Tạp chí Cơ học T.IX, 1987 số 4 (trang 17 — 24)

# THU NHẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH BOUSSINESQ VÀ PHƯƠNG TRÌNH KORTEWEG – DE VRIES TỔNG QUÁT MÔ TẢ SỰ LAN TRUYỀN SÓNG TRÊN SÔNG CÓ TÍNH ĐẾN BIẾN DẠNG ĐÁY

LÊ THẾ HÙNG, PHẠM HÙNG

Trong bài này chúng tôi thu nhận hệ phương trình Boussinesq và phương trình Korteweg — De Vries tổng quát mô tả sự lan truyền của các sóng phi tuyến trên sông có tính đến biến dạng đáy. Với giả thiết rằng tỷ số giữa độ sâu trung bình và độ dài bước sóng đặc trưng, biên độ đặc trưng và độ sâu trung bình, lưu lượng bùn cát và lưu lượng thủy lực đặc trưng là các đại lượng vô cùng nhỏ, xuất phát từ hệ phương trình cơ bản mô tả chuyển động có thế của chất lỏng lý tưởng không nén được và phương trình vận chuyển bùn cát, đã thu nhận được hệ phương trình Boussinesq và phương trình Korteweg — De Vries tổng quát với độ chính xác bậc nhất theo các tham số nhỏ nói trên.

Trong trường hợp đáy cứng, phẳng, từ hệ phương trình tổng quát đã thu nhận lại hệ phương trình Borssinesq và phương trình Korteweg — De Vries cổ điển.

## § 1. TRƯỜNG HỢP CHUNG

Hệ phương trình cơ bản và các điều kiện biên, mô tả chuyển động có thế của chất lỏng lý tưởng, không nén được có dạng như sau [4]:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0;\ Z(x, t) < y < \eta(x, t), \tag{1.1}$$

$$\eta_t + \eta_x \cdot \varphi_x - \varphi_y = 0;\ y = \eta(x, t), \tag{1.2}$$

$$z_t + z_x \cdot \varphi_x - \varphi_y = 0;\ y = Z(x, t), \tag{1.3}$$

$$g\eta + \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x)^2 + \frac{1}{2}(\varphi_y)^2 = 0;\ y = \eta(x, t). \tag{1.4}$$

Biến đổi của đáy được mô tả bởi phương trình [3]

$$z_t + Q_x = 0 \tag{1.5}$$

Giả thiết rằng:

$$Q = Q(\langle \varphi_x \rangle, h);\ h = \eta - Z \tag{1.6}$$

Trong đó:

$\varphi = \varphi(x, y, t)$ : thế của trường vận tốc

$\eta = \eta(x, t)$ : mặt thoáng của sông

$Z = Z(x, t)$ : mặt đáy của sông

$Q = Q(\langle \varphi_x \rangle, h)$ : lưu lượng bùn cát, là hàm số đã biết.

$$\langle \varphi_x \rangle = \frac{1}{\eta - z}\int_z^{\eta} \varphi_x dy \quad : \text{vận tốc trung bình.}$$

chỉ số x, y, t đứng sau các hàm số dùng để chỉ đạo hàm riêng theo các biến này.

Hệ (1.1), (1.6) được đưa về dạng không thứ nguyên như sau : gọi $l_o$ là độ dài ước sóng đặc trưng, $h_o$ là độ sâu trung bình, $Q_o$ là lưu lượng bùn cát đặc trưng, hi đó :

$$x = l_o \cdot x' \;;\; y = h_o \cdot y';\; t = \frac{l_o}{\sqrt{gh_o}} \cdot t';\; \varphi = l_o \sqrt{gh_o}\varphi';$$

$$Q = Q_o \cdot Q';\; \eta = h_o \cdot \eta';\; h = h_o \cdot h';\qquad z = h_o \cdot z' \tag{1.7}$$

