BÀI TOÁN ĐỐI XỨNG TRỤC LAMB TRONG MÔI TRƯỜNG ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CÓ BIẾN DẠNG BAN ĐẦU THUẦN NHẤT

PHẠM THỊ OANH

Bài toán truyền sóng trong một lớp vật liệu đàn hồi phi tuyến với biến dạng ban đầu thuần nhất, đối xứng trục có biên tự do đối với ứng suất đã được nghiên cứu trong các công trình [1, 2, 3]. Trong bài này ta xét đến một loại bài toán biên động lực, đó là bài toán đối xứng trục Lamb. Trên cơ sở các hệ thức cơ bản đã tuyến tính hóa trong hệ tọa độ trụ [4, 6] ta áp dụng phương pháp biến đổi tích phân để giải bài toán đối với vật liệu mà thế đàn hồi có dạng tùy ý. Trong trường hợp đàn hồi tuyến tính và không có ứng suất ban đầu, các kết quả nhận được trở về các kết quả đã biết [5].

§ 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét bài toán đối xứng trục Lamb trong bán không gian đàn hồi cấu tạo từ vật liệu đàn hồi nén được, với thế biến dạng tùy ý. Trong bán không gian tồn tại biến dạng ban đầu thuần nhất, đối xứng trục.

$$U_r^{\circ} = (\lambda_1 - 1)r, \quad U_\theta^{\circ} = 0.$$

$$U_z^{\circ} = (\lambda_3 - 1)z, \quad \lambda_1, \lambda_3 \text{ là hằng số} \tag{1.1}$$

Trên biên $z = 0$ giới hạn bán không gian có lực một kích động $P(r, t) = p(r)e^{i\omega t}$ hướng theo trục z. Ta cần xác định dịch chuyển và ứng suất trong bán không gian gây ra bởi $P(r, t)$.

Bài toán đặt ra ở đây là bài toán phi tuyến (cả về hình học và vật lý). Ứng dụng lý thuyết tuyến tính hóa của A. H. ГУЗЬ [4] ta đưa bài toán đang xét về bài toán tuyến tính hóa. Do tính chất đối xứng trục nên

$$\bar{U} = (U_r, 0, U_z); \; U_r = U_r(r, z, t); \; U_z = U_z(r, z, t).$$

Khi đó phương trình chuyển động có dạng [5]:

$$[\lambda_1^2(\alpha_{11} + 2\beta_{11}) + \alpha_1]U_{r,rr} + (\lambda_3^2\beta_{13} + \alpha_3)U_{r,zz} +$$

$$+ \lambda_1\lambda_3(\alpha_{13} + \beta_{13})U_{z,rz} + \frac{1}{r}[\lambda_1^2(\alpha_{11} + 2\beta_{11}) + \alpha_1]U_{r,r} -$$

$$- \frac{1}{r^2}[\lambda_1^2(\alpha_{11} + 2\beta_{11}) + \alpha_1]U_r = \rho\ddot{U}_r$$

$$\lambda_1\lambda_3(\alpha_{13} + \beta_{13})U_{r,rz} + (\lambda_1^2\beta_{13} + \alpha_1)U_{z,rr} +$$

$$+ [\lambda_3^2(\alpha_{33} + 2\beta_{33}) + \alpha_3]U_{z,zz} + \frac{1}{r}\lambda_1\lambda_3(\alpha_{13} + \beta_{13})U_{r,z} +$$

$$+ \frac{1}{r}(\lambda_1^2\beta_{13} + \alpha_1)U_{z,r} = \rho\ddot{U}_z \tag{1.2}$$

và điều kiện biên có dạng [5].

$$\lambda_1\lambda_3\beta_{13}U_{z,r} + (\lambda_1^2\beta_{13} + \alpha_3)U_{r,z}\Big|_{z=0} = 0,$$

$$\lambda_1\lambda_3\alpha_{13}\left(U_{r,r} + \frac{1}{r}U_r\right) + [\lambda_3^2(\alpha_{33} + 2\beta_{33}) + \alpha_3]U_{z,z}\Big|_{z=0} = -P(r)e^{i\omega t}, \quad (1.3)$$

