Tạp chí Cơ học T.VIII, 1986, Số 3 (trang 6 — 12)

VỀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA VỎ MỎNG TRONG LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN – DẺO

ĐÀO HUY BÍCH — ĐÀO VĂN DŨNG

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong [1], đã thiết lập bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi, khi sử dụng tiêu chuẩn rẽ nhánh quá trình [2] và lý thuyết quá trình biến dạng đàn – dẻo [3]. Trong bài này xây dựng các hệ thức cơ bản của bài toán ổn định vỏ trụ mỏng, xét trường hợp vỏ trụ chịu tác dụng của lực nén dọc theo đường sinh.

Để thiết lập các phương trình và điều kiện của vỏ mỏng, chúng ta sử dụng giả thiết pháp tuyến thẳng của Kiếc Khốp và giả thiết bỏ qua thành phần ứng suất hướng theo pháp tuyến với mặt giữa. Khi đó trạng thái ứng suất là phẳng suy rộng. Nếu xét vật liệu là không nén được thì liên hệ ứng suất biến dạng có dạng [3].

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u k(s)(\dot{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{mm}\delta_{ij}) + (\Phi'(s) - \sigma_u k(s))\frac{\sigma_{mn}\dot{\varepsilon}_{mn}}{\sigma_u^2} \tag{1.1}$$

$$i,\ j,\ m,\ n = 1,\ 2.$$

và biểu diễn ngược lại

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sigma_u k(s)}(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}\delta_{ij}) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Phi'(s)} - \frac{1}{\sigma_u k(s)}\right)\frac{S_{mn}\dot{S}_{mn}}{\sigma_u^2}(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})\right] \tag{1.2}$$

$$i,\ j = 1,\ 2;\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3$$

trong đó $\Phi'(s)$, $k(s)$ là các hàm đặc trưng cho tính chất của vật liệu

$$\begin{aligned} &\Phi'(s) \geqslant 0 \text{ khi } s \geqslant s_o \\ &\Phi'(s) = E \text{ khi } s < s_o \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\sigma_u k(s) = \begin{cases} K + \dfrac{\sigma_s - K s_o}{s} & \text{khi } s \geqslant s_o \\ E & \text{khi } s < s_o \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó

$$s_o = s \big|_{\varepsilon_u = \varepsilon_s}$$

s là độ dài cung của quỹ đạo biến dạng, σ_u là cường độ ứng suất, s_{ij} là tenxơ lệch ứng suất.

§2. CÁC HỆ THỨC CƠ BẢN ĐỐI VỚI TRẠNG THÁI XUẤT PHÁT

Xét vỏ trụ bán kính R, chiều dày h và độ dài L đặt trong hệ tọa độ $(x,\ y = R\theta;\ z)$ với trục x trùng với đường sinh, trục z vuông góc với mặt giữa. Khi đó các thành phần biến dạng tại điểm bất kỳ

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{*} + Z\chi_{ij};\quad i,\ j = 1,2 \tag{2.1}$$

trong đó ε^*_{ij} là các thành phần biến dạng của mặt giữa của vỏ

$$\varepsilon^*_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^*_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{W}{R}; \quad \varepsilon^*_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.2}$$

còn χ_{ij} là các tham số độ cong của mặt giữa

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{1}{2R} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \tag{2.3}$$

ở đây u, v là các thành phần chuyển dịch theo hướng x, và y, còn W là độ võng của mặt giữa.

Các thành phần lực dãn và mômen của vỏ mỏng xác định qua ứng suất bằng các hệ thức quen biết :

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}\left(1 - \frac{Z}{R}\right)dZ \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}dZ; \quad N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}dZ;$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}\left(1 - \frac{Z}{R}\right)dZ \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}dZ; \quad N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yx}dZ;$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}\left(1 - \frac{Z}{R}\right)ZdZ \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}ZdZ; \quad M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}ZdZ;$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}\left(1 - \frac{Z}{R}\right)ZdZ \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}ZdZ; \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yx}ZdZ. \tag{2.4}$$

Phương trình cân bằng đối với phần tử của vỏ là

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} - \frac{1}{R}\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\right) + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{N_{yy}}{R} + q_z = 0, \tag{2.5}$$

với $H = M_{xy} = M_{yx}$.