Thế (1.7) vào (1.1), (1.6) bỏ qua dấu (') chỉ các đại lượng không thứ nguyên a có :

$$\beta\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \;;\; z(x, t) < y < \eta(x, t), \tag{1.8}$$

$$\beta(\eta_t + \eta_x \cdot \varphi_x) - \varphi_y = 0 \;;\; y = \eta(x, t), \tag{1.9}$$

$$\beta(z_t + z_x \cdot \varphi_x) - \varphi_y = 0 \;;\; y = Z(x, t), \tag{1.10}$$

$$\beta\left(\eta + \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x)^2\right) + \frac{1}{2}(\varphi_y)^2 = 0 \;;\; y = \eta(x, t), \tag{1.11}$$

$$Z_t + \mu \cdot Q_x = 0, \tag{1.12}$$

$$Q = Q(\langle \varphi_x \rangle, h). \tag{1.13}$$

trong đó

$$\beta = (h_o/l_o)^2 \;;\; \mu = Q_o/h_o \cdot \sqrt{gh_o}\,. \tag{1.14}$$

Giả thiết rằng :

$$\beta \ll 1 \tag{1.15}$$

Nghiệm của (1.8) được tìm dưới dạng sau :

$$\varphi = \varphi^o + \beta\varphi^1 + \beta^2\varphi^2 + \ldots \tag{1.16}$$

Thế (1.16) vào (1.8), nhóm các số hạng có cùng bậc $\beta$, ta thu được các phương trình sau :

$$\varphi^o_{yy} = 0, \tag{1.17}$$

$$\varphi^o_{xx} + \varphi^1_{yy} = 0, \tag{1.18}$$

$$\varphi^1_{xx} + \varphi^2_{yy} = 0, \tag{1.19}$$

. . . . . . . .

Thế (1.16) vào các điều kiện biên (1.9), (1.10), (1.11), ta thu được :

$$(\varphi^o_y)_{y=\eta} = (\varphi^o_y)_{y=z} = (\varphi^o_y)^2_{y=\eta} = 0. \tag{1.20}$$

Từ (1.17) ÷ (1.20) dễ thấy rằng :

$$\varphi^o = \varphi^o(x, t) \tag{1.21}$$

Nghiệm của hệ (1.17) ÷ (1.19) có cấu trúc như sau:

$$\varphi^1 = -\frac{\varphi^o_{xx}}{2!} \cdot y^2 - a^{11} \cdot y + a^{12}, \tag{1.22}$$

$$\varphi^2 = \frac{\varphi^o_{(4)}}{4!} \cdot y^4 - \frac{a^{11}_{xx}}{3!} \cdot y^3 - \frac{a^{12}_{xx}}{2!} \cdot y^2 + a^{21} \cdot y + a^{22}, \tag{1.23}$$

$$\varphi^3 = -\frac{\varphi^o_{(6)}}{6!} \cdot y^6 + \frac{a^{11}_{(4)}}{5!} \cdot y^5 + \frac{a^{12}_{(4)}}{4!} \cdot y^4 - \frac{a^{21}_{xx}}{3!} \cdot y^3 - \frac{a^{22}_{xx}}{2!} \cdot y^2 + a^{31} \cdot y + a^{32} \tag{1.24}$$

$$\varphi^4 = \frac{\varphi^{\circ}_{(8)}}{8!} \cdot y^8 - \frac{a^{11}_{(6)}}{7!} \cdot y^7 - \frac{a^{12}_{(6)}}{6!} \cdot y^6 + \frac{a^{21}_{(4)}}{5!} \cdot y^5 - \frac{a^{22}_{(4)}}{4!} \cdot y^4 - \frac{a^{31}_{xx}}{3!} \cdot y^3 -$$
$$- \frac{a^{32}_{xx}}{2!} y^2 + a^{41} \cdot y + a^{42} \qquad (1.25)$$

**trong đó** $a^{ij}$ là các hàm số chưa biết của x, t ; ký hiệu $F_{(m)}$ dùng để chỉ phép lấy đạo hàm theo x, m lần. Ta đưa vào các hàm số sau :

$$f(x, t) \equiv \varphi^{\circ} + \beta a^{12} + \beta^2 a^{22} + \ldots = \varphi^{\circ} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k a^{k,2} \qquad (1.26)$$

$$S(x, t) \equiv a^{11} + \beta a^{21} + \beta^2 a^{31} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k a^{k+1,1} \qquad (1.27)$$

Từ (1.26), (1.27), dãy (1.16) có dạng :

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \beta^m \cdot y^{2m} \cdot f_{(2m)}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \cdot \beta^m \cdot y^{2m-1} \cdot S_{(2m-2)}}{(2m-1)!} \qquad (1.28)$$

Từ (1.28) dễ thấy rằng hàm $\varphi$ hoàn toàn xác định nếu biết f, S. Như vậy bài toán tìm $\varphi$, $\eta$, z đưa bài toán tìm f, S, $\eta$, Z là các hàm chưa biết theo x, t. Các hàm này được tìm ra từ các phương trình (1.9), (1.10), (1.11), (1.12).