α_i, α_{ij}, β_{ij} là các hằng số phụ thuộc vào dạng của thế đàn hồi và trạng thái biến dạng ban đầu [6]. Biến dạng và ứng suất được xác định nhờ liên hệ hình học và vật lý đã tuyến tính hóa [4, 6]:

$$2\gamma_{ij} = (\delta_i^m + \nabla_i U^{om})\nabla_j U_m + (\delta_j^m + \nabla_j U^{om})\nabla_i U_m,$$

$$t^{im} = \omega^{im\alpha\beta}U_{\alpha,\beta} + r\omega^{im22}U_1 - \frac{1}{r}(\omega^{im12} + \omega^{im21})U_2, \quad (1.4)$$

trong đó U_m là thành phần hiệp biến của vectơ chuyển dịch trong hệ tọa độ trụ. Thành phần này liên hệ với thành phần vật lý của vectơ chuyển dịch theo công thức:

$$U_1 = U_r;\ U_2 = rU_\theta;\ U_3 = U_z, \quad (1.5)$$

còn γ_{ij} là thành phần hiệp biến của tenxơ biến dạng Grin, t^{im} là thành phần phản biến của tenxơ ứng suất Kiếckhốp, $\omega^{im\alpha\beta}$ là hàm của λ_i, α_k, α_{kl}, β_{jn} [5].

Để giải quyết bài toán đặt ra, ta chỉ cần xác định U_r, U_z từ hệ (1.2), (1.3).

§ 2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Đưa vào hàm χ và biểu diễn [4]

$$U_r = -\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z};\ U_z = b\left(\Delta + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi, \quad (2.1)$$

trong đó:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r},\ b = \frac{\lambda_1^2(\alpha_{11} + 2\beta_{11}) + \alpha_1}{\lambda_1\lambda_3(\alpha_{13} + \beta_{13})},$$

$$A = \frac{\lambda_1^2\beta_{13} + \alpha_3}{\lambda_1^2(\alpha_{11} + 2\beta_{11}) + \alpha_1},\ B = \frac{\rho}{\lambda_1^2(\alpha_{11} + 2\beta_{11}) + \alpha_1} \quad (2.2)$$

Thay (2.1) vào (1.2) ta thấy phương trình thứ nhất thỏa mãn đồng nhất, phương trình thứ hai dẫn về phương trình đối với χ

$$\left[\left(\Delta + A\frac{\partial^2}{\partial z^2} - B\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta + F\frac{\partial^2}{\partial z^2} - D\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - E\Delta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\chi = 0, \quad (2.3)$$

trong đó A, B xác định theo (2.2) còn

$$F = \frac{\lambda_3^2(\alpha_{33} + 2\beta_{33}) + \alpha_3}{\lambda_3^2\beta_{13} + \alpha_1};\ D = \frac{\rho}{\lambda_3^2\beta_{13} + \alpha_1};$$

$$E = \frac{\lambda_1^2\lambda_3^2(\alpha_{13} + \beta_{13})^2}{[\lambda_1^2(\alpha_{11} + 2\beta_{11}) + \alpha_1](\lambda_3^2\beta_{13} + \alpha_1)}. \quad (2.4)$$

Để giải (2.3) ta dùng phép biến đổi tích phân Hanken. Nhân 2 vế của (2.3) với $rJ_0(\alpha r)$ rồi tích phân từ 0 đến ∞ theo r, chú ý là dấu $\int dr$ và dấu $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ có thể hoán vị được, ta đi đến kết quả:

$$\int_0^\infty \Delta\Delta\chi J_0(\alpha r)\,rdr + \left[(A + F - E)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - (B + D)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\int_0^\infty \Delta\chi J_0(\alpha r)\,rdr +$$

$$+\left[AF\frac{\partial^4}{\partial z^4}-(AD+BF)\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial t^2}+BD\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right]\int_0^\infty \chi J_o(\alpha r)\,rdr=0. \qquad (2.5)$$

Ký hiệu
$$\overline{\chi}(\alpha,z,t)=\int_0^\infty \chi(r,z,t)J_o(\alpha r)\,rdr \qquad (2.6)$$

là biến đổi Hanken của hàm χ. Từ (2.5) ta nhận được phương trình đối với $\overline{\chi}$:

$$\alpha^4\overline{\chi}-\alpha^2\left[(A+F-E)\frac{\partial^2}{\partial z^2}-(B+D)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\overline{\chi}+$$
$$+AF\frac{\partial^4\overline{\chi}}{\partial z^4}-(AD+BF)\frac{\partial^4\overline{\chi}}{\partial z^2\partial t^2}+BD\frac{\partial^4\overline{\chi}}{\partial t^4}=0. \qquad (2.7)$$

