Tạp chí Cơ học T. VIII, 1986 số 2 (trang 1 – 6)

BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI CỦA BẢN VÀ VỎ MỎNG THEO LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN DẺO

ĐÀO HUY BÍCH

Bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của bản và vỏ mỏng đã được nhiều người quan tâm, đã sử dụng các dạng khác nhau của lý thuyết dẻo và các tiêu chuẩn xét ổn định khác nhau [1, 2, 3, 4, 5], do đó đã dẫn đến các kết quả khác nhau, đánh giá độ chính xác của chúng phải dựa vào kết quả thực nghiệm. Một hướng nghiên cứu có triển vọng về ổn định là sử dụng tiêu chuẩn rẽ nhánh quá trình biến dạng [3, 6, 7, 8, 9]. Do vậy việc sử dụng lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo trong bài toán này có nhiều khả năng mang lại kết quả phù hợp với thực tế. Bài này nhằm diễn đạt ý tưởng đó.

§ 1. ÁP DỤNG LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN DẺO TRONG BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA BẢN VÀ VỎ MỎNG

Như đã biết, bài toán đối với bản và vỏ mỏng có thể đưa về bài toán phẳng suy rộng, do vậy cần thiết biểu diễn quan hệ giữa ứng suất và biến dạng cho trường hợp này.

Nếu quá trình biến dạng đàn dẻo tương đối trơn, ta có [10].

$$ds_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u k(s) de_{ij} + [\Phi'(s) - \sigma_u k(s)] \frac{s_{km} de_{km}}{\sigma_u^2} s_{ij} \tag{1.1}$$

trong đó $\Phi'(s)$ và $k(s)$ là hai hàm vật liệu đặc trưng cho tính chất vô hướng và vectơ của vật liệu

$$\sigma_u k(s) = \begin{cases} K + \dfrac{\sigma_s - K s_o}{s} & s \geqslant s_o, \\ 3G & s \leqslant s_o, \end{cases}$$

$$\Phi'(s) \geqslant 0 \qquad s \geqslant s_o,$$

$$\Phi'(s) = 3G \qquad s \leqslant s_o,$$

với

$$s_o = s|_{\varepsilon_u = \varepsilon_s}$$

Với $s \leqslant s_o$ hệ thức (1.1) đưa về định luật Húc. Khi s tăng $\sigma_u k(s)$ giảm, nó phản ánh được tính bất đẳng hướng biến dạng trong quá trình biến dạng dẻo.

Để sử dụng vào các bài toán phẳng suy rộng, ta viết lại các hệ thức (1.1) qua bản thân tenxơ σ_{ij} và ε_{ij} (với i, j = 1, 2). Xét trường hợp vật liệu không nén được $\nu = 1/2$, E = 3G khi đó ta có

$$de_{ij} = d\varepsilon_{ij},\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij},\ \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad i, j = 1, 2$$

dẫn đến $$s_{11} = \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22}),\ S_{22} = \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{11}),\ S_{12} = \sigma_{12},$$

$$s_{km}de_{km} = \sigma_{km}d\varepsilon_{km}$$

trong trường hợp phẳng hệ thức (1.1) có dạng sau

$$d\sigma_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u k(s)(d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}d\varepsilon_{kk}) + [\Phi'(s) - \sigma_u k(s)]\frac{\sigma_{km}d\varepsilon_{km}}{\sigma_u^2}\sigma_{ij}, \quad (1.2)$$

$$i, j, k, m = 1,2.$$

Ta sẽ sử dụng (1.2) vào bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của bản vỏ mỏng.

Giả sử bản, vỏ mỏng biến dạng dưới tác dụng của lực khối K_i, lực mặt F_i ở một phần biên và chuyển dịch U_i ở một phần biên. Các đại lượng này thay đổi theo một tham số nào đấy, tại mỗi phần tử vật thể thực hiện một quá trình biến dạng, điều đó có nghĩa là nếu tải ngoài nhận một gia số nào đó, thì các đại lượng đặc trưng trạng thái bên trong vật thể cũng thay đổi một gia số xác định nào đấy. Nếu bỏ qua sự thay đổi hình học của vật thể khi viết các điều kiện cân bằng, thì bài toán biên đối với gia số này sẽ cho nghiệm duy nhất, tức là quá trình biến dạng được xác định một cách đơn trị.

