Tạp chí Cơ học T.VIII, 1986 Số 1 (trang 19-24)

VỀ CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC CƠ HỆ VỚI LIÊN KẾT CHƯƠNG TRÌNH LOẠI BẤT ĐẲNG THỨC

ĐỖ SANH

Khảo sát một hệ cơ học, vị trí của nó được xác định bằng các tọa độ Lagorăngiơ q_i, chịu tác dụng các lực không thế Q_i $(i = \overline{1, n})$, và hàm Lagorăngiơ của hệ chỉ qua $L = T - \Pi$, ở đó:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{*} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} a_i^{*} \dot{q}_i + a^{*}; \quad \prod = \prod (t, q_i), \qquad (0.1)$$

trong đó a_{ij}^*, a_i^*, a^* là các hàm đã cho của thời gian và tọa độ hệ, ma trận quán tính $\| a_{ij}^* \|$ là ma trận vuông, đối xứng và khả nghịch.

Giả sử hệ được điều khiển theo chương trình dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\beta i} \ddot{q}_i + g_\beta > 0; \quad \beta = \overline{1, S} \qquad (0.2)$$

Điều kiện (0.2) được thỏa mãn với mọi điểm của không gian pha mở rộng $\{t, q_i, \dot{q}_i\}$ trong miền khảo sát.

§1. HỆ ĐƯỢC ĐIỀU KHIỂN LÀ HỆ HÔLÔNÔM

Bài toán được đặt ra như sau: tìm các điều khiển u_i $(i = \overline{1, n})$ sao cho hệ (0.1) dưới tác dụng của các lực không thế Q_i $(i = \overline{1, n})$ và các lực điều khiển u_i $(i = \overline{1, n})$ thực hiện chương trình (0.2).

Như đã biết phương trình chuyển động của hệ có thể viết trong dạng:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + u_i, \quad i = \overline{1, n} \qquad (1.1)$$

Để giải quyết bài toán đặt ra, chúng ta tìm các lực điều khiển u_i $(i = \overline{1, n})$ sao cho hệ (1.1) thực hiện chương trình dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\beta i} \ddot{q}_i + g_\beta = P_\beta (t, q_i \dot{q}_i), \; \beta = \overline{1, S} \qquad (1.2)$$

trong đó các hàm P_β được chọn thỏa mãn điều kiện:

$$P_\beta(t, q_i, \dot{q}_i) > 0, \; \beta = \overline{1, S} \qquad (1.3)$$

Dựa vào nguyên lý phù hợp [1] các lực điều khiển u_i ($i = \overline{1, n}$) thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\sum_{i=1}^{n} G_{\beta i} u_i + G_\beta = P_\beta (t, q_i, \dot{q}_i), \beta = \overline{1, S} \tag{1.4}$$

trong đó P_β thỏa mãn điều kiện (1.3), còn các đại lượng $G_{\beta i}$ và G_β được tính theo các công thức sau:

$$G_{\beta i} = \sum_{j=1}^{n} g_{\beta j} a_{ji}; \quad G_\beta = g_\beta + \sum_{j=1}^{n} [g_{\beta j}\psi_j + G_{\beta j} Q_j], \tag{1.5}$$

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left[\sum_{k,m=1}^{n} (k, m, i) \dot{q}_k \dot{q}_m + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial a_k^*}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i^*}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kj}^*}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a^*}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i^*}{\partial t} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) \right]$$

(k, m, i) là các chỉ số ờrixtô phân loại 1, $\| a_{ij} \|$ là ma trận ngược của ma trận quán tính, cũng là ma trận vuông, đối xứng và khả nghịch.