Đặt
$$\overline{\chi}(\alpha,z,t)=e^{i\omega t}\,\overline{\Phi}(\alpha,z) \qquad (2.8)$$

và coi α là tham số, từ (2.7) ta nhận được phương trình

$$AF\frac{d^4\overline{\Phi}}{dz^4}-\left[\alpha^2(A+F-E)-\omega^2(AD+BF)\right]\frac{d^2\overline{\Phi}}{dz^2}+$$
$$+\left[\alpha^4-\alpha^2(B+D)\omega^2+BD\omega^4\right]\overline{\Phi}=0, \qquad (2.9)$$

nghiệm của (2.9) thỏa mãn điều kiện giới nội khi $z\to\infty$ có dạng:

$$\overline{\Phi}=N_1e^{-k_1z}+N_2e^{-k_2z} \qquad (2.10)$$

trong đó: $k_1=\sqrt{k_1^2},\ k_2=\sqrt{k_2^2},\ \mathrm{Re}\,k_1\geqslant 0,\ \mathrm{Re}\,k_2\geqslant 0,$

$$k_{1,2}^2=\frac{1}{2AF}\Big\{\alpha^2(A+F-E)-\omega^2(AD+BF)\pm[\alpha^2(A+F-E)-$$
$$-\omega^2(AD+BF)]^2-4AF[\alpha^4-\alpha^2(B+D)\omega^2+BD\omega^4]\Big\}, \qquad (2.11)$$
$$N_1=N_1(\alpha);\ N_2=N_2(\alpha).$$

Từ (2.8) ta suy ra:
$$\overline{\chi}=e^{i\omega t}(N_1e^{-k_1z}+N_2e^{-k_2z})$$
và do đó:
$$\chi=e^{i\omega t}\int_0^\infty(N_1e^{-k_1z}+N_2e^{-k_2z})\alpha J_o(\alpha r)\,d\alpha. \qquad (2.12)$$

Thế (2.12) vào (2.1) ta nhận được U_r, U_z:

$$U_r=-e^{i\omega t}\int_0^\infty(N_1k_1e^{-k_1z}+N_2k_2e^{-k_2z})\alpha^2J_1(\alpha r)\,d\alpha,$$

$$U_z=be^{i\omega t}\int_0^\infty(\xi_1N_1e^{-k_1z}+\xi_2N_2e^{-k_2z})\alpha J_o(\alpha r)\,d\alpha, \qquad (2.13)$$

trong đó: $\xi_i=Ak_i^2-\alpha^2+B\omega^2,\quad i=1,2.$ (21.4)

Bây giờ ta cần xác định các hệ số N_1, N_2.

Thế (2.13) vào điều kiện biên (1.3), sau khi tính toán ta nhận được.

$$
\begin{gathered}
-\lambda_1\lambda_3\beta_{13}b\int_0^\infty(\xi_1N_1+\xi_2N_2)\alpha^2J_1(\alpha r)d\alpha+ \\
+(\lambda_1^2\beta_{13}+\alpha_3)\int_0^\infty(N_1k_1^2+N_2k_2^2)\alpha^2J_1(\alpha r)d\alpha=0, \\
-\lambda_1\lambda_3\alpha_{13}\int_0^\infty(N_1k_1+N_2k_2)\alpha^3J_o(\alpha r)d\alpha-[\lambda_3^2(\alpha_{33}+2\beta_{33})+ \\
+\alpha_3]b\int_0^\infty(\xi_1k_1N_1+\xi_2k_2N_2)\alpha J_o(\alpha r)d\alpha=-P(r).
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

Ta lại áp dụng phép biến đổi tích phân Hanken để giải (2.15).

Nhân 2 vế của phương trình $(2.15)_1$ với $rJ_1(\alpha r)$, $(2.15)_2$ với $rJ_o(\alpha r)$ rồi tích phân theo r từ 0 đến ∞ ta thu được kết quả :

$$
\begin{gathered}
-\lambda_1\lambda_3\beta_{13}b(\xi_1N_1+\xi_2N_2)\alpha+(\lambda_1^2\beta_{13}+\alpha_3)(N_1k_1^2+N_2k_2^2)\alpha=0, \\
-\lambda_1\lambda_3\alpha_{13}(N_1k_1+N_2k_2)\alpha^2-[\lambda_3^2(\alpha_{33}+2\beta_{33})+\alpha_3]b(\xi_1k_1N_1+\xi_2k_2N_2)=-\overline{P}(\alpha).
\end{gathered}
\tag{2.16}
$$