Vấn đề mất ổn định của cấu trúc thể hiện ở chỗ, với tải ngoài đạt giá trị đặc biệt nào đấy K_i^0, F_i^0, U_i^0; ứng với nó vật thể có trạng thái biến dạng ε_{ij}^0 và ứng suất σ_{ij}^0, thì khi chuyển qua trạng thái này có sự chuyển biến về chất: trước và cho đến tận trạng thái này quá trình vẫn đơn trị, nhưng sau trạng thái đó có thể có nhiều hướng tiếp tục quá trình, tức là bài toán biên đối với gia số phải tính đến sự thay đổi hình học của vật do biến dạng cho nghiệm không duy nhất. Điểm ε_{ij}^0 gọi là điểm rẽ nhánh đối với quá trình biến dạng, trạng thái ε_{ij}^0, σ_{ij}^0 gọi là trạng thái xuất phát.

Hướng tiếp tục chính của quá trình $d\varepsilon_{ij}^0$ hướng theo tiếp tuyến quỹ đạo, các tiếp tục phụ $d\varepsilon_{ij}$ có hướng khác nhau. Gọi dK_i, dF_i, dU_i là các gia số tải ngoài tính từ các giá trị K_i^0, F_i^0, U_i^0 và giả thiết hướng tác dụng của tải ngoài không thay đổi khi vật biến dạng. Khi đó bài toán biên đối với gia số tính đến sự thay đổi hình học có thể viết tượng trưng như sau:

— Phương trình cân bằng

$$L_k[d\sigma_{ij}, d\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^0, dK_i] = 0$$

— Phương trình tương thích

$$M_k[d\varepsilon_{ij}, du_i] = 0$$

— điều kiện biên

$$N_k[d\sigma_{ij}, d\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^0, dU_i, dF_i] = 0$$

— phương trình xác định: sử dụng hệ thức (1.2)

$$P_k[d\sigma_{ij}, d\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^0, \Phi'^0, \sigma_u^0 k^0] = 0$$

trong đó L_k, M_k, N_k, P_k là những toán tử vi phân. Đại lượng σ_{ij}^0 và miền đàn hồi, miền dẻo ở trạng thái xuất phát xem như đã biết.

Trạng thái K_i^0, F_i^0, U_i^0 tương ứng với điểm rẽ nhánh, nếu nghiệm của hệ phương trình trên không duy nhất đối với gia số vô cùng nhỏ, du_i, $d\varepsilon_{ij}$, $d\sigma_{ij}$. Điều này có nghĩa là thời điểm rẽ nhánh trùng với thời điểm xuất hiện nghiệm khác không của hiệu gia số:

$$\Delta\sigma_{ij} = d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij}^0,\quad \Delta\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^0,\quad \Delta u_i = du_i - du_i^0.$$

Các đại lượng này thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{aligned} L_k[\Delta\sigma_{ij}, \Delta\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^0, 0] &= 0, \\ M_k[\Delta\sigma_{ij}, \Delta u_i] &= 0, \\ N_k[\Delta\sigma_{ij}, \Delta\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^0, 0, 0] &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Liên hệ $\Delta\sigma_{ij} \sim \Delta\varepsilon_{ij}$ nói chung không có dạng như (1.2), nhưng với rẽ nhánh đồng chủ động, tức là tại mỗi điểm của vật tính chủ động của tiếp tục phụ hoàn toàn giống như tính chủ động của tiếp tục chính, liên hệ $\Delta\sigma_{ij} \sim \Delta\varepsilon_{ij}$ sẽ giống như (1.2) tức là

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u^o k^o(\Delta\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk}) + (\Phi'^o - \sigma_u^o k^o)\frac{\sigma_{km}^o \Delta\varepsilon_{km}}{\sigma_u^{o2}}\sigma_{ij}^o \qquad (1.4)$$

Hệ (1.3), (1.4) lập thành hệ phương trình cơ bản của bài toán ổn định.

