Tạp chí Cơ học T.VIII 1986 Số 1 (trang 4–12)

VỀ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN CỰC NHANH HỆ CON LẮC

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

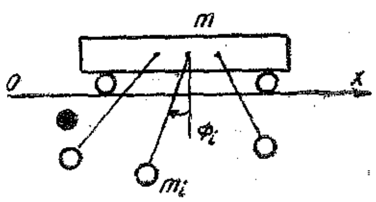
§ MỞ ĐẦU

Trong [1] (trang 339 – 344) đã khảo sát bài toán dời chuyển cực nhanh được điều khiển bởi gia tốc trong điều kiện vận tốc bị chặn. Nhờ đưa vào phép biến đổi thích hợp phương trình vi phân chuyển động trở nên đơn giản với điều khiển là vận tốc và đã chứng minh được rằng hệ là điều khiển được nếu hệ có tần số riêng phân biệt.

Trong bài báo này xét bài toán dời chuyển và khởi động cực nhanh hệ con lắc được điều khiển bởi lực giới nội.

§ 1 BÀI TOÁN DỜI CHUYỂN CỰC NHANH

Cho hệ gồm khối lượng m tịnh tiến theo trục nằm ngang OX dưới tác dụng của lực F(t) mang theo hệ n con lắc là những khối lượng m_i treo ở đầu dây dài l_i ($i = 1, \ldots, n$), dao động trong mặt phẳng thẳng đứng qua OX. Giả thiết $|F(t)| \leqslant F_o$ (F_o – hằng số dương).



Bài toán dời chuyển cực nhanh yêu cầu xác định lực điều khiển F(t) để trong khoảng thời gian cực tiểu cần tìm hệ chuyển từ trạng thái cân bằng ban đầu đến trạng thái cân bằng mới sau khi chuyển dời được đoạn $X_* > 0$ cho trước.

Đối ngẫu là bài toán dời chuyển cực xa: cho trước T, xác định điều khiển F(t) để hệ dời chuyển được đoạn X_* cực đại cần tìm.

Động năng của hệ là:

$$T = \frac{1}{2} M\dot{X}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i l_i^2 \dot{\Phi}_i^2 - 2m_i l_i \dot{X} \dot{\Phi}_i \cos\Phi_i) \tag{1.1}$$

trong đó: X - hoành độ khối lượng tịnh tiến; Φ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) – góc nghiêng các con lắc (tính theo chiều kim đồng hồ từ vị trí cân bằng ổn định thẳng đứng); $M = m + \sum_{i=1}^{n} m_i$ – khối lượng toàn hệ.

Các lực suy rộng là:

$$Q_x = F(t);\ Q_i = -m_i g l_i \sin\Phi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

trong đó: g – gia tốc trọng trường.

Giả thử dao động nhỏ, giữ lại các số hạng bậc nhất, hệ phương trình vi phân chuyển động là :

$$M\ddot{X} - \sum_{i=1}^{n} m_i l_i \ddot{\Phi}_i = F(t),$$

$$m_i l_i^2 \ddot{\Phi}_i + m_i g l_i \Phi_i = m_i l_i \ddot{X}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Các điều kiện đầu và cuối là :

$$t = 0;\ X(0) = 0;\ \dot{X}(0) = \Phi_i(0) = \dot{\Phi}_i(0) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.4}$$

$$t = T;\ X(T) = X_*;\ \dot{X}(T) = \Phi_i(T) = \dot{\Phi}_i(T) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.5}$$

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUẨN VÀ TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC.

Chọn biến mới là hoành độ x của khối tâm toàn hệ xác định bởi hệ thức :

$$M\ddot{x} = m\ddot{X} + \sum_{i=1}^{n} m_i (\ddot{X} - l_i \ddot{\Phi}_i) \tag{2.1}$$

Hệ phương trình vi phân (1.3) trở thành :

$$M\ddot{x} = F(t),$$

$$(M - m_i) m_i l_i^2 \ddot{\Phi}_i + gMm_i l_i \Phi_i - m_i l_i \sum_{j \neq i} m_j l_j \ddot{\Phi}_j = m_i l_i F(t). \tag{2.2}$$

Phương trình đầu với biến x được phân ly biểu diễn chuyển động khối tâm. Các phương trình sau mô tả hệ dao động với động năng $\tilde{T}$ và thế năng $\tilde{V}$:

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{\Phi}_i \dot{\Phi}_j;\ \tilde{V} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i \Phi_i^2, \tag{2.3}$$

trong đó: $\quad a_{ii} = (M - m_i) m_i l_i^2;\ a_{ij} = a_{ji} = m_i l_i m_j l_j;\ c_i = Mgm_i l_i \qquad (2.4)$

Ký hiệu : ω_i — các tần số riêng; $(d_1^i, d_2^i, \ldots, d_n^i)$ — các hệ số phân phối tương ứng thỏa mãn các hệ thức trực giao :

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_{km} d_k^i d_m^j = 0;\quad \sum_{k=1}^{n} c_k d_k^i d_k^j = 0,\ (i \neq j). \tag{2.5}$$

Đặt

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} d_j^i \varphi_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Hệ (2.2) trở thành :

$$M\ddot{x} = F(t)$$

$$\ddot{\varphi}_i + \omega_i^2 \varphi_i = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{n} m_j l_j d_j^i F(t), \tag{2.7}$$

trong đó:

$$M_i = \sum_{k,m=1}^{n} a_{km} d_k^i d_m^j ; \qquad M_i \omega_i^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k(\,^i_k)^2. \tag{2.8}$$

Tiếp tục đổi biến:

$$x = \frac{1}{M} F_o x' ; \ \varphi_i = \frac{1}{M_i} \varphi_i' F_o \sum_{j=1}^{n} m_j l_j d_j^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.9}$$

Hệ phương trình vi phân chuyển động sẽ có dạng đơn giản;

$$\ddot{x} = u(t) ; \ \ddot{\varphi}_i + \omega_i^2 \varphi_i = u(t), \tag{2.10}$$

trong đó để đơn giản chúng ta vẫn dùng các ký hiệu x, φ_j còn điều khiển $u(t) = F(t)/F_o$ chịu điều kiện $|u(t)| \leqslant 1$.

Dễ dàng nhận thấy các điều kiện đầu (1.4) và cuối (1.5) trở thành:

$$t = 0 ; \ x(o) = 0 ; \ \dot{x}(o) = \varphi_i(o) = \dot{\varphi}_i(o) = 0, \tag{2.11}$$

$$t = T ; \ \ x(T) = x_*, \ \dot{x}(T) = \varphi_i(T) = \dot{\varphi}_i(T) = 0, \tag{2.12}$$

trong đó

$$x_* = \frac{1}{F_o} M X_* > 0 \tag{2.13}$$

Dưới dạng vectơ-ma trận, hệ (2.10) viết được:

$$\ddot{y} = Ay + bu(t) \tag{2.14}$$

trong đó:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{2n+1} \\ y_{2n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \dot{\varphi}_n \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\omega_n^2 & 1 \end{bmatrix} ; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Như ở [1], để chứng minh tính điều khiển được của hệ, cần kiểm tra hai tính chất sau:

1. Phương trình $\det(A - \lambda E) = 0$ chỉ có nghiệm với phần thực không dương (E — ma trận đơn vị)

2. Định thức $\Delta = | B. \ AB, A^2B, \ldots, A^{2n+1}B | \neq 0$

Điều kiện thứ nhất là hiển nhiên vì:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 \prod_{i=1}^{n} (\lambda^2 + \omega_i^2) \tag{2.16}$$

Điều kiện thứ hai, nhờ các quy tắc tính định thức quen biết, đưa về định thức Vandecmôn và dẫn đến yêu cầu các tần số riêng của hệ phải khác biệt nhau:

$$\Delta = |B, AB, A^2B, \dots, A^{2n+1}B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_1^2 & \dots & 0 & (-1)^n\omega_1^{2n} \\ 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \dots & (-1)^n\omega_1^{2n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_n^2 & \dots & 0 & (-1)^n\omega_n^{2n} \\ 1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & \dots & (-1)^n\omega_n^{2n} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^4 & \dots & (-1)^n\omega_1^{2n} & & & & \\ -\omega_2^2 & \omega_2^4 & \dots & (-1)^n\omega_2^{2n} & & & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ -\omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & (-1)^n\omega_n^{2n} & & & & \\ & & & & -\omega_1^2 & \omega_1^4 & \dots & (-1)^n\omega_1^{2n} \\ & 0 & & & -\omega_2^2 & \omega_2^4 & \dots & (-1)^n\omega_2^{2n} \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & -\omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & (-1)^n\omega_n^{2n} \end{vmatrix} \times (-1)^{n^2+1}$$

$$= (-1)^{n^2+1}(\omega_1^2 \dots \omega_n^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2n-2} \\ 1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (-1)^{n^2+1}(\omega_1^2 \dots \omega_n^2)^2 \left\{ \prod_{i<k} (\omega_k^2 - \omega_i^2) \right\}^2 \neq 0 \qquad (2.17)$$