ở đây $\overline{P}(\alpha)$ là biến đổi Hanken của p(r) :

$$
\overline{P}(\alpha)=\int_0^\infty P(r)J_o(\alpha r)rdr.
$$

Từ (2.16) ta có được phương trình để xác định N_1, N_2:

$$
\begin{gathered}
g_1(\alpha)N_1+g_2(\alpha)N_2=0, \\
f_1(\alpha)N_1+f_2(\alpha)N_2=\overline{P}(\alpha).
\end{gathered}
\tag{2.17}
$$

Giải (2.17) ta có kết quả :

$$
N_1=\frac{\overline{P}g_2}{f_1g_2-f_2g_1};\quad N_2=\frac{\overline{P}g_1}{f_2g_1-f_1g_2}.
\tag{2.18}
$$

trong đó :

$$
\begin{gathered}
g_i(\alpha)=(\lambda_1^2\beta_{13}+\alpha_3)k_i^2-\lambda_1\lambda_3\beta_{13}b\xi_i^2, \\
f_i(\alpha)=\lambda_1\lambda_3\alpha_{13}k_i\alpha^2+[\lambda_3^2(\alpha_{33}+2\beta_{33})+\alpha_3]bk_i\xi_i,\quad i=1,2.
\end{gathered}
\tag{2.19}
$$

b, k_i, ξ_i xác định theo các công thức (2.3), (2.11), (2.14). Trong (2.13) cho z = 0 ta nhận được dịch chuyển trên mặt biên z = 0 :

$$
\begin{gathered}
U_r(r,o,t)=-e^{i\omega t}\int_0^\infty(N_1k_1+N_2k_2)\alpha^2J_1(\alpha r)d\alpha, \\
U_z(r,o,t)=be^{i\omega t}\int_0^\infty(\xi_1N_1+\xi_2N_2)\alpha J_o(\alpha r)d\alpha.
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

Thế giá trị của N_1, N_2 từ (2.18) vào (2.20) ta nhận được

$$U_r(r, o, t) = e^{i\omega t} \int_0^\infty \frac{\overline{P}(g_2 k_1 - g_1 k_2)}{f_2 g_1 - f_1 g_2} \alpha^2 J_1(\alpha r) d\alpha,$$

$$U_z(r, o, t) = b e^{i\omega t} \int_0^\infty \frac{\overline{P}(g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1)}{f_2 g_1 - f_1 g_2} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha. \tag{2.21}$$

Trường hợp lực kích động tập trung tại gốc tọa độ $p(r) = \frac{P_o \delta(r)}{2\pi r}$, $P_o = \text{const}$, $\delta(r)$ – hàm Dirăc,

ta có:

$$\overline{P}(\alpha) = \frac{P_o}{2\pi} \tag{2.22}$$

Trong trường hợp này dịch chuyển tại mặt biên $z = 0$ có dạng:

$$U_r(r, o, t) = \frac{P_o e^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_2 k_1 - g_1 k_2}{f_2 g_1 - f_1 g_2} \alpha^2 J_1(\alpha r) d\alpha,$$

$$U_z(r, o, t) = \frac{P_o b e^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1}{f_2 g_1 - f_1 g_2} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha. \tag{2.23}$$

§3. KẾT LUẬN

Từ các kết quả trên ta thấy rằng nếu cho trước trạng thái ban đầu và dạng của thế đàn hồi, ta hoàn toàn xác định được dịch chuyển U_r, U_z, biến dạng ε_{rr}, ε_{zz},... và ứng suất σ_{rr}, σ_{zz},... theo các hệ số λ_j, $\varkappa_i$, α_{ij}, β_{ij}.

Công thức để xác định các hệ số này đã cho trong [6]. Kết quả tính toán các hệ số đó nhưng dùng ký hiệu khác với tài liệu này, đã cho trong [7].