Nếu xét sự ổn định trong phạm vi bé, khi đó theo [4] chúng ta có

$$\varepsilon^*_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^*_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon^*_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \tag{2.6}$$

các phương trình cân bằng có dạng

$$\frac{\partial N_{ij}}{\partial x_j} + q_i = 0; \quad i, j = 1, 2; \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{N_{yy}}{R} + q_z = 0 \tag{2.8}$$

Để xác định được hoàn toàn nghiệm của bài toán này cần phải thêm các điều kiện biên và các liên hệ vật lý của các lý thuyết dẻo (ví dụ lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ, lý thuyết chảy, ...). Sau này ta xem như bài toán này đã giải được, tức là tìm được các thành phần $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{\circ}{u}_i$ phụ thuộc vào các lực ngoài và đồng thời giả thiết cũng xác định được miền dẻo, miền đàn hồi. Trạng thái này gọi là trạng thái xuất phát (ký hiệu bởi chỉ số 0 bên trên). Trên cơ sở trạng thái này ta sẽ đi xét bài toán ổn định theo tiêu chuẩn rẽ nhánh đồng chủ động [2].

§3. PHƯƠNG TRÌNH RẼ NHÁNH ĐỒNG CHỦ ĐỘNG ĐỐI VỚI VỎ TRỤ

Để thiết lập các phương trình này, chúng ta không xét đến hiệu ứng cất tải. Xem rằng lớp trung bình là trung hòa theo nghĩa là ứng suất và biến dạng của chính sự uốn tại các điểm của lớp này bằng không. Nhưng sau khi vỏ đã bị uốn thì lại cần phải tính đến các gia số của ứng suất và biến dạng trong mặt này. Vì vậy khi xét bài toán ổn định của vỏ trụ thì trong phương trình (2.8) cần phải thay [4]:

$$q_z = \overset{\circ}{\sigma}_{xx}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overset{\circ}{\sigma}_{yy}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\overset{\circ}{\sigma}_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Sau đây ta sẽ viết phương trình rẽ nhánh đồng chủ động của vỏ trụ. Ký hiệu hiệu của các gia số ứng với tiếp tục chính và tiếp tục phụ.

$$\Delta N_{ij} = dN_{ij} - d\overset{\circ}{N}_{ij},\ \Delta M_{ij} = dM_{ij} - d\overset{\circ}{M}_{ij},\ \Delta W = dW - dW_\circ;\ i, j = 1, 2 \qquad (3.1)$$

Lấy biến phân (2.7), (2.8) và chú ý đến (3.1), ta nhận được phương trình cân bằng dưới dạng hiệu gia số (với $W_\circ = 0$)

$$\Delta N_{ij,j} = 0; \qquad (3.2)$$

$$\Delta M_{ij,ij} + \overset{\circ}{N}_{ij}\Delta W_{,ij} + \frac{1}{R}\Delta N_{yy} = 0;\ i, j = 1, 2 \qquad (3.3)$$

Các liên hệ (2.1), (2.4), (2.6) dưới dạng hiệu gia số là

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon^*_{ij} - Z\Delta W_{,ij}; \qquad (3.4)$$

$$\Delta\sigma_{ij} = (\Phi'_\circ - \overset{\circ}{\sigma}_u k_\circ)\frac{\overset{\circ}{\sigma}_{km}\Delta\varepsilon_{km}}{\overset{\circ}{\sigma}{}_u^2} + \frac{2}{3}\overset{\circ}{\sigma}_u k_\circ(\Delta\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \qquad (3.5)$$

$$i, j, k, m = 1, 2;$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\overset{\circ}{\sigma}_u k_\circ}(\Delta\sigma_{ij} - \Delta\sigma\delta_{ij}) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Phi'_\circ} - \frac{1}{\sigma_u k_\circ}\right)\frac{\overset{\circ}{S}_{mn}\Delta S_{mn}}{\overset{\circ}{\sigma}{}_u^2}(\overset{\circ}{\sigma}_{ij} - \overset{\circ}{\sigma}\delta_{ij})\right],$$

$$i, j = 1, 2;\ m, n = 1, 2, 3. \qquad (3.6)$$

$$\Delta N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2}\Delta\sigma_{ij}dz;\ \Delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2}\Delta\sigma_{ij}z\,dz \qquad (3.7)$$

Hệ đầy đủ các phương trình trên cùng với các điều kiện biên sẽ cho ta giải hoàn toàn bài toán rẽ nhánh đồng chủ động của vỏ trụ.