§ 3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐIỀU KHIỂN CỰC NHANH

Ký hiệu p_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ – các biến liên hợp và thành lập hàm Haminton:

$$H = p_1 \dot{x} + p_2 u + \sum_{i=1}^{n} [p_{2i+1}\dot{\varphi}_i + p_{2i+2}(-\omega_i^2\varphi_i + u)] \qquad (3.1)$$

Hệ phương trình liên hợp ta:

$$\dot{p}_1 = 0,\ \dot{p}_2 = -p_1,$$

$$\dot{p}_{2i+1} = \omega_i^2 p_{2i+2},\ \dot{p}_{2i+2} = -p_{2i+1},\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Theo nguyên lý Pôntriaghin [2] điều khiển cực nhanh có dạng:

$$u(t) = \begin{cases} +1 \text{ khi } P(t) = P_2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i+2} > 0 \\ -1 \text{ Khi } P(t) = P_2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i+2} < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Hay, sau khi tích phân hệ (3.2):

$$u(t) = \begin{cases} +1 \text{ khi } P(t) = Ct + D - \sum_{i=1}^{n} E_i \sin \omega_i (t + \xi_i) > 0 \\ -1 \text{ khi } P(t) = Ct + D - \sum_{i=1}^{n} E_i \sin \omega_i (t + \xi_i) < 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

trong đó: C, D, E_i, ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — các hằng số chưa xác định.

Như thế, điều khiển cực nhanh là hàm luân hoán có giá trị $+1$ và -1; thời điểm chuyển trị là giao điểm của đường thẳng $Ct + D$ và đường $\sum_{i=1}^{n} E_i \sin \omega_i (t + \xi_i)$.

Hơn nữa, ở bài toán này, còn có tính chất sau: Điều khiển cực nhanh có tâm đối xứng tại $t = T/2$ nghĩa là;

$$u(t) = -u(T - t) \tag{3.5}$$

và tại đó thỏa mãn các hệ thức sau:

$$x(T/2) = a/2 \ (3.6a);\ \varphi_i(T/2) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.6b}$$

Thực vậy, gọi $u(t)$ là điều khiển cực nhanh, chúng ta có:

$$v(T) = \int_0^T u(\tau)\, d\tau = 0;\ x(T) = \int_0^T \left(\int_0^t u(\tau)\, d\tau \right) dt = a; \tag{3.7}$$

$$\varphi_i(T) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^T u(\tau) \sin \omega_i (T - \tau)\, d\tau = 0;$$

$$\dot{\varphi}_i(T) = \int_0^T u(\tau) \cos \omega_i (T - \tau)\, d\tau = 0;\ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.8}$$

Các hệ thức (3.8) có thể viết thành:

$$\sin \omega_i T \int_0^T u(\tau) \cos \omega_i \tau \, d\tau - \cos \omega_i T \int_0^T u(\tau) \sin \omega_i \tau \, d\tau = 0, \quad (3.9)$$

$$\cos \omega_i T \int_0^T u(\tau) \cos \omega_i \tau \, d\tau + \sin \omega_i T \int_0^T u(\tau) \sin \omega_i \tau \, d\tau = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Từ đó suy ra:

$$\int_0^T u(\tau) \cos \omega_i \tau \, d\tau = 0, \int_0^T u(\tau) \sin \omega_i \tau \, d\tau = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (3.10)$$

Xét điều khiển $-u(T-t)$, đối xứng của điều khiển $u(t)$ qua tâm đối xứng $t = T/2$. Chúng ta có:

$$\int_0^T [-u(T-\tau)] d\tau = -\int_0^T u(z) \, dz = 0. \quad (3.11)$$

$$\int_0^T \left(\int_0^t [-u(T-\tau)] \, d\tau \right) dt = \int_0^T \left(\int_T^{T-t} u(z) \, dz \right) dt = \int_0^T \left(\int_0^T u(z) \, dz + \right.$$

$$\left. + \int_T^{T-t} u(z) \, dz \right) dt = \int_0^T \left(\int_0^{T-t} u(z) \, dz \right) dt = \int_0^T \left(\int_0^{\sigma} u(z) \, dz \right) d\sigma =$$