Trường hợp đàn hồi tuyến tính không có ứng suất ban đầu:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1;\ \varkappa_1 = \varkappa_2 = 1,3;\ \alpha_{ij} = \lambda,\ \beta_{ij} = \mu. \tag{3.1}$$

Từ (3.1) ta nhận được

$$k_1^2 = \alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2},\quad k_2^2 = \alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2},\quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

$$\xi_1 = -\alpha,\ [illegible] \tag{3.2}$$

$$g_1(\alpha) = 2\alpha k_1,\ g_2(\alpha) = \alpha(k_2^2 + \alpha^2),$$

$$f_1(\alpha) = -\mu(k_2^2 + \alpha^2),\ f_2(\alpha) = -2\mu k_2 \alpha^2. \tag{3.3}$$

Trong trường hợp này phương trình (2.17) có dạng:

$$2k_1 N_1 + (k_2^2 + \alpha^2) N_2 = 0$$

$$(k_2^2 + \alpha^2) N_1 + 2k_2 \alpha^2 N_2 = -P(\alpha). \tag{3.4}$$

Trong (3.4) nếu đặt $k_1 N_1 = A_o$, $-N_2 = B_o$ thì (3.4) và (2.13) hoàn toàn trùng với công thức (6), (7), ( ), (11) trong [5]. Thế (3.2) (3.3) vào (2.21), (2.23) ta cũng nhận được các kết quả đã biết [ ].

Nhận ngày 20/11/1984

Trường Đại học Tổng hợp HN

2-85

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ГУЗЬ А.Н., ЖУК А.П., МАХОРТ Ф.Г. О распространении упругих волн Ламба в теле с начальными деформациями. ДАН УССР серия А, №10, 1972.
2. ГУЗЬ А.Н., ЖУК А.П., МАХОРТ Ф.Г.К теории распространения осесимметричных упругих волн в слое с начальными напряжениями. К., ПМ, Т, IX, В.7, 1974.
3. ЖУК А.П. Исследование распространения упругих осесимметричных волн в слое с начальными деформациями. К., ПМ, Т. IX, В. 8. 1974.
4. ГУЗЬ А.Н. Устойчивость упругих телпри всестороннем сжатии. Наукова думка, Киев, 1979.
5. НОВАЦКИЙ В. Теория упругости. Мир Москва, 1975.
6. PHẠM THỊ OANH, Sóng tựu trong môi trường đàn hồi phi tuyến với biến dạng ban đầu thuần nhất. Tạp chí Cơ học số 4, 1985.
7. PHẠM THỊ OANH. Sự truyền sóng mặt « Rơ lây » trên mặt trụ của môi trường đàn hồi có biến dạng ban đầu. Tạp chí cơ học số 3, 1984.

РЕЗЮМЕ
ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ЛАМБА В НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С НАЧАЛЬНЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Опирая на линеаризованную теорию развитую А. Н. Гузем, поставлена и решена осесимметричная задача Ламба в упругой среде с начальными однородными деформациями и с произвольным видом упругого потенциала. Получены в общем случае формулы для перемещений. В случае линейного упругого потенциала, когда в среде отсутствуют начальные деформации полученные результаты совпадают с известными результатами линейной теории упругости.

THÔNG BÁO VỀ PHIÊN HỌP LẦN THỨ 8 CỦA BCHTU HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM

Ngày 9/3/1986 dưới sự chủ toạ của giáo sư tiến sĩ Nguyễn Văn Đạo chủ tịch Hội Cơ Học Ban chấp hành trung ương Hội Cơ Học Việt Nam đã họp phiên toàn thể lần thứ 8.
Hội nghị đã nghe và thảo luận báo cáo về các hoạt động của Hội trong 6 tháng cuối năm 1985, đã thống nhất đánh giá rằng các hoạt động của hội trong thời gian này vẫn đúng hướng, có chất lượng, một số các hoạt động có tác dụng rõ rệt trong việc tập hợp đội ngũ cán bộ làm công tác cơ học, một số tổ chức của Hội đã được tiếp tục kiện toàn, đồng thời cũng chỉ ra rằng trong thời gian tới Hội cần tăng cường các hoạt động ở các tỉnh phía nam.

Hội nghị quyết định bổ sung các đồng chí : Thái Nguyễn Bạch Liên (Thành phố Huế), Nguyễn Đức Cán (Thành phố Đà Nẵng), Trịnh Văn Nhân (Thành phố Hồ Chí Minh) vào Ban chấp hành trung ương Hội Cơ Học Việt Nam

Hội nghị đã đề nghị Viện Khoa Học Việt Nam, Bộ Đại học và trung học chuyên nghiệp cùng với Hội Cơ học Việt Nam tổ chức Hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ 4 vào cuối năm 1987. Trong thời gian này sẽ tiến hành Đại hội đại biểu toàn quốc lần thứ hai của Hội.