Nếu trạng thái ban đầu không phụ thuộc vào z thì

$$\Delta N_{ij} = h\left[(\Phi'_\circ - \overset{\circ}{\sigma}_u k_\circ)\frac{\overset{\circ}{\sigma}_{km}\Delta\varepsilon^*_{km}}{\overset{\circ}{\sigma}{}_u^2}\overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \frac{2}{3}\overset{\circ}{\sigma}_u k_\circ(\Delta\varepsilon^*_{ij} + \Delta\varepsilon^*_{kk}\delta_{ij})\right],$$

$$\Delta M_{ij} = -\frac{h^3}{12}\left[(\Phi'_\circ - \overset{\circ}{\sigma}_u k_\circ)\frac{\overset{\circ}{\sigma}_{km}\Delta W_{,km}}{\overset{\circ}{\sigma}{}_u^2}\overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \frac{2}{3}\overset{\circ}{\sigma}_u k_\circ(\Delta W_{,ij} + \Delta W_{,kk}\delta_{ij})\right] \qquad (3.8)$$

$$i, j, k, m = 1, 2.$$

Khi đó hệ phương trình cân bằng (3.2), (3.3) là các phương trình đạo hàm riêng có hệ số là hàm của x, y. Sau đây ta đưa ra một cách tường minh hệ phương trình này cho trường hợp trạng thái ban đầu không phụ thuộc vào x, y.

Trước hết đặt

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\ \Delta\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ \Delta\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{3.9}$$

khi đó (3.2) sẽ thỏa mãn đồng nhất. Còn hàm φ được xác định từ phương trình tương thích biến dạng sau

$$\frac{\partial^2\Delta\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Delta\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\Delta\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x^2} \tag{3.10}$$

Mặt khác từ (3.6) và (3.9) thì

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{\sigma_u^\circ k_o}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) + \frac{9}{4}A\pi(S,\Delta S)\frac{\sigma_{xx}^\circ - \sigma^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}},\\
\Delta\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{\sigma_u^\circ k_o}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{9}{4}A\pi(S,\Delta S)\frac{\sigma_{yy}^\circ - \sigma^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}},\\
\Delta\varepsilon_{xy} &= -\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma_u^\circ k_o}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{9}{4}A\pi(S,\Delta S)\frac{\sigma_{xy}^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

trong đó $A = \dfrac{1}{\Phi_o'} - \dfrac{1}{\sigma_u k_o}$; $\pi(S,\Delta S) = S_{mn}^\circ \Delta S_{mn}$; m, n = 1, 2, 3.

Thay (3.11) vào (3.10) nhận được phương trình xác định hàm φ như sau

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_u^\circ k_o}\nabla^4\varphi + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\Phi_o'} - \frac{1}{\sigma_u^\circ k_o}\right)\frac{2\sigma_{xx}^\circ - \sigma_{yy}^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}}\frac{\partial^2\pi(S,\Delta S)}{\partial y^2}\\
&\quad + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\Phi_o'} - \frac{1}{\sigma_u^\circ k_o}\right)\frac{2\sigma_{yy}^\circ - \sigma_{xx}^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}}\frac{\partial^2\pi(S,\Delta S)}{\partial x^2}\\
&\quad - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{\Phi_o'} - \frac{1}{\sigma_u^\circ k_o}\right)\frac{\sigma_{xy}^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}}\frac{\partial^2\pi(S,\Delta S)}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sau khi thay (3.8) vào phương trình (3.3) đưa về dạng sau đây

$$\begin{aligned}
&\left[\delta_{ik}\delta_{jm} - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\Phi_o'}{\sigma_u^\circ k^\circ}\right)\frac{\sigma_{km}^\circ\sigma_{ij}^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}}\right]\Delta W_{,ijkm} - \frac{9}{h^2\sigma_u^\circ k_o}\left(\sigma_{ij}^\circ\Delta W_{,ij} + \right.\\
&\quad\left. + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = 0;\ i, j, k, m = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nhận xét rằng nếu vật thể là đàn hồi tức là $\Phi_o' = E$, $\sigma_u^\circ k_o = E$ thì (3.12) và (3.13) rở về các phương trình ổn định đàn hồi (trang 466 [4]).

Nếu quá trình đặt tải là đơn giản và $\Phi_o' = \Phi_o'(\varepsilon_u^\circ)$, $\sigma_u^\circ k_o = \sigma_u^\circ/\varepsilon_u^\circ = Es$ thì (3.12) và (3.13) trở về các phương trình ổn định theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ [5].

Như vậy bài toán tìm điểm rẽ nhánh chính là bài toán tìm nghiệm khác không của (3.12), (3.13). Phương pháp chung để giải là ta sẽ chọn nghiệm, sao cho ΔW và φ thỏa mãn điều kiện biên động học, sau đó thay vào các phương trình trên và từ điều kiện không tầm thường của nghiệm suy ra phương trình xác định lực. Giá trị nhỏ nhất của nó chính là lực tới hạn cần tìm. Sau đây để minh họa ta xét bài toán trụ chịu nén dọc đường sinh.