Do vậy, ta có tiêu chuẩn rẽ nhánh đồng chủ động như sau [8, 9]: điểm rẽ nhánh đồng chủ động xác định thời điểm đầu tiên trong lịch sử đặt tải, tại đó quá trình biến dạng đàn dẻo chính trở thành mất ổn định theo nghĩa nhiễu nhỏ không đáng kể của quá trình (xem như một chuyển động chậm) dẫn đến sự lệch hữu hạn tại mọi thời điểm hữu hạn tiếp sau.

Khi xét bài toán ổn định của bản, vỏ mỏng ta viết các phương trình (1.3) qua các đại lượng nội lực (lực dãn và mômen), biến dạng và độ cong của mặt giữa. Trước hết, xét bài toán ổn định của bản.

§2. ỔN ĐỊNH BIẾN DẠNG CỦA BẢN MỎNG

Xét bản có độ dày h trong hệ tọa độ x, y, z; ta vẫn giữ nguyên các giả thiết động học và tĩnh học như trong lý thuyết uốn bản. Ta có

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* - zW_{,ij},$$

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}dz, \qquad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}zdz, \qquad (2.1)$$

trong đó ε_{ij}^* là tenxơ biến dạng của mặt giữa, W — độ võng, N_{ij}, M_{ij} — lực trong và mômen trong tác dụng lên phần tử bản. Chúng thỏa mãn hệ phương trình cân bằng có tính đến sự thay đổi hình học của bản:

$$N_{ij,j} + q_i = 0,$$

$$M_{ij,ij} + N_{ij}W_{,ij} + q_z = 0. \qquad (2.2)$$

Với giả thiết $(W_{,i})^2 \ll 1$, điều kiện biên viết theo chu tuyến chưa biến dạng. Hệ (2.2) kết hợp với (1.2) cho ta hệ kín để tìm nghiệm ở trạng thái xuất phát, tức là xác định được ε_{ij}^o, σ_{ij}^o phụ thuộc vào tải ngoài và miền đàn hồi, miền dẻo.

Để thiết lập hệ phương trình cơ bản (1.3), (1.4) của bài toán ổn định bản mỏng, ta lấy biến phân phương trình (2.2) ứng với tiếp tục chính «o» và tiếp tục phụ, rồi lấy hiệu các phương trình nhận được, ta đi đến hệ phương trình cân bằng đối với hiệu gia số

$$\Delta N_{ij,j} = 0,$$

$$\Delta M_{ij,ij} + N_{ij}^o\Delta W_{,ij} + W_{,ij}^o\Delta N_{ij} = 0, \qquad (2.3)$$

trong đó

$$\Delta N_{ij} = dN_{ij} - dN_{ij}^o, \quad \Delta M_{ij} = dM_{ij} - dM_{ij}^o, \quad \Delta W = dW - dW^o$$

Theo (2.1) ta có

$$\Delta N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2}\Delta\sigma_{ij}dz, \qquad \Delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2}\Delta\sigma_{ij}zdz,$$

$$\Delta\sigma_{ij} = d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij}^o, \qquad \Delta\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^o,$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^* - z\Delta W_{,ij}$$

còn Δe_{ij} liên hệ với $\Delta \varepsilon_{ij}$ theo (1.4). Các đại lượng N^{o}_{ij}, σ^{o}_{ij}, σ^{o}_{u}, S^{o}, W^{o} ứng với trạng thái xuất phát. Hệ phương trình (2.3) cùng với (1.4) và các điều kiện biên tương ứng cho ta giải bài toán rẽ nhánh đồng chủ động của bản đàn hồi dẻo.

