Tạp chí cơ học T. IX, 1987 số 4 (trang 9 — 16)

GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC CỦA HỆ ĐÀN DẺO BIẾN DẠNG CHUYỂN VỊ LỚN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN. I–MÔ TẢ LAGRANGE DỪNG

TRẦN DƯƠNG HIỀN

Động lực của hệ đàn dẻo biến dạng chuyển vị lớn là lớp bài toán phức tạp, do sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các điều kiện hình học, vật liệu, kích động ngoài và phương pháp giải. Ngay cả sự kết hợp của mô hình phần tử hữu hạn (PTHH) với đường lối gia số tuyến tính theo đó hệ phương trình chuyển động được lập và tích phân trên cơ sở một cấu hình đã biết tại một thời điểm trước đó cũng có nhiều hạn chế khi xét đến ảnh hưởng chuyển vị và biến dạng lớn của vật liệu ngoài phạm vi đàn hồi. Phát triển đường lối trên, sử dụng những kết quả hiện đại của cơ học phi tuyến và kỹ thuật tính số phương pháp dùng mô tả Lagrange không dừng [1, 2] cho hiệu quả rõ rệt so với nhiều phương pháp khác, nhất là khi kết hợp với các thuật toán tích phân số ẩn và hiện. Trong khuôn khổ hai bài báo, hai phương pháp trên được giới thiệu, áp dụng giải một số ví dụ cụ thể và qua đó, so sánh hiệu quả số của chúng. Trong bài này chúng ta trình bày mô hình PTHH trong mô tả Lagrange dừng, đề nghị một dạng cải biến tích phân số hệ phương trình chuyển động và giải một ví dụ minh họa.

§1. MÔ HÌNH PTHH TRONG MÔ TẢ LAGRANGE DỪNG

Xét chuyển động của vật thể trong hệ tọa độ Cartesian dừng $\{{}^{o}X_i\}$. Giả thiết đã biết cấu hình tại các thời điểm 0, Δt, $2\Delta t$,..., t cần xác định, các biến tĩnh và động học của cấu hình tại $t + \Delta t$. Khi vật thể ở trong trạng thái cân bằng, nguyên lý công ảo trong mô tả Lagrange dừng có dạng

$$\int\limits_{{}^{o}V} {}^{t+\Delta t}_{\ o}S_{ij}\, \delta^{t+\Delta t}_{\ o} E_{ij}\, {}^{o}dv = \int\limits_{{}^{o}A} {}^{t+\Delta t}_{\ o}\mathcal{P}_i\, \delta^{t+\Delta t} U_i\, {}^{o}da + \int\limits_{{}^{o}V} {}^{o}\rho\, {}^{t+\Delta t}_{\ o}F_i\, \delta^{t+\Delta t}U_i\, {}^{o}dv \qquad (1.1)$$

trong đó $\delta^{t+\Delta t}U_i$ là biến phân của các thành phần chuyển vị suy rộng ${}^{t+\Delta t}U_i$ $\delta^{t+\Delta t}_{\ o}E_{ij}$ — biến phân của các thành phần Cartesian của tensor biến dạng Green của cấu hình tại $t + \Delta t$ theo cấu hình ban đầu tại $t = 0$, ${}^{t+\Delta t}_{\ o}S_{ij}$ — các thành phần của tensor ứng suất piola Kirchoff loại 2 tại $t + \Delta t$ tương ứng với $t = 0$

$${}^{t+\Delta t}_{\ o}E_{ij} = \frac{1}{2}\left({}^{t+\Delta t}_{\ o}U_{i,j} + {}^{t+\Delta t}_{\ o}U_{k,i} + {}^{t+\Delta t}_{\ o}U_{j,i} \times {}^{t+\Delta t}_{\ o}U_{k,j}\right), \qquad (1.2)$$

${}^{t+\Delta t}_{\ o}\mathcal{P}_i$ và ${}^{t+\Delta t}_{\ o}F_i$ tương ứng là lực mặt và lực khối (bao gồm hiệu ứng cản và hiệu ứng quán tính trong trường hợp bài toán động lực) tại $t + \Delta t$ đo trên bề mặt ${}^{o}A$, thể tích ${}^{o}V$ tại $t = 0$ và ${}^{o}\rho$, ${}^{t+\Delta t}\rho$ — mật độ khối lượng tại $t = 0$ và $t + \Delta t$. Giả thiết hướng và giá trị của ${}^{t+\Delta t}_{\ o}\mathcal{P}_i$ và ${}^{o}\rho\, {}^{t+\Delta t}_{\ o}F_i$ độc lập với cấu hình tại $t + \Delta t$, nghĩa là lực tác dụng không phụ thuộc trạng thái chuyển vị và biến dạng. Để giải bài toán, các hàm ẩn ${}^{t+\Delta t}_{\ o}S_{ij}$ và ${}^{t+\Delta t}_{\ o}E_{ij}$ có thể viết tách