§ 4. VỎ TRỤ CHỊU NÉN DỌC ĐƯỜNG SINH

Xét vỏ trụ bị nén dọc đường sinh bởi lực p, trục x hướng dọc đường sinh, trục z vuông góc với mặt trung bình, trục y theo chu tuyến vòng. Giả sử trụ tựa bản lề ở hai đầu $x = 0$ và $x = L$. Khi đó $\sigma^{\circ}_{xx} = -p$, $\sigma^{\circ}_{yy} = \sigma^{\circ}_{xy} = 0$, $\sigma^{\circ}_{u} = |\sigma^{\circ}_{xx}|$.

Phương trình (3.13) có dạng

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi'_{o}}{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}\right)\frac{\partial^4 \Delta W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Delta W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Delta W}{\partial y^4} + \frac{9p}{h^2 \sigma^{\circ}_{u} k_{o}}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{9}{Rh^2 \sigma^{\circ}_{u} k_{o}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \qquad (4.1)$$

Để viết phương trình (3.12) ta tính

$$\pi(S, \Delta S) = S^{\circ}_{mn}\Delta S_{mn} = \overset{o}{\sigma}_{mn} - \sigma^{o}\delta_{mn})(\Delta\sigma_{mn} - \Delta\sigma\delta_{mn})$$

$$= \sigma^{\circ}_{xx}\left(\frac{2}{3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)$$

Thay biểu thức này vào (3.12) và sau một vài phép tính toán ta nhận được

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\right)\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left(3 - \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\right)\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} =$$

$$- \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{R}\frac{\partial^2 \Delta W}{\sigma x^2} \qquad (4.2)$$

Do điều kiện biên là tựa bản lề nên ta tìm nghiệm (4.1) dưới dạng $\Delta W = C\sin\frac{m\pi x}{L}$ $\cos\frac{n\pi y}{R}$ và thay vào (4.2) nhận được phương trình xác định φ

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\right)\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left(3 - \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\right)\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} =$$

$$= \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{R} C \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{R}$$

Nghiệm riêng của phương trình này là

$$\varphi = A\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{R} \qquad (4.3)$$

trong đó

$$A = \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o} C}{R}\frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(3 - \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\right)\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\left(\frac{Ln^2}{m\pi R^2}\right)^2} \qquad (4.4)$$

Thay ΔW và (4.3), (4.4) vào (4.1) và từ điều kiện nghiệm $\Delta W \neq 0$ (tức là $C \neq 0$) ta nhận được

$$P = \sigma^{\circ}_{u} k_{o}\left\{\frac{h^2}{9}\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi'_{o}}{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{Ln^2}{m\pi R^2}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\right)\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 + \left(3 - \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\right)n^2 + \frac{\sigma^{\circ}_{u} k_{o}}{\Phi'_{o}}\left(\frac{Ln^2}{m\pi R}\right)^2}\right\} \qquad (4.5)$$

Bây giờ ta tìm giá trị nhỏ nhất của $\hat{P}$

Trước hết đưa vào các biến không thứ nguyên

$$\hat{P} = \frac{PR}{Eh}, \psi = \frac{n^2h}{R}, \theta = \frac{m\pi R}{nL}, \lambda = \frac{\Phi_o'}{\sigma_u^o k_o}. \tag{4.6}$$

Khi đó (4.5) có dạng sau

$$\hat{P} = \frac{\sigma_u^o k_o}{E}\left[\frac{\psi}{9}\left(\frac{1+3\lambda}{4}\theta^2 + 2 + \frac{1}{\theta^2}\right) + \frac{\lambda}{\psi\left(\frac{1+3\lambda}{4}\theta^2 + 3\lambda - 1 + \frac{1}{\theta^2}\right)}\right] \tag{4.7}$$

Như vậy $\hat{P} = \hat{P}(\psi, \theta^2)$, để tìm điểm cực trị ta tính

$$\frac{\partial\hat{P}}{\partial\psi} = \frac{\sigma_u^o k_o}{E}\left[\frac{1}{9}\left(\frac{1+3\lambda}{4}\theta^2 + 2 + \frac{1}{\theta^2}\right) - \frac{\lambda}{\psi^2\left(\frac{1+3\lambda}{4}\theta^2 + 3\lambda - 1 + \frac{1}{\theta^2}\right)}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial\hat{P}}{\partial\theta^2} = \frac{\sigma_u^o k_o}{E}\left[\frac{\psi}{9}\left(\frac{1+3\lambda}{4} - \frac{1}{\theta^4}\right) - \frac{\lambda\left(\frac{1+3\lambda}{4} - \frac{1}{\theta^4}\right)}{\psi\left(\frac{1+3\lambda}{4}\theta^2 + 3\lambda - 1 + \frac{1}{\theta^2}\right)^2}\right] = 0$$