$$= \int_0^T \left(\int_0^t u(\tau) \, d\tau \right) dt = a. \quad (3.12)$$

Mặt khác, chú ý đến các hệ thức (3.10), chúng ta có:

$$\int_0^T [-u(T-\tau)] \sin \omega_i (T-\tau) \, d\tau = -\int_0^T u(z) \sin \omega_i z dz = 0, \quad (3.13)$$

$$\int_0^T [-u(T-\tau)] \cos \omega_i (T-\tau) \, d\tau = -\int_0^T u(z) \cos \omega_i z dz = 0. \quad (3.14)$$

Vậy điều khiển $-u(T-t)$ có cùng tác dụng như điều khiển $u(t)$ (cùng thời gian điều khiển, cùng trạng thái đầu và cuối). Để không mâu thuẫn với tính duy nhất của điều khiển cực nhanh hệ thức (3.5) phải thỏa mãn.

Chú ý rằng:

$$\int_{T/2}^T \left(\int_0^t u(\tau) \, d\tau \right) dt = \int_0^{T/2} \left(\int_0^{T-\sigma} u(\tau) \, d\tau \right) d\sigma =$$

$$= \int_0^{T/2}\left(\int_0^{T-\sigma} u(\tau)\,d\tau - \int_0^{T} u(\tau)\,d\tau\right)d\sigma =$$

$$= -\int_0^{T/2}\left(\int_{T-\sigma}^{T} u(\tau)\,d\tau\right)d\sigma = \int_0^{T/2}\left(\int_0^{t} u(\tau)\,d\tau\right)dt. \qquad (3.15)$$

Từ đó suy ra (3.6a) :

$$x(T/2) = \int_0^{T/2}\left(\int_0^{t} u(\tau)\,d\tau\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{T}\left(\int_0^{t} u(\tau)\,d\tau\right)dt = \frac{a}{2}$$

Tương tự, chú ý rằng :

$$\frac{1}{\omega_i}\int_{T/2}^{T} u(\tau)\sin\omega_i\left(\frac{T}{2} - \tau\right)d\tau = \frac{1}{\omega_i}\int_{T/2}^{T} u(T-\tau)\sin\omega_i\left(-\frac{T}{2} + \tau\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega_i}\int_0^{T/2} u(z)\sin\omega_i\left(\frac{T}{2} - z\right)dz = \varphi_i\left(\frac{T}{2}\right). \qquad (3.16)$$

Từ đó, trên cơ sở các hệ thức (3.10), suy ra (3.6b) :

$$\varphi_i\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2\omega_i}\left\{\int_0^{T/2} u(\tau)\sin\omega_i\left(\frac{T}{2} - \tau\right)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{T/2}^{T} u(\tau)\sin\omega_i\left(\frac{T}{2} - \tau\right)d\tau\right\} =$$

$$\frac{1}{2\omega_i}\int_0^{T} u(\tau)\sin\omega_i\left(\frac{T}{2} - \tau\right)d\tau = \frac{1}{2\omega_i}\left\{\sin\omega_i\frac{T}{2}\int_0^{T} u(\tau)\cos\omega_i\tau\,d\tau - \right.$$

$$\left. - \cos\omega_i\frac{T}{2}\int_0^{T} u(\tau)\sin\omega_i\tau\,d\tau\right\} = 0$$

§4. BÀI TOÁN KHỞI ĐỘNG CỰC NHANH

Bài toán này yêu cầu xác định điều khiển để trong khoảng thời gian cực tiểu cần tìm, hệ chuyển từ trạng thái cân bằng ban đầu tới trạng thái tịnh tiến với vận tốc cho trước. Đối ngẫu là bài toán khởi động với vận tốc cực đại.

Hệ phương trình vi phân chuyển động là :

$$\dot{v} = u(t);\ \ddot{\varphi}_i + \omega_i^2\varphi_i = u(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4,1)$$

Các điều kiện đầu và cuối là:

$$t = 0;\ v(o) = 0,\ \varphi_i(o) = \dot{\varphi}_i(o) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

$$t = T;\ v(T) = V^*,\ \dot{\varphi}_i(o) = \varphi_i(o) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.3}$$

Trong đó: V^* — vận tốc tịnh tiến tại trạng thái cuối.