Bài toán sẽ đơn giản hóa, nếu trạng thái xuất phát không thay đổi theo độ dày tức là trạng thái trước tới hạn là phẳng. Các đại lượng σ^{o}_{ij}, W^{o}, S^{o} không phụ thuộc z do đó

$$\Delta N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_{ij} dz = \frac{2}{3}\sigma^{o}_{u}k(s^{o}) \int_{-h/2}^{h/2} (\Delta\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk})dz +$$

$$+ [\Phi'(s^{o}) - \sigma^{o}_{u}k(s^{o})] \frac{\sigma^{o}_{ij}\sigma^{o}_{km}}{\sigma^{o\,2}_{u}} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\varepsilon_{km} dz =$$

$$= \left\{\frac{2}{3}\sigma^{o}_{u}k(s^{o})h(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{ij}\delta_{km}) + h[\Phi'(s^{o}) - \sigma^{o}_{u}k(s^{o})] \frac{\sigma^{o}_{ij}\sigma^{o}_{km}}{\sigma^{o\,2}_{u}}\right\} \Delta\varepsilon^{*}_{km} \qquad (2.4)$$

Tương tự

$$\Delta M_{ij} = \left\{\frac{\sigma^{o}_{u}k(s^{o})h^{3}}{18}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{ij}\delta_{km}) + \frac{h^{3}}{12}[\Phi'(s^{o} - \sigma^{o}_{u}k(s^{o})] \frac{\sigma^{o}_{ij}\sigma^{o}_{km}}{\sigma^{o\,2}_{u}}\right\} \Delta W_{,km} \qquad (2.5)$$

Với $W^{o} = 0$, phương trình thứ hai (2.3) sau khi thay (2.5) vào, dẫn đến

$$\left[\sigma^{o}_{u}k^{o}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{ij}\delta_{km}) + \frac{3}{2}(\Phi'^{o} - \sigma^{o}_{u}k^{o}) \frac{\sigma^{o}_{ij}\sigma^{o}_{km}}{\sigma^{o\,2}_{u}}\right] \Delta W_{,ijkm} +$$

$$+\left\{\left[\sigma^{o}_{u}k^{o}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{ij}\delta_{km}) + \frac{3}{2}(\Phi'^{o} - \sigma^{o}_{u}k^{o}) \frac{\sigma^{o}_{ij}\sigma^{o}_{km}}{\sigma^{o\,2}_{u}}\right]_{,ij} + \frac{18}{h^{3}} N^{o}_{km}\right\} \Delta W_{,km} = 0. \qquad (2.6)$$

Nếu trạng thái xuất phát hoàn toàn thuần nhất, tức là σ^{o}_{ij}, s^{o} không phụ thuộc (x, y) ; $N^{o}_{ij} = h\sigma^{o}_{ij}$ thì khi thay (2.4) vào phương trình thứ nhất của (2.3) ta đi đến phương trình đối với Δu_i cho nghiệm bằng không, còn phương trình (2.6) cho ta

$$\left[\sigma^{o}_{u}k^{o}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{ij}\delta_{km}) + \frac{3}{2}(\Phi'^{o} - \sigma^{o}_{u}k^{o}) \frac{\sigma^{o}_{ij}\sigma^{o}_{km}}{\sigma^{o\,2}_{u}}\right] \Delta W_{,ijkm} +$$

$$+ \frac{18}{h^{3}} N^{o}_{ij}\Delta W_{,ij} = 0$$

hay là

$$\left[\delta_{ik}\delta_{jm} - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\Phi'^{o}}{\sigma^{o}_{u}k^{o}}\right) \frac{\sigma^{o}_{ij}\sigma^{o}_{km}}{\sigma^{o\,2}_{u}}\right] \Delta W_{,ijkm} + \frac{9\sigma^{o}_{ij}}{h^{2}\sigma^{o}_{u}k^{o}} \Delta W_{,ij} = 0. \qquad (2.7)$$

Đây là phương trình cơ bản để xét bài toán ổn định của bản đàn dẻo.

Phương trình (2.7) với các dạng riêng khác nhau tùy thuộc vào việc sử dụng các lý thuyết dẻo khác nhau đã được các tác giả trước đây nhận được. nếu $\sigma^{o}_{u}k^{o} = E^{o}_{s}$ (môđun cát tuyến) ứng với lý thuyết biến dạng đã được Iliusin [3], Stowell [11] nghiên cứu ; nếu $\sigma^{o}_{u}k^{o} = E$ (môđun đàn hồi) ứng với lý thuyết chảy tái bền đẳng hướng đã được Prager, Handelman [12], Pearson [13], Hopkins [14] nghiên cứu.

