Tạp chí Cơ Học T.IX 1987, số 4 (trang 25-31)

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ TÍNH TOÁN ĐỘNG ĐẤT

TRẦN VĂN LIÊN

§ 1. MỞ ĐẦU

Nghiên cứu động đất và tính toán kháng chấn cho các công trình xây dựng bao gồm ba vấn đề cơ bản sau :

1. Vấn đề địa chấn : nghiên cứu vị trí nguồn, độ sâu và magnhituda của nó, nghiên cứu đánh giá trường chấn động, tần suất lặp lại dao động động đất v.v...

2. Vấn đề địa chất công trình : đánh giá mức tác động động đất tùy theo từng điều kiện nền đất, phân vùng và vi phân vùng động đất, đánh giá các thông số dao động (chu kỳ trội, độ kéo dài dao động mạnh, các biên độ dao động v.v...)

3. Vấn đề xây dựng chống động đất : nghiên cứu, đánh giá tác động động đất lên các công trình xây dựng, các giải pháp kiến trúc, kết cấu, cấu tạo để kháng chấn v.v...

Để giải quyết các vấn đề này, cần có các băng ghi dao động động đất ghi được theo các phương khác nhau sau mỗi trận động đất, đặc biệt các băng ghi gia tốc dao động động đất. Đó là các thông tin cơ bản và quan trọng nhất để nghiên cứu đặc tính nguồn, đặc trưng dao động nền đất và đặc trưng tác động động đất lên các công trình xây dựng [1, 2, 4]. Trong trường hợp các máy ghi địa chấn chỉ ghi được các dịch chuyển của nền đất trong động đất thì việc khôi phục lại các giản đồ vận tốc và gia tốc dao động động đất được đặt ra hết sức cần thiết và cấp bách.

Trong bài này, chúng tôi đặt bài toán khôi phục lại các băng ghi vận tốc, gia tốc dao động động đất từ các băng ghi dịch chuyển ghi nhận được dưới dạng bài toán không ổn định nghiệm. Sau khi nghiên cứu một số tính chất cần thiết, có nêu phương pháp giải và ví dụ giải trên máy tính điện tử để minh họa hiệu lực của phương pháp so với các phương pháp nội suy khác đã biết.

§ 1. ĐẶT BÀI TOÁN

Bài toán xây dựng lại các giản đồ vận tốc, gia tốc từ các băng ghi dịch chuyền của nền đất trong động đất là một bài toán không ổn định nghiệm. Điều đó có nghĩa là chỉ cần một sự thay đổi nhỏ trong thành phần của thông tin vào cũng dẫn đến sự thay đổi rất lớn không thể chấp nhận được của nghiệm. Cần phải nhấn mạnh rằng tính chất không ổn định này có liên quan đến bản chất toán học của phép lấy vi phân và cả bản chất của sai số (nhiễu) trong thành phần của số liệu vào. Vì vậy việc áp dụng các phương pháp lấy đạo hàm xấp xỉ không cho nghiệm ổn định [5].

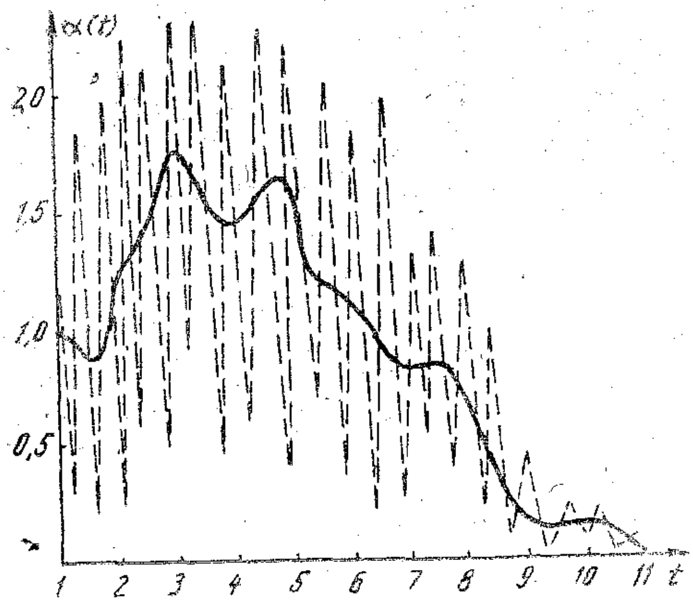
Ví dụ 1 : Tín hiệu thu được $x_\delta(t)$ gồm tín hiệu thực $x_t(t)$ và tạp âm $u(t) = N\sin\omega t$. Độ lệch thông tin vào δ là nhỏ :

$$\max_{t\in[o,T]} |x_\delta(t) - x_t(t)| = \max_{t\in[o,T]} |u(t)| = |N| \leqslant \delta$$