Chúng ta xét trường hợp chương trình (1.2) là hoàn toàn, tức $s = n$, và ma trận $\| G_{\beta i} \|$ có hạng n. Khi đó từ (1.4) ta tìm được:

$$u_i = u_i(t, q_j, \dot{q}_j, P_\beta); \; i = \overline{1, n} \tag{1.6}$$

Như vậy, khác với trường hợp của chương trình loại đẳng thức, trong trường hợp chương trình loại bất đẳng thức, dù chương trình là hoàn toàn, các lực điều khiển phụ thuộc không những vào vị trí của hệ trong không gian pha mở rộng mà còn phụ thuộc vào s hàm dương P_β. Để bài toán được xác định cần phải bổ sung các điều kiện phụ, chẳng hạn các điều khiển u_i ($i = \overline{1, n}$) làm tối ưu tiêu chuẩn chất lượng nào đó. Trong trường hợp riêng có thể chọn $P_\beta = C_\beta$, trong đó C_β là những hằng số dương.

§ 2. HỆ ĐƯỢC ĐIỀU KHIỂN LÀ HỆ KHÔNG HÔLÔNÔM

Giả sử các liên kết không hôlônôm đặt lên hệ có dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{\alpha i} \dot{q}_i + b_\alpha = 0, \quad \alpha = \overline{1, r} \tag{2.1}$$

trong đó $b_{\alpha i}$, b_α là các hàm đã biết của thời gian, tọa độ và vận tốc.

Như đã biết [2], chuyển động của hệ với liên kết không hôlônôm (2.1), thực hiện chương trình (1.4), có thể viết trong dạng:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_{ji} u_j \tag{2.2}$$

trong đó: Q^{*}_{io} là phản lực của các liên kết không hôlônôm đối với cơ hệ không kể ... liên kết chương trình (1.2), tức là hệ tự nhiên [2], nó được xác định nhờ hệ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i} Q^{*}_{io} + B_{\alpha} = 0; \quad \alpha = \overline{1, r} \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\nu i} Q^{*}_{io} = 0; \quad \nu = \overline{1, k} = n - r,$$

trong đó $B_{\alpha i}$, B_{α} được tính nhờ các công thức (1.5) $d_{\nu i}$ là các hệ số trong biểu thức của gia tốc Lagờrăngiơ khi biểu diễn chúng qua các gia tốc giả, trong trường hợp riêng là các gia tốc độc lập, các đại lượng h_{ji} được tính theo công thức [2]

$$h_{ji} = -\sum_{\alpha=1}^{r} B_{\alpha i} \Delta_{\alpha j}/\Delta; \quad i, j = \overline{1, n} \tag{2.4}$$

$\Delta = \det \| A \|$, $\Delta_{\alpha j}$ là phần phụ đại số của các yếu tố $B_{\alpha j}$ của ma trận $n \times n$ $\| A \|$,

$$A = \begin{Vmatrix} d_{\nu i} \\ B_{\alpha i} \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

nói chung, nó có hạng n.

Các điều khiển u_i $(i = \overline{1, n})$ trong (2.2) sẽ được xác định từ các phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} G^{*}_{\beta i} u_i + G^{*}_{\beta} = P_{\beta}(t, q_i, \dot{q}_i); \quad \beta = \overline{1, S} \tag{2.6}$$

$$G^{*}_{\beta i} = \sum_{j=1}^{n} G_{\beta j}(\delta_{ji} + h_{ji}); \quad G^{*}_{\beta} = G_{\beta} + \sum_{i=1}^{n} g_{\beta i} Q^{*}_{io} + \sum_{j=1}^{n} G^{*}_{\beta j} Q_j \tag{2.7}$$

$G_{\beta j}$, G_{β} — được tính theo công thức (1.5), các hàm P_{β} thỏa mãn điều kiện (1.3).

Cũng như trong trường hợp hệ hôlônôm, các lực điều khiển phụ thuộc không những vào vị trí của hệ trong không gian pha mở rộng mà còn phụ thuộc vào s hàm dương P_{β} mặc dù chương trình là hoàn toàn. Lẽ tất nhiên trong trường hợp chương trình không hoàn toàn, các lực điều khiển phụ thuộc không những vào s hàm P_{β} dương mà còn phụ thuộc vào (n − s) thông số [2].