Volmir [1], Hutchinson [15], Bushnell [16] cho rằng giải bài toán rẽ nhánh theo lý thuyết biến dạng cho nghiệm tốt hơn lý thuyết chảy tái bền đẳng hướng và ngược lại tính trạng thái xuất phát lý thuyết chảy tái bền cho kết quả tốt hơn.

So sánh biểu thức của $\sigma_u k(s)$ với E, Es ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{\sigma_u}{s} \equiv E_s < \sigma_u k(s) < E \qquad (2.8)$$

phương trình (2.7) cho ta kết quả dung hòa hai lý thuyết trên. Do vậy, có thể dùng lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo để tính cả trạng thái xuất phát và rẽ nhánh quá trình.

Để minh họa ta xét bài toán quen biết bản vuông gắn bản lề bị nén theo hướng x bởi lực phân bố đều p. Khi đó

$$N^o_{xx} = -ph, \; N^o_{yy} = N^o_{xy} = 0, \qquad (p > 0)$$

suy ra

$$\sigma^o_{xx} = -p, \; \sigma^o_{yy} = \sigma^o_{xy} = 0, \;\; \sigma^o_u = |\sigma^o_{xx}|$$

Phương trình cơ bản (2.7) của bài toán này có dạng

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi'^0}{\sigma^o_u k^0}\right)\frac{\partial^4 \Delta W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Delta W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Delta W}{\partial y^4} + \frac{9p}{h^2 \sigma^o_u k^0}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.9)$$

Điều kiện biên gắn bản lề dẫn đến

$$\Delta W = 0, \; \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{tại } x = 0, a$$

$$\Delta W = 0, \; \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{tại } y = 0, a \qquad (2.10)$$

Nghiệm của phương trình (2.9) thỏa mãn điều kiện biên (2.10) có thể chọn dạng

$$\Delta W = C \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{a}$$

Thay vào (2.9) và sử dụng điều kiện rẽ nhánh (tồn tại nghiệm không tầm thường, tức là $C \neq 0$) ta được

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi'^0}{\sigma^o_u k^0}\right)\frac{n^4\pi^4}{a^4} + 2\frac{n^2 m^2 \pi^4}{a^4} + \frac{m^4\pi^4}{a^4} - \frac{9p}{h^2\sigma^o_u k^0}\frac{n^2\pi^2}{a^2} = 0$$

Từ đây tìm được

$$p = \frac{\sigma^o_u k^0 \pi^2 h^2}{9 n^2 a^2}\left[m^4 + 2n^2 m^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi'^o}{\sigma^o_u k^o}\right)n^4\right]$$

Giá trị lực tới hạn là giá trị p nhỏ nhất, nó ứng với $m = n = 1$:

$$p_{th} = \frac{\sigma^o_u k^o \pi^2 h^2}{36 a^2}\left(13 + 3\frac{\Phi'^o}{\sigma^o_u k^o}\right) \qquad (2.11)$$

Trường hợp bản đàn hồi, ta có

$$\Phi' = \sigma_u k = 3G = E$$

từ (2.11) nhận được nghiệm quen biết [1]

$$p_{th} = \frac{4E\pi^2 h^2}{9a^2}$$

So sánh (2.11) với áp lực tới hạn p'_{th} tính theo lý thuyết chảy tái bền đẳng hướng [9], p''_{th} theo lý thuyết biến dạng [3] và tính đến bất đẳng thức (2.8) ta được

$$p'_{th} < p_{th} < p''_{th}$$

KẾT LUẬN

Lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo phản ánh tốt các quy luật đối xử của vật thể biến dạng dẻo khi quá trình đặt tải phức tạp. Sử dụng tiêu chuẩn rẽ nhánh quá trình biến dạng và lý thuyết trên đã thiết lập được các phương trình cơ sở để xét bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của bản và vỏ mỏng.