Tuy vậy sai số của phép lấy đạo hàm là :

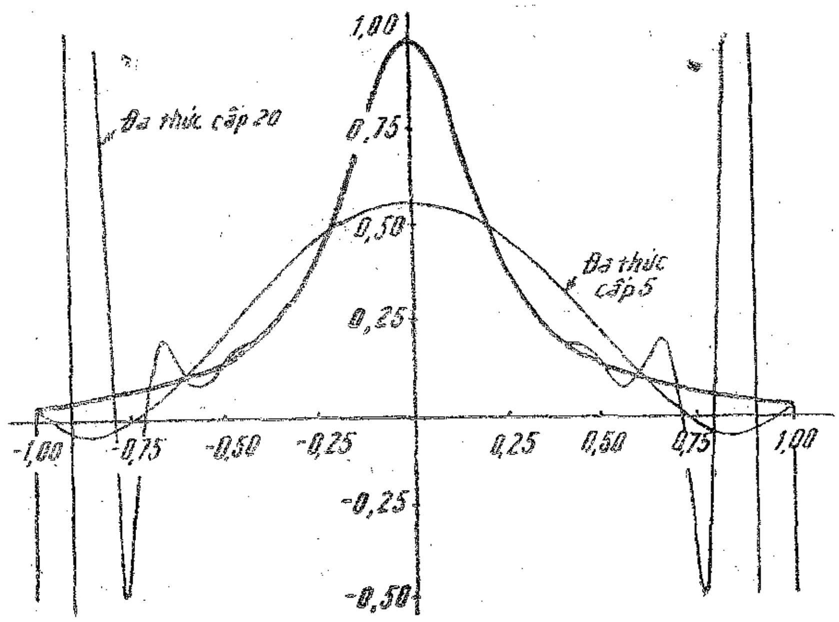
$$\max_{t\in[o,T]}\left|\frac{d^2x_\delta(t)}{dt^2}-\frac{d^2x_t(t)}{dt^2}\right| = \max_{t\in[o,T]}\left|-N\omega^2\sin\omega t\right| = |N|\cdot\omega^2$$

lại rất lớn khi ω có giá trị đủ lớn (Hình 1).



Hình 1

Ví dụ 2. Việc dùng đa thức nội suy Lagrăng để tính nội suy hàm số từ các điểm rời rạc và tính đạo hàm của có sẽ gặp sai số lớn. Ví dụ khi nội suy và tính đạo hàm của hàm Runge [3] $y = 1/(1 + 25x^2)$ với $x\in[-1,1]$ khi cấp đa thức nội suy n tăng lên thì sai số tuyệt đối dần ra ∞ khi $|x| \geqslant 0,726$ (Hình 2)



Hình 2

Bài toán xây dựng lại các giản đồ vận tốc, gia tốc từ các băng ghi dịch chuyền có thể đặt ra như sau :

1. Vận tốc $v(t)$ và gia tốc $a(t)$ liên hệ với dịch chuyển $u(t)$ theo các hệ thức :

$$v(t) = \frac{d}{dt} u(t) ; \ a(t) = \frac{d^2}{dt^2} u(t) \tag{1.1}$$

2. Trong thành phần dịch chuyền $u_\delta(t)$ của đất chứa các tin hiệu thực $u_T(t)$ và phần nhiễu với độ sai lệch $\delta > 0$:

$$\| u_\delta(t) - u_T(t) \| \leqslant \delta \tag{1.2}$$

trong đó $\| . \|$ là chuẩn độ lệch trung bình bình phương. Khi thể hiện rời rạc trên máy tinh điện tử thay cho (1.2) có :

$$\sum_{k=1}^{N} [u_\delta(t_k) - u_T(t_k)]^2 \leqslant \delta^2 \tag{1.3}$$

Bài toán đặt ra là tìm nghiệm xấp xỉ $v(t)$, $a(t)$ với nghiệm chính xác $v_T(t)$, $a_T(t)$ có tính chất ổn định nghiệm với sự thay dổi nhỏ của $u_\delta(t)$ và khi $\delta \to 0$ thì nghiệm xấp xỉ thu được phải hội tụ về nghiệm chính xác $v_T(t)$, $a_T(t)$ thông qua một tiêu chuẩn chọn nghiệm nào đó. Tiêu chuẩn chọn nghiệm xấp xỉ ồn dinh phải dựa vào ý nghĩa toán học vật lý, kinh tế, v.v... của bài toán để tìm nghiệm ổn định trong vô số các nghiệm khả dĩ. Ở đây tiêu chuẩn chọn nghiệm đặt ra như sau :