Thế (1.28) vào (1.9), bỏ qua các số hạng bậc $O(\beta^2)$ ta thu được :

$$\eta_t + (\eta \cdot f_x)_x + \frac{\beta}{2} (\eta^2 \cdot S_x)_x - \frac{\beta}{6} (\eta^3 \cdot f_{xxx})_x - S + O(\beta^2) = 0. \qquad (1.29)$$

Tương tự, thế (1.28) vào (1.10), bỏ qua các số hạng bậc $O(\beta^2)$ ta có :

$$z_t + (z \cdot f_x)_x + \frac{\beta}{2} (z^2 \cdot S_x)_x - \frac{\beta}{6} (z^3 \cdot S_{xxx})_x - S + O(\beta^2) = 0. \qquad (1.30)$$

Khử S từ (1.29), (1.30), ta có :

$$(\eta - z)_t + ((\eta - z) \cdot f_x)_x + \beta \left( \left( \frac{\eta^2 - z^2}{2} (z_{xt} + (zf_x)_{xx}) \right)_x - \right.$$
$$\left. - \left( \frac{\eta^3 - z^3}{6} f_{xxx} \right)_x \right) + O(\beta^2) = 0. \qquad (1.31)$$

Thế (1.28) vào (1.11) ta thu được

$$\eta + f_t + \frac{1}{2} (f_x)^2 + \beta \left( - \frac{\eta^2}{2} \cdot f_{xxt} + \eta \cdot S_t - \frac{\eta^2}{2} f_x \cdot f_{xx} + \eta \cdot f_x \cdot S + \right.$$
$$\left. + \frac{\eta^2}{2} (f_{xx})^2 + \frac{S^2}{2} - \eta \cdot f_{xx} \cdot S \right) + O(\beta^2) = 0. \qquad (1.32)$$

Vận tốc trung bình có dạng :

$$u = \frac{1}{\eta - z} \int_z^{\eta} \varphi_x dy = f_x + \beta \left( - \frac{\eta^2 + \eta \cdot z + z^2}{6} \cdot f_{xxx} + \right.$$
$$\left. + \frac{z_{xt} + (zf_x)_{xx} \cdot (\eta + z)}{2} \right) + O(\beta^2) \qquad (1.33)$$

Phương trình vận chuyển bùn cát (1.12), với độ chính xác đến $O(\beta^2)$ có dạng :

$$z_t + \mu(F(u^\circ, h) \cdot u_x^\circ + G(u^\circ, h) \cdot h_x) + \mu\beta(F(u^\circ, h) \cdot u_x^1 + F_u(u^\circ, h) \cdot u^1 \cdot u_x^\circ + G_u(u^\circ, h) \cdot u^1 \cdot h_x) + O(\beta^2) = 0. \quad (1.34)$$

trong đó :

$$F(u^\circ, h) = Q_u(u^\circ, h)\,; \; G(u^\circ, h) = Q_h(u^\circ, h)\,; \quad (1.35)$$

$$u^\circ = f_x\,;\; u^1 = -\frac{\eta^2 + \eta z + z^2}{6} \cdot f_{xxx} + \frac{z_{xt} + (zf_x)_{xx}}{2} \cdot (\eta + z). \quad (1.36)$$

Hệ 4 phương trình (1.30), (1.31), (1.32), (1.34) lập thành hệ phương trình đóng kín đối với 4 ẩn số f, S, $\eta$, Z. Sau khi các hàm này được xác định, $\varphi$ được tìm từ (1.28) và u được tìm từ (1.33). Hệ phương trình (1.30), (1.31), (1.32) chính là hệ phương trình Boussinesq tổng quát, được giải cùng với phương trình vận chuyển bùn cát (1.34).

