

BÀI TOÁN FLUTTER CỦA CẦU TREO CÓ KÈ TỚI LỰC CẢN

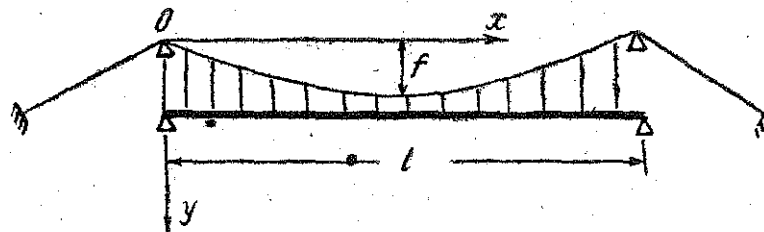
NGUYỄN VĂN TỈNH

Bài toán flutter của cầu treo khi bỏ qua lực cản, bằng cách sử dụng phương pháp Galiörkin, trong [2, 3] đã được khảo sát với giả thiết hàm lực nâng và mô men khí động biểu diễn dưới dạng hàm Theodorsen. Trong bài này tiếp tục nghiên cứu bài toán flutter của cầu treo khi có kè tới lực cản.

Dựa theo tài liệu [1, 4, 5] thì lực cản trong dao động uốn có ảnh hưởng không đáng kể tới giá trị của tốc độ gió tới hạn cho nên ở đây ta cũng chỉ khảo sát khi kè tới lực cản trong dao động xoắn. Kết quả của bài toán là đã thiết lập được công thức gần đúng liên hệ giữa tốc độ gió tới hạn và các tham số khác của dao động.

§1. THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG HỖN HỢP UỐN VÀ XOẮN

Đối với cầu treo dầm cứng hai đầu gối tựa (hình 1) thì phương trình vi phân chuyển động của cầu có thể viết dưới dạng sau đây:



Hình 1

$$EJ\bar{q}^{IV} + m\ddot{\bar{q}} + S = P^*, \quad (1.1)$$

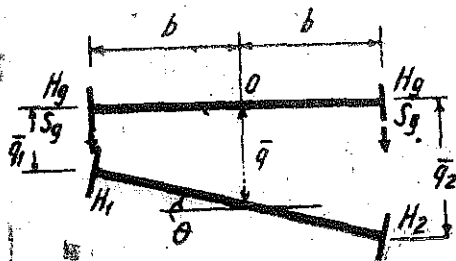
$$EJ_{\omega}\theta^{IV} - GJ_d\theta'' + m r^2\ddot{\theta} + m_t = M^*,$$

trong đó P^* và M^* là lực nâng và mô men khí động;

S là lực tác dụng trong thanh giằng;

m_t là mô men xoắn do các lực S_1 và S_2 gây ra (hình 2);

H là lực kéo ngang trong dây cáp.



Hình 2

Từ hình vẽ ta thấy:

$$\bar{q}_1 = \bar{q} - b\theta, \quad \bar{q}_2 = \bar{q} + b\theta \quad (1.2)$$

Trên cả tiết diện của cầu sẽ chịu tác dụng của các lực từ các thanh giằng là:

$$S = S_1 + S_2 \quad (1.3)$$

và chịu tác dụng của mômen:

$$m_t = b(S_2 - S_1) \quad (1.4)$$

Mặt khác lực từ các thanh giằng được tính theo các công thức:

$$S_1 = - (H_{1d} + H_g) (y'' + \bar{q}_1''), S_2 = - (H_{2d} + H_g) (y'' + \bar{q}_2'') \quad (1.5)$$

Trong đó H_{1d} và H_{2d} lần lượt là lực kéo ngang động lực của dây cáp bên trái và bên phải; $y'' = d^2y/dx^2$, với y là hàm biểu diễn dạng ban đầu của dây cáp.