3. Dao động động đất là một sự giải phóng năng lượng lớn hữu hạn, vận tốc và gia tốc dao động động đất là có tồn tại thực và có thề ghi nhận được. Về mặt toán học $u(t)$ cần được xem là hàm có đạo hàm liên tục tới cấp 2 trong khoảng thời gian ghi nhận được

$$u(t) \in C^2[o, T] \tag{1.4}$$

§ 2. GIẢI BÀI TOÁN

Trong [5] trình bày lời giải tổng quát cho bài toán không ổn định nghiệm trên không gian Hinbert rất phức tạp và không tiện lợi áp dụng thực tế. Dưới đây, xuất phát từ ý nghĩa vật lý thực tế của bài toán sẽ trình bày một lời giải ngắn gọn và đơn giản hơn. Việc giải bài toán được tiến hành như sau :

1. Trên mỗi đoạn $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n}$, gia tốc dao động động đất được xấp xỉ tuyến tính và hàm nội suy dịch chuyền được chọn theo tiêu chuẩn chọn (1.1), (1.2), (1.4) và phải có dạng đơn giản nhất.

2. Đưa vào thông số thay đồi α để thông qua nó có thể đạt được nghiệm ổn định $v_\delta^\alpha(t)$, $a_\delta^\alpha(t)$ trong số các nghiệm khả dĩ sao cho sự sai lệch kết quả phải tương đương với độ sai lệch của thông tin vào ban đầu.

Để nghiên cứu ảnh hưởng của phép lấy vi phân đến sự ổn định nghiệm ta xét trường hợp $\delta = 0$ (tức là trường hợp thông tin ban đầu không có sai số). Nhận xét thấy trên băng ghi dao động thường chọn điểm đầu và điểm cuối băng ghi tương ứng với các dao động rất yếu tức là có thể chọn điều kiện :

$$\ddot{u}(o) = \ddot{u}(T) = 0 \tag{2.1}$$

Trên $[t_{i-1}, t_i]$, chọn gia tốc dao động đất $a(t)$ có dạng tuyến tính :

$$a(t) = \ddot{u}(t) = \sigma_{i-1} \frac{t_i - t}{h_i} + \sigma_i \frac{t - t_{i-1}}{h_i} \tag{2.2}$$

với

$$h_i = t_i - t_{i-1} ; \ \sigma_k = \ddot{u}(t_k),$$

lấy tích phân hai lần ta có :

$$u(t) = \sigma_{i-1}\frac{(t_i - t)^3}{6h_i} + \sigma_i\frac{(t - t_{i-1})^3}{6h_i} + A\frac{t_i - t}{h_i} + B\frac{t - t_{i-1}}{h_i} \quad (2.3)$$

$$v(t) = \dot{u}(t) = -\sigma_{i-1}\frac{(t_i - t)^2}{2h_i} + \sigma_i\frac{(t - t_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} - h_i\frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{6} \quad (2.4)$$

trong đó A, B được xác định từ điều kiện (1.2) tại $t = t_{i-1}, t_i$:

$$A = u_{i-1} - \sigma_{i-1}h_i^2/6\,;\quad B = u_i - \sigma_i h_i^2/6.$$

Sử dụng điều kiện (1.4) đòi hỏi $v(t) = \dot{u}(t)$ liên tục tại $t_i(i = \overline{1, n-1})$ và điều kiện biên (2.1) thu được hệ phương trình

$$A\sigma = Hu_T \quad (2.5)$$

trong đó : $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})^T$; $u_T = (u_1, \ldots, u_{n-1})^T$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \ldots & . & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \ldots & . & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3 + h_4}{3} & \ldots & . & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1} + h_n}{3} \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & \left(-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & . & . & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \left(-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \left(-\frac{1}{h_{n-1}} - \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Vì ma trận A đối xứng và có đường chéo chính trội thực sự nên A là ma trận xác định dương, do đó hệ (2.5) có nghiệm duy nhất : $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$