## §2. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP RIÊNG

### 2.1. CÁC SÓNG PHI TUYẾN CÓ BIÊN ĐỘ HỮU HẠN, LAN TRUYỀN TRÊN SÔNG CÓ ĐÁY CỨNG, PHẲNG

Coi $Z \equiv 0$, từ (1.30) ta thấy $S \equiv 0$

Phương trình (1.31) có dạng:

$$\eta_t + (\eta \cdot f_x)_x - \frac{\beta}{6}(\eta^3 \cdot f_{xxx})_x + O(\beta^2) = 0 \quad (2.1)$$

Phương trình (1.32) sau khi đạo hàm theo x, có dạng:

$$f_{xt} + \eta_x + f_x \cdot f_{xx} + \beta\left(-\frac{\eta^2}{2} \cdot f_{xxt} - \frac{\eta^2}{2} \cdot f_x f_{xx} + \frac{\eta^2}{2}(f_{xx})^2\right)_x + O(\beta^2) = 0, \quad (2.2)$$

$\varphi$ được tìm từ (1.28) và u từ (1.33)

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \beta^m \cdot y^{2m} f_{(2m)}}{(2m)!}, \quad (2.3)$$

$$u = f_x - \frac{\beta}{6} \cdot \eta^2 \cdot f_{xxx} + O(\beta^2). \quad (2.4)$$

### 2.2. CÁC SÓNG PHI TUYẾN CÓ BIÊN ĐỘ NHỎ, LAN TRUYỀN TRÊN SÔNG CÓ ĐÁY BIẾN ĐỔI CHẬM THEO THỜI GIAN

Ta đưa thêm giả thiết sau:

$$\alpha = \frac{a_o}{h_o} \ll 1, \text{ } a_o \text{ biên độ đặc trưng của sóng} \quad (2.5)$$

$$\mu = \frac{Q_o}{h_o \cdot \sqrt{gh_o}} \ll 1 \quad (2.6)$$

Ngoài ra, giả thiết rằng các kích động mặt thoáng, vận tốc và đáy là nhỏ bậc $\alpha$. Các kích động được xét ở lân cận trạng thái dừng có vận tốc bằng $\hat{u}$, mặt thoáng bằng 1 và mặt đáy bằng 0, tức là:

$$\eta = 1 + \alpha \cdot \tilde{\eta}, \tag{2.7}$$

$$z = \alpha \cdot \tilde{z}, \tag{2.8}$$

$$f = \hat{u} \cdot x + \alpha \tilde{f}, \tag{2.9}$$

$$S = \alpha \cdot \tilde{S}. \tag{2.10}$$

Thế (2.7), (2.8), (2.9) vào (1.31), bỏ qua các số hạng bậc bình phương của $\alpha$, $\beta$, $\mu$ hoặc bậc tích của chúng, ta có:

$$(\tilde{\eta} - \tilde{z})_t + \hat{u}(\tilde{\eta} - \tilde{z})_x + ((1 + \alpha(\tilde{\eta} - \tilde{z}))W)_x + \beta \cdot \left(\frac{\hat{u}}{2}\tilde{z}_{xxx} - \frac{1}{6}W_{xxx}\right) + \\ + 0(\alpha\beta, \mu\beta, \beta^2) = 0 \tag{2.11}$$

$$W \equiv \tilde{f}_x. \tag{2.12}$$

Thế (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) vào (1.32), chú ý (1.30), bỏ qua các số hạng bậc bình phương hoặc tích của các tham số nhỏ, cuối cùng đạo hàm kết quả theo x, ta thu được:

$$W_t + \tilde{\eta}_x + \hat{u}W_x + \alpha WW_x + \beta\left(-\frac{W_{xxt}}{2} - \frac{\hat{u}}{2}W_{xxx} + \hat{u}^2 \cdot \tilde{z}_{xxx}\right) + 0(\alpha\beta, \mu\beta, \beta^2) = 0. \tag{2.13}$$

Phương trình (1.34), chú ý đến (1.35), (1.36), (2.7), (2.10) có dạng

$$\tilde{z}_t + \mu(F(\hat{u}, 1) \cdot W_x + G(\hat{u}, 1) \cdot \tilde{h}_x) + 0(\alpha\mu, \beta\mu) = 0, \tag{2.14}$$

$$\tilde{h} = \tilde{\eta} - \tilde{z} \tag{2.15}$$

Hệ (2.11), (2.13), (2.14) lập thành hệ dóng kín đối với các ẩn số $\tilde{\eta}$, W, $\tilde{z}$. Hàm $\varphi$ được tìm từ (1.28), hàm $\tilde{S}$ từ (1.30) và u từ (1.33) có chú ý đến (2.7), (2.10):

$$\varphi = \hat{u} \cdot x + \alpha\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \beta^m \cdot y^{2m} \cdot \tilde{f}_{(2m)}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \cdot y^{2m-1} \cdot \tilde{S}_{(2m-2)}}{(2m-1)!}\right. \tag{2.16}$$

$$u = \hat{u} + \alpha\tilde{f}_x + 0(\alpha\beta, \beta^2), \tag{2.17}$$

$$\tilde{S} = \tilde{z}_t + \hat{u} \cdot \tilde{z}_x + \alpha(\tilde{z} \cdot \tilde{f}_x)_x + 0(\beta^2, \alpha\beta). \tag{2.18}$$