Thay các giá trị của S_1 và S_2 từ (1.5) vào (1.4) và (1.3) ta được

$$S = - (H_{1d} + H_g) (y'' + \bar{q}_1'') - (H_{2d} + H_g) (y'' + \bar{q}_2''), \quad (1.6)$$

$$m_t = b \{ - (H_{2d} + H_g) (y'' + \bar{q}_2'') + (H_{1d} + H_g) (y'' + \bar{q}_1'') \} \quad (1.7)$$

Từ biểu thức (1.6) ta có:

$$S = - 2y''H_g - y''(H_{1d} + H_{2d}) - (H_{1d} + H_g)\bar{q}_1'' - (H_{2d} + H_g)\bar{q}_2'' \quad (1.8)$$

Theo [6] thì số hạng $2y''H_g$ sẽ cân bằng với tải trọng tĩnh tác dụng trên một đơn vị dài của cầu, mặt khác theo (1.2) thì

$$\bar{q}_1'' = \bar{q}'' - b\theta'', \quad \bar{q}_2'' = \bar{q}'' + b\theta''$$

cho nên từ (1.8) ta được:

$$S = -y''(H_{1d} + H_{2d}) - (H_{1d} + H_{2d} - 2H_g)\bar{q}'' + b(H_{1d} - H_{2d})\theta''$$

Thực hiện phép nhân và sau khi bỏ các số hạng phi tuyến ta có:

$$S = -y''(H_{1d} + H_{2d}) - 2H_g\bar{q}'' \quad (1.9)$$

Tương tự đối với m_t :

$$m_t = by''(H_{1d} + H_{2d}) - 2b^2H_g\theta'' \quad (1.10)$$

Trong các biểu thức (1.9) và (1.10) thì lực kéo ngang động lực H_{1d} và H_{2d} trong dao động hỗn hợp uốn và xoắn được xác định theo công thức:

$$H_{1d} = \frac{E_c F_c}{l\mu} y'' \int_0^1 \bar{q}_1(x, t) dx = k \int_0^1 \bar{q}_1(x, t) dx. \quad (1.11)$$

$$H_{2d} = \frac{E_c F_c}{l\mu} y'' \int_0^1 \bar{q}_2(x, t) dx = k \int_0^1 \bar{q}_2(x, t) dx.$$

Bây giờ thay (1.2) vào (1.1) ta có:

$$H_{1d} = k \int_0^1 \bar{q}(x, t) dx - kb \int_0^1 \theta(x, t) dx, \quad H_{2d} = k \int_0^1 \bar{q} dx + kb \int_0^1 \theta dx. \quad (1.12)$$

Các biểu thức (1.12) cho ta thấy H_{1d} và H_{2d} phát sinh là do đồng thời cả dao động xoắn và dao động uốn, vậy nếu ký hiệu:

$$\bar{H}_d^P = k \int_0^1 \bar{q}(x, t) dx, \quad \bar{H}_d^M = kb \int_0^1 \theta(x, t) dx \quad (1.13)$$

thì (1.12) được viết dưới dạng:

$$H_{1d} = \bar{H}_d^P - \bar{H}_d^M, \quad H_{2d} = \bar{H}_d^P + \bar{H}_d^M$$

và do đó

$$H_{1d} - H_{2d} = -2\bar{H}_d^M, \quad H_{1d} + H_{2d} = 2\bar{H}_d^P. \quad (1.14)$$

Thay hệ thức (1.14) vào (1.9) và (1.10) ta nhận được

$$S = -2y''\bar{H}_d^P - 2H_g\bar{q}'', \quad m_t = -2by''\bar{H}_d^M - 2b^2H_g\theta'' \quad (1.15)$$

Trên cơ sở của (1.1) và (1.15) cuối cùng ta nhận được phương trình dao động uốn và xoắn hỗn hợp như sau:

$$\begin{aligned} EJ\bar{q}^{IV} + m\bar{q} - 2y''\bar{H}_d^P - 2H_g\bar{q}'' &= P^*, \\ EJ_0\theta^{IV} - (GJ_a + 2b^2H_g)\theta'' - 2by''\bar{H}_d^M + m\bar{r}^2\ddot{\theta} &= M^*. \end{aligned} \quad (1.16)$$

§2. GIẢI BÀI TOÁN DAO ĐỘNG FLUTTER CÓ KÊ TỚI LỰC CẢN

Để tìm được công thức gần đúng của tốc độ gió tới hạn theo các tham số khác, ta có thể sử dụng lực nâng và mô men khí động dưới dạng sau đây [1, 4]

$$P^* = 2\gamma\rho b v(v\theta - \bar{q}), \quad M^* = \gamma\rho b^2 v(v\theta - \bar{q}) \quad (2.1)$$

Trong đó v là vận tốc gió; ρ - là mật độ không khí, $2b$ - chiều rộng của cầu; γ là hệ số tỷ lệ, phụ thuộc vào các tham số của cầu và của không khí.