Chú thích:

1. Nếu chương trình có dạng: $g^{*}_{\beta}(t, q_i, \dot{q}_i) > 0; \ \beta = \overline{1, S}$ (2.8)

thì để sử dụng được các kết quả trên, chúng ta viết chương trình (2.8) trong dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\beta i} \ddot{q}_i + g_{\beta} = P_{\beta}, \ \beta = \overline{1, S} \tag{2.9}$$

trong đó:

$$g_{\beta i} = \frac{\partial g^{*}_{\beta}}{\partial \dot{q}_i}, \qquad g_{\beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^{*}_{\beta}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g^{*}_{\beta}}{\partial t}$$

còn hàm $P_{\beta}(t, q_i, \dot{q}_i)$ thỏa mãn điều kiện (1.3), tức là:

$$P_{\beta}(t, q_i) > 0 \tag{2.10}$$

với mọi t, q_i thuộc miền khảo sát.

2. Nếu chương trình có dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} g^{*}_{\beta i}\dot{q}_i + g^{*}_{\beta} > 0, \ \beta = \overline{1, S} \tag{2.11}$$

thì chương trình (2.11) cần được viết trong dạng (2.9), trong đó

$$g^{*}_{\beta i} = g_{\beta i}; \ g_\beta = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g^{*}_{\beta i}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^{*}_{\beta}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^{*}_{\beta i}}{\partial t}\dot{q}_i + \frac{\partial g^{*}_{\beta}}{\partial t}$$

3. Kết quả nhận được vẫn còn có thể sử dụng trong trường hợp khi liên kết chương trình có dạng:

$$g^{*}_{\beta}(t, q_i) > 0; \ \beta = \overline{1, S} \tag{2.12}$$

Khi đó chúng ta khảo sát hệ có chuyển động chương trình dạng

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\beta i}\ddot{q}_i + g_\beta = \ddot{P}_\beta, \ \beta = \overline{1, S} \tag{2.13}$$

trong đó:

$$g_{\beta i} = \frac{\partial g^{*}_{\beta}}{\partial q_i}, \ g_\beta = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g^{*}_{\beta}}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g^{*}_{\beta}}{\partial q_i \partial t}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 g^{*}_{\beta}}{\partial t^2};$$

còn hàm $P_\beta(t)$ thỏa mãn điều kiện.

$$P_\beta(t) > 0 \tag{2.14}$$

với mọi t trong khoảng thời gian khảo sát.

4. Có thể sử dụng nguyên lý Gaoxơ để khảo sát bài toán chuyển động của cơ hệ với liên kết chương trình loại bất đẳng thức.

Để minh họa, chúng ta khảo sát hệ, hàm Lagơrănggiơ của nó có dạng:

$$2L = a\dot{q}_1^2 + b\dot{q}_2^2 + 2c\dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{2.15}$$

trong đó q_1, q_2 là các tọa độ Lagơrănggiơ của hệ, a, b, c là các hằng số.

Giả sử Q_1, Q_2 là các lực không thế tác dụng lên hệ. Tìm các điều khiển u, v để hệ thực hiện chương trình dạng:

$$dq_1 + hq_2 > 0, \tag{2.16}$$

trong đó d, h là những hằng số.

Để giải quyết bài toán trên chúng ta tìm các điều khiển u, v để hệ thực hiện chương trình dạng:

$$d\ddot{q}_1 + h\ddot{q}_2 = \ddot{P}(t) \tag{2.17}$$

trong đó P(t) là hàm dương trong khoảng thời gian khảo sát $t \geqslant t_0$.

Để viết phương trình (1.4) ta tính các ma trận 1×2 $\| G_{\beta i} \|$ và ma trận 1×1 $\| G_\beta \|$:

$$\| G_{\beta i} \| = \| (ab - ch)/\Delta \ \ (ha - dc)/\Delta \|,$$

$$\| G_\beta \| = \| \ddot{P} + [Q_1(db - ch) + Q_2(ha - dc)]/\Delta \|$$

trong đó $\Delta = ab - c^2$.

Để thực hiện chương trình (2.16) các lực điều khiển u, v được xác định từ hệ phương trình sau:

$$(db - hc)\,u + (ha - dc)\,v + Q_1(db - hc) + Q_2(ha - dc) + \ddot{P}\Delta = 0 \tag{2.18}$$

Rõ ràng là các điều khiển u, v phụ thuộc vào không những hàm $P(t)$ mà còn phụ thuộc vào một họ thông số.