Từ đây nhận được

$$\theta_*^2 = \frac{2}{\sqrt{1+3\lambda}}\ ;\ \psi_* = \frac{3\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(\sqrt{1+3\lambda}+2)(\sqrt{1+3\lambda}+3\lambda-1)}} \tag{4.8}$$

Bằng cách tính tương tự có thể kiểm tra đối với các đạo hàm bậc 2. Như vậy tại điểm $M(\psi_*, \theta_*^2)$ lực $\hat{P}$ đạt giá trị cực tiểu bằng

$$\hat{P}_{th} = \hat{P}(\psi_*, \theta_*^2) = \frac{2}{3}\frac{\sigma_u^o k_o}{E}\sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{\sqrt{1+3\lambda}+2}{\sqrt{1+3\lambda}+3\lambda-1}} \tag{4.9}$$

thay vào (4.6) ta nhận được

$$P_{th} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_u^o k_o h}{R}\sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{\sqrt{1+3\lambda}+2}{\sqrt{1+3\lambda}+3\lambda-1}} \tag{4.10}$$

Đây chính là công thức xác định lực tới hạn trong trường hợp dạng mất ổn định là không đối xứng.

Nhận xét:

a) Nếu vật thể là đàn hồi ta có $\Phi_o' = \sigma_u^o k_o = E$, $\lambda = 1$, (4.10) đưa về dạng $P_{th} = \frac{2}{3}E\frac{h}{R}$.

Công thức này trùng với lực tới hạn đàn hồi [4]

b) Nếu đặt tải là đơn giản ta có $\sigma_u^o k_o = \sigma_u^o/\varepsilon_u^o = E_s$, $\Phi_o' = \Phi_o'(\varepsilon_u^o)$ thì

$$P_{th} = \frac{2}{3}E_s\frac{h}{R}\sqrt{\frac{\Phi_o'}{E_s}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{3\Phi_o'}{E_s}}+2}{3\frac{\Phi_o'}{E_s} - 1 + \sqrt{1+\frac{3\Phi_o'}{E_s}}}}$$

trùng với lực tới hạn trong lý thuyết biến dạng đàn–dẻo nhỏ [5]

c) Nếu vật thể dẻo lý tưởng tức là $\Phi'_o = 0$ hay $\lambda = 0$ thì từ (4.10) nhận được

$$p_{th} = \frac{\sigma_u^o k_o h}{R}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}$$

d) Nếu dạng mất ổn định là đối xứng tức là $n=0$ thì từ (4.5) suy ra

$$p = \sigma_u^o k_o\left[\frac{h^2}{9}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi'_o}{\sigma_u^o k_o}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{\sigma_u^o k_o}{\Phi'_o}\right)\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2}\right]$$

Giá trị cực tiểu p theo $m\pi/L$ là

$$p_{th} = \frac{2}{3}\sqrt{\sigma_u^o k_o \Phi'_o}\,\frac{h}{R}$$

KẾT LUẬN

Các phương trình cơ bản nhận được cho phép giải bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của vỏ trụ khi chịu tải phức tạp bất kỳ. Một số trường hợp cho biểu thức giải tích của lực tới hạn, các trường hợp riêng cho kết quả trùng với các lý thuyết đã biết.

Địa chỉ
Trường Đại học TH – HN

Nhận ngày 5/5/1985

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ĐÀO HUY BÍCH. Bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí Cơ Học, số 2, 1986.
2. КЛЮШНИКОВ В. Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М., 1980.
3. ДАО ЗУЙ БИК. Модификация соотношений упруго-пластических процессов средней кривизны. Вестник МГУ №5, 1981.
4. ВОЛЬМИР А. С. Устойчивость упругих систем. М. 1963.
5. ГАНИЕВ Н. С. Определение критической нагрузки цилиндрической оболочки за пределом упругости при осевом сжатии и внешнем нормальном давлении. Изв. Казан. Ф-ла АН СССР, 7, 1955.

RÉSUMÉ

SUR LA STABILITÉ DE LA COQUE MINCE SUIVANT LA THÉORIE DES PROCESSUS ELASTO – PLASTIQUES

Dans cet article on a étudié le problème de la stabilité de la coque mince suivant la théorie des processus elasto-plastiques de déformation, ainsi on a construit des équation fondamentales, considère le problème de la mince coque cylindrique sous l'effet de la compression axiale et trouvé la pression critique. Dans les cas particuliers, ces résultats ont coincidé avec ceux des théories différentes.