Nếu đặt $q = \bar{q}/b$ thì phương trình (1.16) viết lại dưới dạng sau đây:

$$EJbq^{IV} + mb\ddot{q} - 2y''H_d^P - 2bH_gq'' = P, \quad (2.2)$$

$$EJ_0\theta^{IV} - (GJ_a + 2b^2H_g)\theta'' - 2by''H_d^M + m\bar{r}^2\ddot{\theta} = M,$$

với: $P = 2\gamma\rho b v(v\theta - bq), \quad M = \gamma\rho b^2 v(v\theta - bq)$

$$H_d^P = kb \int_0^1 q(x, t) dx, \quad H_d^M = \bar{H}_d^M$$

Các hàm $q(x, t)$, $\theta(x, t)$ trong (2.2) có thể biểu diễn bằng phương pháp Ritz

$$q = \sum q_{1j}\eta_{1j}; \quad \theta = \sum q_{2j}\eta_{2j} \quad \text{với } j = 1, 2, 3, \dots$$

còn q_{1j} , q_{2j} chỉ phụ thuộc thời gian; η_{1j} , η_{2j} là các giá trị của vectơ dao động chính độc lập uốn và xoắn. Nếu lấy $j = 1$ thì

$$q = q_1(t)\eta_1(x), \quad \theta = q_2(t)\eta_2(x) \quad (2.3)$$

Thay liên hệ (2.3) vào (2.2) ta nhận được

$$bEJq_1\eta_1^{IV} + mb\ddot{q}_1\eta_1 - \left(2by''k \int_0^1 \eta_1 dx \right) q_1 - 2H_g b q_1 \eta_1'' = P, \quad (2.4)$$

$$EJ_0q_2\eta_2^{IV} - (GJ_a + 2b^2H_g)q_2\eta_2'' - \left(2by''k \int_0^1 \eta_2 dx \right) q_2 + m\bar{r}^2\ddot{q}_2 = M.$$

Khi vé phải triệt tiêu thì hệ phương trình (2.4) trở thành hai phương trình thuần nhất độc lập với nhau, trong đó nghiệm có thể tìm dưới dạng:

$$q_1 = e^{i\omega t}, \quad q_2 = e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.5)$$

Thay các giá trị của q_1 và q_2 từ (2.5) vào hệ phương trình thuần nhất (2.4) được:

$$EJ\eta_1^{IV} - 2y''k \int_0^l \eta_1 dx - 2H_g\eta_1'' = m\omega_u^2\eta_1, \quad (2.6)$$

$$EJ\omega\eta_2^{IV} - (GJa + 2b^2H_g)\eta_2'' - 2by''k \int_0^l \eta_2 dx = mr^2\omega_x^2\eta_2.$$

Vậy từ (2.6) và (2.4) ta tìm được:

$$(\ddot{q}_1 + \omega_u^2 q_1)\eta_1 = \frac{P}{mb}, \quad (\ddot{q}_2 + \omega_x^2 q_2)\eta_2 = \frac{M}{mr^2} \quad (2.7)$$

Sau khi thay q_1, θ từ (2.3) vào biểu thức của P và M rồi đặt các hệ số mới:

$$s_1 = 2\gamma\varphi/m, \quad s_2 = \gamma\rho b^2/mr^2 \quad (2.8)$$

Ta nhận được các phương trình sau đây:

$$\eta_1(\ddot{q}_1 + \omega_u^2 q_1 + s_1 b v \dot{q}_1) - s_1 v^2 q_2 \eta_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$\eta_2(\ddot{q}_2 + \omega_x^2 q_2 - s_2 v^2 q_2) + s_2 b v q_1 \eta_1 = 0$$

Các nghiệm q_1, q_2 có thể tìm được dưới dạng:

$$q_1 = \xi_1 e^{\omega t}, \quad q_2 = \xi_2 e^{\omega t}$$

Thay vào các phương trình (2.9) ta có:

$$\eta_1(\omega^2 + s_1 b v \omega + \omega_u^2)\xi_1 - s_1 v^2 \xi_2 \eta_2 = 0, \quad (2.10)$$

$$\eta_2(\omega^2 + \omega_x^2 - s_2 v^2)\xi_2 + s_2 b v \omega \xi_1 \eta_1 = 0.$$

íc:

$$D(\omega^2 + s_1 b v \omega + \omega_u^2)\xi_1 - s_1 v^2 \xi_2 = 0,$$

$$(\omega^2 + \omega_x^2 - s_2 v^2)\xi_2 + s_2 b v \xi_1 D = 0.$$

Vì $D = \eta_1/\eta_2$ khác không nên giá trị này sẽ được đơn giản sau khi khai triển h thức.