Bây giờ chúng ta giả sử rằng liên kết chương trình (2.17) là lý tưởng theo nghĩa cơ học giải tích thì

$$u = dv/h = 0. \tag{2.19}$$

Từ (2.18), (2.19) ta có :

$$u = d[\Delta\ddot{P} - Q_1(db - hc) - Q_2(ha - dc)] / (d^2b - h^2a),$$

$$v = h[\Delta\ddot{P} - Q_1(db - hc) - Q_2(ha - dc)] / (d^2b - h^2a).$$

Phương trình (1.1) có dạng :

$$a\ddot{q}_1 + c\ddot{q}_2 = Q_1 + u ; c\ddot{q}_1 + b\ddot{q}_2 = Q_2 + v. \tag{2.20}$$

Khi giải hệ phương trình (2.20) chúng ta nhận được:

$$\ddot{q}_1 = [h(hQ_1 - dQ_2) + \Delta\ddot{P}(bd - hc)] / (d^2b + h^2a - 2hdc),$$

$$\ddot{q}_2 = [d(dQ_1 - hQ_2) + \Delta\ddot{P}(ah - dc)] / (d^2b + h^2a - 2hdc).$$

Khi tích phân những phương trình này ta nhận được:

$$q_1 = [P(bd - hc) + \frac{1}{2} h(hQ_1 - dQ_2)t^2 + c_1t + c_2] / (d^2b + h^2a - 2hdc),$$

$$q_2 = [P(ah - dc) + \frac{1}{2} d(dQ_1 - hQ_2)t^2 + D_1t + D_2] / (d^2b + h^2a - 2hdc).$$

các hằng số tích phân C_1, C_2, D_1, D_2 thỏa mãn các điều kiện :

$$dC_1 + hD_1 = 0, \quad dC_2 + hD_2 = 0.$$

Do đó:

$$q_1 = [P(bd - hc) + h(hQ_1 - dQ_2)\frac{t^2}{2} - \frac{h}{d}(D_1t + D_2)] / (d^2b + h^2a - 2hdc)$$

$$q_2 = [P(ah - dc) + \frac{d}{2}(dQ_1 - hQ_2)t^2 + D_1t + D_2] / (d^2b + h^2a - 2hdc)$$

Các hằng số tích phân D_1, D_2 được xác định từ điều kiện đầu:

$$q_1^\circ = q_1(o), \ \dot{q}_1^\circ = \dot{q}_1(o), \ q_2^\circ = q_2(o), \ \dot{q}_2^\circ = \dot{q}_2(o),$$

chúng không độc lập với nhau, bởi vì

$$q_1^\circ = [P^\circ(bd - hc) - hD_2/d] / \Delta^*, \quad \dot{q}_1^\circ = [\dot{P}^\circ(bd - hc) - hD_1/d] / \Delta^*,$$

$$q_2^\circ = [P^\circ(ah - dc) + D_2] / \Delta^*, \quad \dot{q}_2^\circ = [\dot{P}^\circ(ah - dc) + D_1] / \Delta^*,$$

với $P^\circ = P(o), \dot{P}^\circ = \dot{P}(o), \quad \Delta^* = d^2b + h^2a - 2hdc$

KẾT LUẬN

1. Trong bài báo đã trình bày phương pháp xác định các lực điều khiển để hệ thực hiện chương trình loại bất đẳng thức, cho trường hợp hệ hôlônôm (hệ phương trình (1.4)) và hệ phương trình (2.6) cho trường hợp hệ không hôlônôm.

2. Đã vạch ra tính chất quan trọng đối với loại chương trình loại bất đẳng thức là khả năng điều khiển cơ hệ trong trường hợp này được mở rộng hơn đối với trường hợp của loại chương trình đẳng thức vì chuyển động của hệ trong trường hợp chương trình là hoàn toàn, chuyển động của hệ còn phụ thuộc vào s hàm dương.