Xét phiếm hàm :

$$F(g) = \int_0^T |\ddot{g}(\tau)|^2 d\tau \quad (2.7)$$

trong lớp các hàm có tồn tại đạo hàm cấp hai bình phương khả tích và thỏa mãn điều kiện (1.2) với $\delta = 0$:

Khi đó

$$F(g-u) = \int_0^T |\ddot{g} - \ddot{u}|^2 dt = F(g) - F(u) - 2[(\dot{g} - \dot{u})\ddot{u}\Big|_0^T - \int_0^T (\dot{g} - \dot{u})\dddot{u}\, dt] =$$

$$= F(g) - F(u) - 2\sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\dot{g} - \dot{u})\dddot{u}\, dt$$

vì $\dddot{u}$ = const trên $[t_{i-1}, t_i]$ nên

$$F(g-u) = F(g) - F(u) - 2\sum_{k=1}^{N} C_k(g-u)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k} = F(g) - F(u)$$

Do đó : $F(u) = F(g) - F(g-u) \leqslant F(g)$

Như vậy hàm $u(t)$ xác định theo (2.4) làm cực tiểu phiếm hàm (2.7). Có thể định nghĩa $u(t)$ là hàm nhận giá trị tại các mốc t_k các giá trị cho trước và làm cực tiểu (2.7). Xét trường hợp các giá trị tại các mốc t_k không chính xác mà có một sai số δ nào đó $(\delta > 0)$. Trong trường hợp này, việc xây dựng hàm tại các mốc t_k nhận giá trị đủ gần các giá trị đã cho với một dáng điệu đủ hơn cho sai số trung bình là bé nhất sẽ có ý nghĩa thực tế. Hàm $u(t)$ làm cực tiểu (2.7) và có ràng buộc (1.3) có thể đưa về bài toán cực trị tự do:

$$F_\alpha(u) = \int_0^T |\ddot{u}(t)|^2 dt + \alpha \sum_{k=1}^{N} [u(t_k) - u_k]^2 \to \min \qquad (2.8)$$

với tham số α xác định từ phương trình độ lệch ban đầu:

$$\varphi(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} [u^\alpha(t_k) - u_k]^2 = \delta^2 \qquad (2.9)$$

Áp dụng định lý Euler, sau một số biến đổi có được:

$$(A + \alpha HH^*)\sigma = Hu \qquad (2.10)$$

Sau cùng xác định các giá trị tại nút: $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{n-1})$ để xây dựng hàm xấp xỉ $u(t)$ theo (2.3):

$$\tilde{u} = u - H^*\sigma \qquad (2.11)$$

Ma trận của hệ (2.10) là ma trận năm đường chéo, đối xứng xác định dương nên có nghiệm duy nhất. Việc giải bài toán (2.9), (2.10), (2.11) rất phức tạp. Có hai cách giải quyết như sau:

1. Chọn $\alpha = \alpha^s = \alpha_0 q^s$ ở đây α_0, q là các tham số xác định căn cứ vào đặc điểm trường thông tin ban đầu. Giá trị $\alpha = \alpha_*^s$ chấp nhận được nếu (2.9) được thỏa mãn gần đúng.

2. Sử dụng phương pháp lặp Niutơn để tìm nghiệm gần đúng của (2.9).

Sau đó ứng với mỗi giá trị α, sử dụng biến đổi Householder [3,5] đưa hệ (2.10) về hệ ba đường chéo đối xứng và sử dụng phương pháp khử đuổi với số phép toán bằng cấp ma trận hệ (2.10) để giải.

Các công thức (2.2), (2.3), (2.4) cho phép xác định các giá trị xấp xỉ của dịch huyển vận tốc, gia tốc động đất tại các điểm không phải là điểm mốc đặc trưng $k(k = o, n)$ tức là nó cho phép chỉnh lý các số liệu từ các điểm đo đặc trưng về các iểm đo cách đều với bước Δt không thay đổi. Trong các bài toán xác định phản ứng ông trình, xây dựng mật độ phổ năng lượng, phổ tác động động đất v.v... thường chỉ ử dụng các số liệu đã được chỉnh lý :

§3. VÍ DỤ MINH HỌA

Nội suy và tính đạo hàm đến cấp hai của hàm Runge trên đoạn $[-1,1]$ theo các iá trị chính xác tại n điểm cách đều nhau $n = 100$. Thứ tự tính toán như sau :