Nếu kể tới lực cản trong dao động xoắn thì (2.10) trở thành:

$$D(\omega^2 + s_1 b v \omega + \omega_u^2)\xi_1 - s_1 v^2 \xi_2 = 0, \quad (2.11)$$

$$(\omega^2 + \omega_x^2 - s_2 v^2 + 2\varepsilon_2 \omega)\xi_2 + s_2 b v \omega \xi_1 D = 0.$$

Với ε_2 là hệ số cản.

Định thức của hệ phương trình trên sẽ là:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} D(\omega^2 + s_1 b v \omega + \omega_u^2) & -s_1 v^2 \\ s_2 b v \omega D & \omega^2 + 2\varepsilon_2 \omega + \omega_x^2 - s_2 v^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

Nếu đặt

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_u}, \quad x = \frac{v}{\omega_u}, \quad \lambda = \frac{\omega_x}{\omega_u}, \quad \varepsilon = \frac{2\varepsilon_2}{\omega_u}$$

định thức trên sẽ cho ta phương trình sau đây:

$$\Delta(\Omega) = A_0 \Omega^4 + A_1 \Omega^3 + A_2 \Omega^2 + A_3 \Omega + A_4 = 0 \quad (2.13)$$

Với $A_0 = 1, \quad A_1 = \varepsilon + s_1 b x, \quad A_2 = \lambda^2 + 1 - s_2 x^2 + \varepsilon s_1 b x, \quad A_3 = s_1 b x \lambda^2 + \varepsilon,$
 $= \lambda^2 - s_2 x^2.$

Vì số hạng $\varepsilon s_1 b x$ là vô cùng bé bậc cao nên ta có thể bỏ qua trong quá trình giải:

Để hệ thực hiện dao động ổn định tiệm cận (Lúc đó vận tốc gió nhỏ hơn vận tốc tới hạn v_0) thì Ω tìm được trong phương trình (2.13) phải có phần thực âm, nghĩa là phải thỏa mãn tiêu chuẩn ổn định Hurwitz sau đây:

$$\nabla_1 = A_1 > 0, \nabla_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} > 0, \nabla_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} > 0 \quad (2.14)$$

Ta nhận thấy dao động flutter xảy ra khi $\nabla_3 = 0$ và $\Omega = \pm ip$

Thay giá trị này của Ω vào phương trình (2.13) ta được hai phần thực và ảo

$$p^4 - A_2 p^2 + A_4 = 0, \quad -A_1 p^2 + A_3 = 0 \quad (2.15)$$

Từ (2.15) ta có:
$$p^2 = \frac{A_3}{A_1} = \frac{s_1 b \lambda^2 x + \varepsilon}{s_1 b x + \varepsilon} \quad (2.16)$$

Thay giá trị của p^2 từ (2.16) vào (2.15) ta sẽ được phương trình liên hệ giữa vận tốc tới hạn v_0 và các tham số như sau:

$$A_1 A_2 A_3 - A_4 A_1^2 - A_3^2 = 0 \quad (2.17)$$

hoặc

$$z^3 + \frac{\varepsilon}{s_1 b^2} z^2 - \frac{\varepsilon(\lambda^2 - 1)}{s_1 s_2 b^4} = 0 \quad (2.18)$$

trong đó $z = x/b$ là đại lượng không thứ nguyên (2.19)

Phương trình trên tồn tại với điều kiện $\lambda^2 - 1 \neq 0$ tức là nếu $\omega_x^2 = \omega_u^2$ thì không xảy ra dao động flutter.

Phương trình (2.17) cũng chính là kết quả khai triển định thức của các điều kiện (2.14).