Địa chỉ :
Trường Đại học Bách khoa HN

Nhận ngày 18/3/1985

1. Do Sanh On the principle of compatibility and the motion eps of a constrained
chanical system. ZAMM, № 4, 1980

2. Do Sanh. The motion equations of a nonholonomic mechanical system with
gram constraints. Zagadnienia Drgan Nieliniowych. Warsaw. № 21, 1981.

SUMMARY

ON THE MOTION OF A SYSTEM WITH PROGRAM CONSTRAINTS OF INEQUALITY TYPE

In the present paper, the problem of the motion of a system with program of ine-
lity type is considered.

Basing on the principle of compatibility the method of determining the controlled
ces is constructed.

It is shown, that in the case of the system with program constraints of inequaliy
e the controlled forces depend on some parameters though the program is complete.

In the end, a illustrative example is considered.

CÁC BÁO CÁO KHOA HỌC ĐÃ TRÌNH BÀY TẠI XEMINE CƠ HỌC CHẤT LỎNG TRONG NHỮNG NĂM 1983 – 1985

(Thường kỳ mỗi tháng một lần vào sáng thứ 7 tuần cuối cùng tại Viện Cơ học)

ng 9/1983 Nguyễn Văn Tuyên (ĐH Bách khoa Hà nội) Một số phương hướng nghiên cứu giảm sức cản chuyển động của vật thể trong nước.

ng 10/1983 Phạm Văn Ninh (Viện cơ) sóng trên mặt dòng chảy xoáy.

ng 11/1983 Nguyễn Văn Gia (Viện toán) Bài toán biên khuếch tán và ứng dụng.

ng 1/1984 Nguyễn Đình Ngọc (Bộ Nội vụ) Một số vấn đề toán cơ trong khí tượng học động lực.

ng /1984 Hoàng Xuân Nhuận (iện cơ) Nghiên cứu hoàn lưu ba chiều tại biển đông bằng phương pháp mô hình hóa số trị

ng 3/1984 Phạm Lợi Vũ (Viện cơ) Bài toán ngược tán xạ đối với phương trình sóng.

ng 5/1984 Nguyễn Văn Tuyên (ĐH Bách khoa Hà Nội) Một số vấn đề về thủy động lực học tàu cánh ngầm.

ng 6/1984 Nguyễn Ân Niên (ĐH Thủy lợi Hà Nội) Mô hình số trị trên hệ thống kênh sông.

ng 9/1984 Ngô Huy Cẩn (Bộ quốc phòng) về chuyển động đối lưu nhiệt của chất lỏng nhớt có tính đến hiệu ứng vi cực

ng 10/1984 Nguyễn Hữu Chí (ĐH Bách khoa Hà Nội) Tổng quát về động cơ gió.
Phan Hữu Hùng (Vụ KT Bộ GTVT) Kết quả nghiên cứu động gió PD5

ng 11/1984 Nguyễn Tài (ĐH Xây dựng Hà Nội) Sức cản thủy lực trong lòng dẫn có độ nhám thô

ng 12/1984 Nguyễn Xuân Trục (ĐH Xây dựng Hà Nội) Sói cục bộ dưới chân cầu. Dự đoán và biện pháp chống

ng /1985 Phạm Lợi Vũ (Viện cơ) Bài toán thấm trong môi trường ba lớp đối xứng trục.

ng 3/1985 Vương Quốc Cường (phòng NC liên hiệp Việt Xô về KTND) Một phương pháp giải tích – số trị để giải bài toán lớp biên tà áp.

ng 4/1985 Bùi Xuân Thông, Lương Tuấn anh (Viện KTTV) Mô hình tính dòng chảy gió ven bờ

ng 5/1985 Đỗ Văn Toán (ĐH Xây dựng Hà nội) giải phương trình sóng nước nông bằng phương pháp phần tử hữu hạn

ng 10/1985 Ngô Huy Cẩn (Bộ quốc phòng) Chuyển động đối lưu nhiệt của chất lỏng hai pha.

ng 11/1985 Nguyễn Tất Đắc (Viện Cơ) Tính dòng chảy và mặn trên hệ thống sông.

ng 12/1985 Trương Gia Bình (Viện cơ) sự mất ổn định của màng mỏng từ tính.