1. Theo các giá trị hàm Runge được tính chính xác tại n điểm cách đều nhau tính ận tốc $v(t)$ (trường hợp $\delta = 0$)

2. Sai số giữa giá trị chính xác $v_T(t)$ và giá trị tính toán $v(t)$ là cơ sở để tính ia tốc $a(t)$ (trường hợp $\delta = 0$)

Bảng 1

Mốc	Giá trị chính xác		Giá trị tính toán	
	Vận tốc	Gia tốc	Vận tốc	Gia tốc
0.0	0.00	− 50.00	0.00	− 49.9786
0.1	− 3.20	− 6.40	− 3.19994	− 6.40937
0.2	− 2.50	12.50	− 2.50	12.5013
0.3	− 1.42012	8.37506	− 1.42012	8.37532
0.4	− 0.80	4.40	− 0.799999	4.40001
0 5	− 0.475624	2.32892	− 0.475624	2.32891
0.6	− 0.30	1.30	− 0.30000	1.29999
0.7	− 0.199359	0.768420	− 0.199359	0.768418
0.8	− 0.138408	0.478323	− 0.138408	0.478321
0.9	− 0.0996540	0.311337	− 0.0996539	0.311331
1.0	− 0.0739845	0.210514	− 0 0739320	0.209487

Bảng 1 dẫn ra các giá trị tính toán tại 11 điểm nút cách đều nhau, sai số tương đối của vận tốc, gia tốc là :

$$\max_{t\in[-1,1]} \frac{|v_T(t) - v(t)|}{|v_T(t)|} = \frac{0,000282164}{3,2} = 0,009\%$$

$$\max_{t\in[-1,1]} \frac{|a_T(t(- a(t)|}{|a_T(t)|} = \frac{0,021368}{50} = 0,04274\%$$

§4. KẾT LUẬN

1. Việc đặt bài toán khôi phục lại các băng ghi vận tốc, gia tốc dao động động tất từ các băng ghi dịch chuyển ghi nhận được trong các trận động đất dưới dạng bài toán không ổn định nghiệm đã cho phép tìm được nghiệm ổn định duy nhất xấp xỉ tốt

với nghiệm thực và loại bỏ được những sai số lớn thường gặp phải khi giải bài toán bằng các phương pháp khác. Kiến nghị phương pháp giải bài toán ngắn gọn và thuận tiện cho lập chương trình trên máy tính điện tử. Ví dụ minh họa cho thấy độ chính xác cao của nghiệm tìm được. Đồng thời cũng xây dựng được phương pháp chỉnh lý các số liệu từ các điểm đo đặc trưng và các điểm bất kỳ theo yêu cầu.

3. Các kết quả xử lý số liệu và các giản đồ thu được là cơ sở để giải các bài toán khác nhau trong nghiên cứu động đất và tính toán kháng chấn cho các công trình xây dựng như: xây dựng các mô hình dao động động đất, xác định mật độ phổ năng lượng và phổ tác động động đất lên công trình v.v...

Địa chỉ
Viện Khoa học kỹ thuật xây dựng cơ bản

Nhận ngày 4/10/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. CLOUGH R. W., PENZIEN J. Dynamic of structures, New York, 1975.
2. NEWMARK N. M., ROSENBLUETH E. Fundamentals of Earthquake Engineering. New York, 1971.
3. FORSYTHE G. E, MALCOLM M. A. Computer methods for mathematical computations. N. Y., 1977.
4. ЗАВРИЕВ К. С. НАЗАРОВ А. Г. и другие. Основы теории сейсмостойкости зданий и сооружений. Руководство по проектированию зданий и сооружений. Т. 2., стройиздат, М., 1970.
5. ТИХОНОВ А. Н., АРСЕНИЙ В. Я. Методы решения некорректных задач. Наука М., 1979.

SUMMARY

SOME MOMENTS IN EARTHQUAKE ENGINEERING

In this article the author intends to put a problem of rebuilding accelerogram and velocegram from the displacement records of the last earthquakes in the form of the ill-conditioned problem. Solving this problem we may find the unique solution higsly approximated the exact solution and stable to random errors of the input dates. The high exactness of the found solution will be showed by the example in this article.

The accelerogram and velocegram found by this way are the base for solving the other problems in earthquake engineering.