Khi bỏ qua lực cản ($\varepsilon = 0$) thì phương trình (2.17) thỏa mãn với các hệ số như sau: $\bar{A}_0 = 1, \bar{A}_1 = s_1 b x, \bar{A}_2 = \lambda^2 + 1 - s_2 x^2, \bar{A}_3 = s_1 b x \lambda^2, \bar{A}_4 = \lambda^2 - s_2 x^2$. (2.20)

Thay các hệ số từ (2.20) vào hai phương trình (2.15) ta nhận được các liên hệ sau đây:

$$- \text{Với } \omega_u < \omega_x \text{ thì vận tốc gió tới hạn } v_0 = 0; v_0^2 = \omega_x^2 / s_2$$

Phương trình bậc ba (2.18) được giải bằng phương pháp Cardano. Trong khi giải nếu bỏ qua các số hạng có vô cùng bé bậc 2 của ε thì nghiệm thực được xác định như sau:

$$z = \left(\frac{\varepsilon(\lambda^2 - 1)}{s_1 s_2 b^4} - \frac{1}{27} \frac{\varepsilon^3}{b^6 s_1^3} \right)^{1/3} - \frac{10}{27} \frac{\varepsilon}{s_1 b^3} \quad (2.21)$$

Từ đó vận tốc gió tới hạn được tính:

$$v_0 = z b \omega_u \quad (2.22)$$

Vậy ta thấy đối với hệ mà $\omega_u = \omega_x$ thì không có khả năng xảy ra dao động Flutter; còn nếu $\omega_u \neq \omega_x$ thì điều kiện đủ để xảy ra dao động Flutter là biểu thức (2.22) phải được thỏa mãn.

§3. VÍ DỤ:

Xác định tốc độ gió tới hạn đối với cầu Tacoma cũ với các số liệu như sau (để tiện so sánh ta giữ nguyên hệ đơn vị Anh):

$$\rho = \frac{0,076}{g} \text{ slugs/ft}^3; \quad m = \frac{5700}{g} \text{ slugs/ft}; \quad b = 20 \text{ ft};$$

$$\frac{b}{r} = 1,3; \quad \omega_u = \frac{2\pi}{15}; \quad \lambda^2 = \frac{\omega_x^2}{\omega_0^2} = 1,75; \quad \gamma = 2; \quad \varepsilon = 0,0125$$

Từ công thức (2.8) ta tính s_1, s_2 . Thay s_1, s_2 và các giá trị khác đã cho vào (2.21) ta tính được $z = 2,73$ và do đó thay vào (2.22) ta xác định được $v_c = 44 \text{ ft/s}$ hoặc $13,2 \text{ m/s}$.

Theo cách tính của Steinmen [1] thì $v_c = 37,2 \text{ ft/s}$. Còn trong thực tế cầu Tacoma bị đổ khi vận tốc gió là 62 ft/s (hoặc $18,6 \text{ m/s}$). Qua kết quả tính toán, ta thấy công thức (2.21) và (2.22) có thể sử dụng thuận lợi với sai số cho phép.

§ 4. BẢNG KẾT QUẢ :

Trên cơ sở công thức (2.21) ta có thể tính giá trị z theo các tham số bằng cách viết công thức dưới dạng :

$$z = \left(\frac{\varepsilon \alpha_0}{\alpha_1^2 \alpha_2} \right)^{1/3} - \frac{10}{27} \frac{\varepsilon}{\alpha_1} \quad (4.1)$$

Trong đó : $\alpha_0 = \lambda^2 - 1$; $\alpha_1 = 4\rho b^2/m$; $\alpha_2 = b^2/2r^2$.

Dưới đây giới thiệu một số kết quả tính sẵn với các tham số thay đổi như sau :

$\varepsilon = 1/50$ đến $1/100$; $\alpha_0 = 0,1$ đến 2 ;

$\alpha_1 = 0,001$ đến $0,05$ và $\alpha_2 = 0,5$ đến 2 .

Ta có lưu ý rằng trong công trình [5] Bleich cũng đã lập bảng cho một tham số nhưng với giả thiết giá trị $2r^2/b^2$ là hằng số và chọn bằng $1,25$. Trong thực tế ta hãy giá trị $v = 2r^2/b^2$ của các cầu treo có thể đạt tới $3,0$ và biến đổi trong một miền rộng ; thí dụ đối với cầu Tacoma cũ thì $v = 1,17$. Vì thế đây là một trong các nguyên nhân chính dẫn đến sai số khá lớn trong các bảng của Bleich, như một số tác giả đã nhận xét [7].