Dưới dạng vecto-ma trận, hệ (4.1) cũng có dạng như (2.15) trong đó bỏ yếu tố đầu của các vecto y và b, dòng đầu và cột đầu của ma trận A.

Tính điều khiển được của hệ đã chứng minh trong [1].

Biến liên hợp pi không còn có mặt, hàm Haminton và hệ phương trình liên hợp là

$$H = P_2 u + \sum_{i=1}^{n} \left[P_{2i+1}\varphi_i + P_{2i+2}(-\omega_i^2\varphi_i + u) \right], \tag{4.4}$$

$$\dot{P}_2 = 0,\quad \dot{P}_{2i+1} = \omega_i^2 P_{2i+2},\quad \dot{P}_{2i+2} = -P_{2i+1} \tag{4.5}$$

Theo nguyên lý Pôntriaghin, điều khiển cực nhanh có dạng:

$$u(t) = \begin{cases} +1 \text{ khi} & P(t) = p_2 + \sum_{i=1}^{n} P_{2i+1} > 0 \\ -1 \text{ khi} & P(t) = p_2 + \sum_{i=1}^{n} P_{2i+2} < 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

hay, sau khi tích phân hệ (4.5):

$$u(t) = \begin{cases} +1 \text{ khi} & P(t) = D - \sum_{i=1}^{n} E_i \cos\omega_i(t + \xi_i) > 0 \\ -1 \text{ khi} & P(t) = D - \sum_{i=1}^{n} E_i \cos\omega_i(t + \xi_i) < 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

trong đó: D, E_i; ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — các hằng số chưa xác định.

Như thế, điều khiển cực nhanh là hàm luân hoán có giá trị +1 và −1, các điểm chuyển trị là giao điểm của đường nằm ngang D và đường $\sum_{i=1}^{n} E_i \cos\omega_i(t + \xi_i)$.

Hơn nữa, điều khiển cực nhanh ở bài toán này còn có những tính chất sau: Điều khiển cực nhanh có trục đối xứng $t = T/2$ nghĩa là: $u(t) = u(T - t)$ (4.8)
và thỏa mãn các hệ thức:

$$v\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{V^*}{2},\quad \dot{\varphi}_i\left(\frac{T}{2}\right) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.9}$$

Chứng minh tương tự như đối với bài toán dời chuyển cực nhanh.

Hệ phương trình vi phân chuyển động của bài toán điều khiển cực nhanh hệ nhiều con lắc đã được đưa về dạng đơn giản và nhờ đó đã chứng minh được tính điều khiển được và tính đối xứng của điều khiển cực nhanh.

Địa chỉ:
Trường Đại học Bách khoa HN

Nhận ngày 5/3/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., АКУЛЕНКО Л. Д., СОКОЛОВ Б. Н. Управление колебаниями, Наука, М., 1980.
2. ПОНТРЯГИН Л.О., БОЛТЯНСКИЙ Б. Г., ГАМКРЕЛИДЗЕ Р. В., МИЩЕНКО Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* Гостехиздат, М. 1961.

РЕЗЮМЕ
О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ МАЯТНИКОВ

В данной статье рассматриваются некоторые задачи оптимального быстрого управления системой маятников. Были выведены уравнения движения в простом виде. Доказано существование оптимального управления и свойства периодичности и симметричности.

THÀNH LẬP PHÂN HỘI
CƠ HỌC ĐẠI CƯƠNG VÀ ỨNG DỤNG

Nhân dịp kỷ niệm mười năm thành lập Xêmine cơ học Đại cương, được phép của Ban chấp hành trung ương Hội cơ học Việt nam, Ban chủ trì Xemine đã tổ chức đại hội thành lập Phân hội cơ học đại cương và ứng dụng. Sau khi thảo luận sôi nổi về phương hướng và nội dung hoạt động của phân hội, đại hội đã bầu ra ban chấp hành phân hội gồm các đồng chí: Nguyễn Thúc An, Lê Xuân Cận, Phan Nguyên Di, Nguyễn Văn Đạo, Nguyễn Quỳnh Giao, Lê Doãn Hồng, Đỗ Trọng Hùng, Nguyễn Xuân Hùng (Phó chủ tịch), Phạm Huyễn (chủ tịch), Nguyễn Huy Kim, (phó chủ tịch) Phan Lê, Nguyễn Đức Lộc, Nguyễn Cao Mệnh, Trịnh Văn Nhân, Trần Tiến Phương, Nguyễn Thị Ngọc Quyên, Đỗ Sanh (Thư ký).