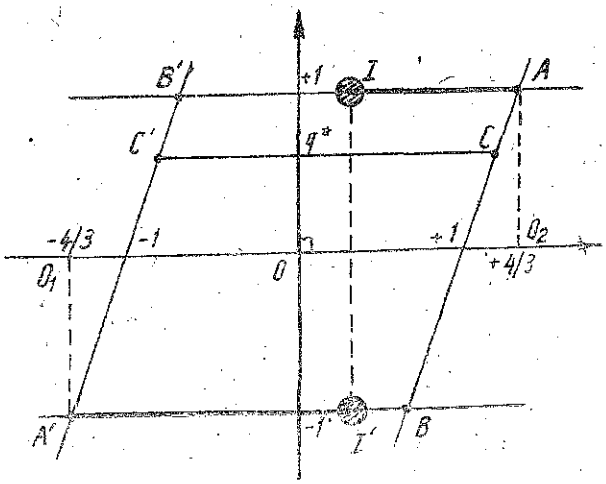
Khi đó $\tau = m\bar{\rho}$, trường ứng suất dư ta chọn phụ thuộc một tham số là : $\rho = q(1 + c\bar{\rho})$ ở đây $q = q(\bar{\rho}, m)$, $C = -4/3$. Khi đó trường ứng suất tổng cộng là

$$\tau_{TC} = m\bar{\rho} + q\left(1 - \frac{4}{3}\bar{\rho}\right)$$

Chọn điều kiện dẻo $\tau = \pm 1$

Xét họ đường trên mặt phẳng (m,q)

$q \neq 0$. Theo định lý thích ứng của E. Melan thì $\exists\, \rho(\vec{x})$, $\forall \vec{P} \in G$ nghĩa là một trường ứng suất dư với mọi giá trị m biến thiên trong miền thích ứng. Do đó $q = q(\rho)$. Nếu m thay đổi tùy ý nhưng $m > 0$ thì $m_{max} = 4/3$, $m \in [0, 4/3]$ và $m_{min} = -4/3$ với $m < 0$, $m \in [-4/3, 0]$.



Hình 2

Nếu m đổi dấu thì $-1 \leqslant m \leqslant 1$ ứng với $q = q^*$ nào đó $q^* \in [-1, 1]$, nghĩa là m biến thiên tùy ý trên đoạn cc', $\Delta m = 2$.

Theo định lý thích ứng mà chúng tôi đã chứng minh trong [2] thì $\exists\, \rho(\vec{x}, \vec{P})$, nghĩa là $q = q(m, \bar{\rho})$. Khi m biến thiên trên A'I' ta chọn $q = -1$, $I' \in (A'B)$. Khi m biến thiên trên IA ta chọn $q = +1$, $I \in (B'A)$. Như vậy, miền thích ứng đối với m là $-\frac{4}{3} \leqslant m \leqslant \frac{4}{3}$, $\Delta m = \frac{8}{3}$.

Bây giờ ta xét bài toán trạng thái giới hạn đối với thanh tròn. Vì đặt tải đơn giản nên m chỉ có thể thay đổi từ $0 \rightarrow 0_2$ $(m > 0)$ hoặc từ $0 \rightarrow 0_1$ $(m < 0)$. Dễ dàng ta thấy rằng mômen giới hạn là $m_o = 4/3$ $(m > 0)$ và $m_o = -4/3$ $(m < 0)$. Do đó hai miền tải trọng phá hủy dẻo và thích ứng trùng nhau.

§3. KẾT LUẬN

Trong bài toán phá hủy dẻo, ta có các định lý hoàn toàn tương tự giữa biến vật lý thông thường và biến suy rộng. Vì vậy khi giải bài toán phá hủy dẻo đối với bản và vỏ mỏng ta không gặp khó khăn. Ngược lại, trong bài toán thích ứng thì không có sự tương tự nói trên, mà ta chỉ thành lập được định lý thích ứng trong biến suy rộng cho từng lớp bài toán hẹp [1, 3, 5].

Nhờ kết quả chứng minh ở phần 2) ta hoàn toàn có thể thay việc giải bài toán thích ứng phức tạp đối với biến suy rộng bằng việc giải dễ dàng bài toán phá hủy dẻo đối với biến suy rộng. Các kết quả trên đây hoàn toàn có thể mở rộng cho bài toán thích ứng động lực một cách dễ dàng.

Địa chỉ
Trường Đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 7/4/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. KONIG J. A. Theory of Shakedown of elastic — plastic Structures. Arch. Mech. Stos, 18, 1966.
2. NGUYỄN VĂN PHÓ. Về một định lý của lý thuyết thích ứng của hệ đàn dẻo. Tạp chí Cơ học, số 2, 1986.
3. РЫХЛЕВСКИЙ Я., ШАПИРО Г. С. Идеально — пластические пластинки и оболочки. Труды VI всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Москва 1966.
4. КОЙТЕР В. Т. Общие теоремы теории упруго — пластических сред. Изд. иностранной литературы, Москва, 1961.
5. ГОХФЕЛЬД Д. А., ЧЕРНЯВСКИЙ О. Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. Машиностроение, Москва, 197[illegible].
6. РОЗЕНБЛЮМ В. И. К теории приспособляемости упруго — пластических тел. Изв АН СССР ОТН № 6, 1958.
7. КАЧАНОВ Л. М. Основы теории пластичности. Наука, Москва, 1969.

SUMMARY

ON THE RELATIONS OF PLASTIC ANALYSIS AND OF SHAKEDOWN ANALYSIS OF ELASTIC — PLASTIC STRUCTURES

1. On the bases of D. C. Druker 's theorem of the plastic Analysis and E. Melan 's theorem of the Shakedown Analysis, the paper shows that, if the load domain of Shakedown is G and the load domain of plastic Analysis is Q then $G \subset Q$.

2. On the bases of D. C. Drucker 's theorem and on the Shakedown theorem of the author then $G \equiv Q$.