Giá trị của z ứng với $\varepsilon = 18/0$

$\alpha_0 = 0,2$					$\alpha_0 = 0,5$			
$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	0,005	0,01	0,02	0,03	0,005	0,01	0,02	0,03
0,70	4,37	2,82	1,84	1,51	6,17	4,00	2,67	2,00
0,80	4,08	2,68	1,78	1,30	5,86	3,81	2,53	1,91
0,90	3,90	2,56	1,68	1,20	5,58	3,66	2,34	1,78
1,00	3,72	2,46	1,59	1,19	5,38	3,50	2,25	1,76
1,50	3,12	2,11	1,03	0,84	4,56	2,96	1,92	1,53

$\alpha_0 = 0,8$					$\alpha_0 = 1,0$			
$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	0,005	0,01	0,02	0,03	0,005	0,01	0,02	0,03
0,70	7,36	4,76	3,04	2,14	8,02	5,17	3,33	2,32
0,80	7,02	4,54	2,91	2,00	7,62	4,92	3,16	2,20
0,90	6,69	4,34	2,77	1,97	7,30	4,72	3,01	2,14
1,00	6,45	4,18	2,69	1,87	7,02	4,54	2,91	2,00
1,50	5,51	3,60	2,34	1,60	6,01	4,00	2,53	1,76

Địa chỉ
Trường Đại học Xây dựng

Nhận ngày 15/5/1985

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. STEINMAN D. B. Suspension Bridges, New York 1929.
2. JARZYNSKI F., NGUYEN VAN TINH. Drganie i statecznosc aerodynamiczna mostu wiszacego, PAN Seria Mechanika i Budownictwo T.3, Warszawa 1979.
3. NGUYỄN VĂN TÍNH. Ứng dụng phương pháp Galiôrkin trong bài toán dao động flutter của cầu treo. TTCCT hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ 3, Hà Nội 1983.
4. PUGSLY S.A. The theory of suspension bridges, London 1957.
5. BLEICH F. The mathematical theory of vibration in suspension bridges, Washington 1950.
6. TINH N.V. Macierzowe sformulowanie drganwlasnych ukladow ciegnowo-pretowych, AIL T. XXI z.4, 1975.
7. SELBERG A. Oscillation and Aerodynamic Stability of suspension Bridges, (APS, CEABC №13) 1961.

SUMMARY

DAMPING FLUTTER OSCILLATION OF SUSPENSION BRIDGES

The paper deals with flutter problem of suspension bridges in regard to damping.

The formulated expression makes possible to obtain the dependence of critical wind velocity and other structural parameters.

Numerical calculation is given of the Tacoma Narrows Bridge and for some values of parameters.

XÊMINA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

(Sáng thứ bảy tuần thứ ba hàng tháng tại Đại học Bách khoa Hà Nội)

Tháng 1-1986

Đào Huy Bích (ĐHTH). Chương trình hoạt động của Xêmina CHVRBD trong năm 1986
Phạm Chí Vinh (ĐHTH) - Truyền sóng trong lớp có biến dạng ban đầu không thuận nhất.

Tháng 2-1986

Nhữ Thị Phương Mai (ĐHBK). Dao động của cột có tiết diện thay đổi, mạng bê tông cốt thép và đặt trong nước.

Tháng 3-1986

Nguyễn Văn Phó (ĐHTH). Quan hệ giữa bài toán cân bằng giới hạn và bài toán thích ứng.

Tháng 4-1986

Hà Huy Cường (HVKTQS). Ứng dụng nguyên lý cực trị Gauss vào các bài toán cơ học vật rắn biến dạng.
Bùi Hữu Dân (Viện CH). Mặt dẻo theo mô hình dẻo đa tinh thể.

Tháng 5-1986

Nguyễn Tiến cường, Ngô gia bảo (VTKBTLCB) - Phần tử tham số cứng bậc trong phương pháp phần tử hữu hạn.
Nguyễn Hiền Lương (ĐHBK). Về bài toán ổn định đàn dẻo ba chiều

Tháng 6-1986

Nguyễn Văn Lệ (ĐHTL). Tính võ trụ tròn tựa một phần vào môi trường đàn hồi và chịu tải đối xứng trục.