Hệ các phương trình (2.11), (2.13), (2.14) có thể viết dưới dạng tương đương như sau ta đưa vào biến mới:

$$\bar{u} = (u - \hat{u})/\alpha. \tag{2.19}$$

Từ (1.33), chú ý đến (2.7), (2.8), (2.9) ta có:

$$\bar{u} = W + \beta\left(\frac{\hat{u}}{2}\tilde{z}_{xx} - \frac{1}{6}W_{xx}\right) + 0(\alpha\beta, \mu\beta, \beta^2). \tag{2.20}$$

Từ (2.20) có thể biểu diễn W qua $\bar{u}$:

$$W = \bar{u} - \beta\left(\frac{\hat{u}}{2}\tilde{z}_{xx} - \frac{1}{6}\bar{u}_{xx}\right) + 0(\alpha\beta, \mu\beta, \beta^2). \tag{2.21}$$

Thế (2.21) vào (2.11) ta có :

$$(\tilde{\eta}-\tilde{z})_t+\hat{u}\,.\,(\tilde{\eta}-\tilde{z})_x+((1+\alpha(\tilde{\eta}-\tilde{z}))\bar{u})_x+O(\alpha\beta,\ \mu\beta,\ \beta^2)=0, \qquad (2.22)$$

$$\bar{u}_t+\hat{u}\,.\,\bar{u}_x+\alpha\,\bar{u}\bar{u}_x+\tilde{\eta}_x-\beta\left(\frac{\hat{u}}{3}\bar{u}_{xxx}+\frac{1}{3}\bar{u}_{xxt}-\frac{\hat{u}^2}{2}\,.\,\tilde{z}_{xxx}\right)+O(\alpha\beta,\ \mu\beta,\ \beta^2)=0. \qquad (2.23)$$

Thế (2.21) vào (2.14), ta thu được :

$$\tilde{z}_t+\mu\,.\,(F(\hat{u},1)\,.\,\bar{u}_x+G(\hat{u},\ 1)\,.\,\tilde{h}_x)+O(\alpha\mu,\ \beta\mu)=0. \qquad (2.24)$$

Hệ (2.22), (2.23), (2.24) tương đương với hệ (2.11), (2.13), (2.14) với độ chính xác đến bậc 2 của các tham số nhỏ và tích của chúng.

## 2.3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BOUSSINESQ CỔ ĐIỂN

Từ (2.11), (2.13) giả thiết là $\tilde{z}=\mu=\hat{u}=0$, ta thu lại hệ phương trình Boussinesq cổ điển [1, 4]

$$\tilde{\eta}_t+((1+\alpha\tilde{\eta})\,W)_x-\frac{\beta}{6}W_{xxx}+O(\alpha\beta,\ \beta^2)=0, \qquad (2.25)$$

$$W_t+\tilde{\eta}_x+\alpha WW_x-\frac{\beta}{2}W_{xxt}+O(\alpha\beta,\ \beta^2)=0. \qquad (2.26)$$

Từ (2.22), (2.23) cũng với giả thiết nói trên, thu nhận lại dạng tương đương của hệ phương trình Boussinesq cổ điển:

$$\tilde{\eta}_t+((1+\alpha\tilde{\eta})\,\bar{u})_x+O(\alpha\beta,\ \beta^2)=0, \qquad (2.27)$$

$$\bar{u}_t+\alpha\bar{u}\bar{u}_x+\tilde{\eta}_x-\frac{\beta}{3}\bar{u}_{xxt}+O(\alpha\beta,\ \beta^2)=0. \qquad (2.28)$$

## 2.4. THU NHẬN PHƯƠNG TRÌNH KORTEWEG — DE VRIES TỔNG QUÁT

Từ các phương trình (2.11), (2.13) ta có : (giả thiết rằng $\hat{u}\equiv 0$)

$$\tilde{\eta}_t+W_x=O(\alpha,\ \beta,\ \mu), \qquad (2.29)$$

$$W_t+\tilde{\eta}_x=O(\alpha,\ \beta). \qquad (2.30)$$

Nghiệm của (2.29), (2.30) có dạng : (chỉ xét các sóng chuyển động từ trái sang phải)

$$\tilde{\eta}=W+O(\alpha,\ \beta,\ \mu), \qquad (2.31)$$

$$\tilde{\eta}_t+\tilde{\eta}_x+O(\alpha,\beta,\mu)=0. \qquad (2.32)$$

Từ (2.31), nghiệm của (2.11), (2.13) có thể tìm dưới dạng :

$$W=\tilde{\eta}+\alpha\,.\,A+\beta\,.\,B+\mu\,.\,C \qquad (2.33)$$

trong đó A, B, C là các hàm chưa biết, phụ thuộc vào x, t. Thế (2.33) vào (2.11) biểu diễn $\tilde{z}_t$ qua $W_x$, $\tilde{h}_x$ theo phương trình (2.14), ta thu được :

$$\tilde{\eta}_t+\tilde{\eta}_x+\alpha(A_x+((\tilde{\eta}-\tilde{z})\,.\,\tilde{\eta})_x)+\beta\left(\left(B_x-\frac{1}{6}\tilde{\eta}_{xxx}\right)\right)+$$

$$+\mu(C_x + F(\hat{u}, 1)\tilde{\eta}_x + G(\hat{u}, 1)(\tilde{\eta} - \tilde{z})_x) + O(\alpha\beta, \mu\beta, \beta^2) = 0. \quad (2.34)$$

Thế (2.33) vào (2.13) ta có:

$$\tilde{\eta}_t + \tilde{\eta}_x + \alpha(A_t + \tilde{\eta}\tilde{\eta}_x) + \beta\left(-\frac{1}{2}\tilde{\eta}_{xxt} + B_t\right) + \mu C_t + O(\alpha\beta, \mu\beta, \beta^2) = 0. \quad (3.35)$$

Điều kiện để (2.34), (2.35) đồng nhất với nhau là:

$$A_t - A_x = \tilde{\eta}\,\tilde{\eta}_x - (\tilde{\eta}\,\tilde{\eta})_x, \quad (2.36)$$

$$C_t - C_x = F(\hat{u}, 1)\,\tilde{\eta}_x + G(\hat{u}, 1)(\tilde{\eta} - \tilde{z})_x, \quad (3.37)$$

$$B_t - B_x = \frac{1}{2}\tilde{\eta}_{xxt} - \frac{1}{6}\tilde{\eta}_{xxx}. \quad (2.38)$$

Để giải hệ (2.36) ÷ (2.38) ta đưa vào hệ tọa độ mới như sau:

$$\xi = x - t, \quad (2.39)$$

$$\sigma = x + t. \quad (2.40)$$

Chú ý rằng phương trình (2.32) có dạng:

$$\tilde{\eta}_\sigma = O(\alpha, \beta, \mu) \quad (2.41)$$

Nghiệm của (2.36) ÷ (2.38) có dạng: (sử dụng tính chất (2.41))

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\tilde{\eta}^2 - \tilde{z}\,\tilde{\eta}\right)\Big|_{\xi_o}^{\xi} - \frac{1}{2}\int_{\xi_o}^{\xi}\left(\frac{1}{2}\tilde{\eta}^2 - \tilde{z}\,\tilde{\eta}\right)_\sigma d\xi + \Phi_A(\sigma), \quad (2.42)$$

$$B = \frac{1}{3}\tilde{\eta}_{\xi\xi}\ \Phi_B(\sigma) + O(\alpha, \beta, \mu), \quad (2.43)$$

$$C = -\frac{1}{2}\left((F + G)\,.\,\tilde{\eta} - G\tilde{z}\right)\Big|_{\xi_o}^{\xi} + \frac{1}{2}G\int_{\xi_o}^{\xi}\tilde{z}_\sigma d\xi + \Phi_C(\sigma) + O(\alpha, \beta, \mu). \quad (2.44)$$

Viết lại phương trình (2.34) hoặc (2.35) trong hệ tọa độ, (2.39), (2.40), sau đó thế A, B, C vào từ (2.42) ÷ (2.44), bỏ qua các số hạng bậc bình phương hoặc tích các tham số nhỏ, ta thu được phương trình Korteweg – De Vries tổng quát (Giả thiết rằng $\Phi_A = \Phi_B = \Phi_C = 0$).

$$2\tilde{\eta}_\sigma + \frac{3\alpha}{2}\tilde{\eta}\,\tilde{\eta}_\xi + \frac{\beta}{6}\tilde{\eta}_{\xi\xi\xi} + \frac{\alpha}{2}\left(-(\tilde{z}\,\tilde{\eta})_\xi - \tilde{\eta}\,\tilde{z}_\sigma\big|_{\xi_o} + \int_{\xi_o}^{\xi}\tilde{\eta}\cdot\tilde{z}_{\sigma\sigma}\cdot d\xi\right) +$$

$$+\frac{\mu}{2}\left((F + G)\,\tilde{\eta}_\xi - G\tilde{z}_\xi - G\tilde{z}_\sigma\big|_{\xi_o} + G\int_{\xi_o}^{\xi}\tilde{z}_{\sigma\sigma}\cdot d\xi\right) + O(\alpha\beta, \mu\beta, \beta^2) = 0. \quad (2.45)$$

Ta thấy rằng, trong trường hợp có đáy biến đổi chậm theo t, phương trình Korteweg – De Vries tổng quát có dạng phương trình vi tích phân. Giả thiết: $\tilde{z} = \mu = 0$. từ (2.45) ta thu được phương trình Korteweg – De Vries cổ điển:

$$2\tilde{\eta}_\sigma + \frac{3\alpha}{2}\tilde{\eta}\,\tilde{\eta}_\xi + \frac{\beta}{6}\tilde{\eta}_{\xi\xi\xi} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0, \quad (2.46)$$

trong hệ tọa độ x, t phương trình trên có dạng:

$$\tilde{\eta}_t + \tilde{\eta}_x + \frac{3\alpha}{2}\tilde{\eta}\tilde{\eta}_x + \frac{\beta}{6}\tilde{\eta}_{xxx} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0. \qquad (2.47)$$

## §3. KẾT LUẬN

Bằng phương pháp tham số nhỏ, xuất phát từ hệ phương trình cơ bản mô tả chuyển động có thế của chất lỏng lý tưởng không nén được và phương trình vận chuyển bùn cát, đã thu nhận hệ phương trình Boussinesq tổng quát mô tả chuyển động của các sóng dài, có biên độ hữu hạn, trên sông có tính đến biến dạng đáy. Trong trường hợp biên độ sóng nhỏ, biến đổi đáy chậm, đã thu nhận phương trình Korteweg — De Vries tổng quát, có tính đến biến dạng đáy. Các phương trình Boussinesq và Korteweg — De Vries cổ điển được thu nhận lại như các trường hợp riêng khi đáy sông phẳng, không biến dạng. Các tác giả bày tỏ lòng biết ơn của mình tới G. S. T. S. NGUYỄN VĂN ĐIỆP đã quan tâm và đóng góp nhiều nhận xét quí báu cho bài báo này.

*Địa chỉ*
*Viện Cơ học Viện KHVN.*

*Nhận ngày 1-11-1986*

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. BOUSSINESQ J. Theorie des ondes et remous qui seprоpagent le long d'un canal rectangulaire horizontal en communiquant au liquide contenu dans le canal desvitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J. Math. Pure. Appl. 2 serie, tome 17 pp 55 — 108, 1872.
2. KORTEWEG D. J., DE VRIES G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves. Phi mag. 5, 39, 422 — 433, 1895.
3. КАРАУЩЕВ А. В. Теория и методы расчёта речных наносов Л. 1977.
4. УИЗЕМ ДЖ. Линейные и нелинейные волны. стр. 443 — 448, М., 1977.

## РЕЗЮМЕ

### ВЫВОД ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ БУССИНЕКСА И КОРТЕВЕГА ДЕ ВРИЗА ОПИСЫВАЮЩИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПО РУСЛУ С УЧЁТОМ ДЕФОРМАЦИИ ДНА

Из системы уравнений теории идеальной несжимаемой жидкости и уравнения транспорта речных наносов при предположении о малости квадратного отношения между характерной глубиной и длиной волн выведены обобщённые уравнения Буссинекса и Кортевега де Вриза описывающие распространение волн по руслу с учётом деформации дна как в общем случае так и в некоторых частных случаях. Показано что в случае слабо нелинейных и слабо диспергирующих волн при отсутствии деформации дна из полученной системы уравнений Следуют Классические уравнения Буссинекса и Кортевега де Вриза.