$${}^{t+\Delta t}_{\ o}S_{ij} = {}^{t}_{o}S_{ij} + {}_{o}\Delta S_{ij}, \qquad (1.3)$$

$${}^{t+\Delta t}_{\ o}E_{ij} = {}^{t}_{o}E_{ij} + {}_{o}\Delta E_{ij}, \qquad (1.4)$$

trong đó ${}_0^tS_{ij}$, ${}_0^tE_{ij}$ tương ứng là các đại lượng đã biết của cấu hình tại t. Gia số tensor biến dạng Green ${}_0\Delta E_{ij}$ có thể phân ra hai thành phần tuyến tính và phi tuyến.

$$ {}_0\Delta E_{ij} = {}_0\Delta E^*_{ij} + {}_0\Delta E^{**}_{ij} \tag{1.5}$$

với
$$ {}_0\Delta E^*_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_0\Delta U_{i,j} + {}_0\Delta U_{j,i} + {}_0^tU_{k,i}\,{}_0\Delta U_{k,j} + {}_0^tU_{k,j}\,{}_0\Delta U_{k,i}\right), \tag{1.6}$$

$$ {}_0\Delta E^{**}_{ij} = \frac{1}{2}\,{}_0\Delta U_{k,i}\,{}_0\Delta U_{k,j}. \tag{1.7}$$

Ký hiệu vế phải của (1.1) là ${}^{t+\Delta t}\mathcal{R}$, giả thiết quan hệ tuyến tính hóa giữa các gia số ứng suất và biến dạng [1]

$$ {}_0\Delta S_{ij} = {}_0C_{ijkm}\,{}_0\Delta E_{km} \tag{1.8}$$

rồi thay (1.3) ÷ (1.8) vào (1.1), để ý $\delta^{t+\Delta t}_0E_{ij} = \delta_0\Delta E_{ij}$ (từ (1.4)) nhận được phương trình phi tuyến của gia số chuyển vị ΔU_i

$$ \int_{{}^0V} {}_0C_{ijkm}\,{}_0\Delta E_{km}\,\delta_0\Delta E_{ij}\,{}^0dv + \int_{{}^0V} {}_0^tS_{ij}\,\delta_0\Delta E^{**}_{ij}\,{}^0dv = $$

$$ = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^0V} {}_0^tS_{ij}\,\delta_0\Delta E^*_{ij}\,{}^0dv \tag{1.9}$$

và dạng tuyến tính hóa của nó

$$ \int_{{}^0V} {}_0C_{ijkm}\,{}_0\Delta E^*_{km}\,\delta_0\Delta E^*_{ij}\,{}^0dv + \int_{{}^0V} {}_0^tS_{ij}\,\delta_0\Delta E^{**}_{ij}\,{}^0dv = $$

$$ = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^0V} {}_0^tS_{ij}\,\delta_0\Delta E^*_{ij}\,{}^0dv. \tag{1.10}$$

Trong trường hợp phi tuyến lớn, xấp xỉ tuyến tính (1.10) có thể trở nên thô. Để khắc phục có thể dùng phép lặp cân bằng [2], trong đó trình bày phương pháp Newton Raphson, phương trình tuyến tính hóa lặp cân bằng được thiết lập cho bước lặp thứ i và quá trình lặp tiến hành cho đến khi đạt chuẩn hội tụ

Dùng mô hình chuyển vị của phương pháp PTHH

$$ {}^tU_i({}^0X, t) = H_n({}^0X)\,{}^tU^n_i(t)\,;\ \Delta U_i({}^0X, t) = H_n({}^0X)\,\Delta U^n_i(t)\,; \tag{1.11}$$
$$ n = 1,2,\dots, N, $$

với ${}^tU^n_i$, ΔU^n_i và H_n tương ứng là chuyển vị nút, gia số chuyển vị nút và hàm nội suy cho bậc tự do thứ i thuộc nút n của PTHH có N nút. Đối với bài toán động lực, giả thiết tính bảo toàn khối lượng của vật, các ma trận khối lượng và ma trận cản được xác định theo cấu hình tại $t = 0$. Từ đó nhận được phương trình dạng gia số của một phần tử trong mô tả Lagrange dừng

$$ ({}_0^tK^* + {}_0^tK^{**})\,\Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}_0^tF - M\,{}^{t+\Delta t}\ddot{U} - D\,{}^{t+\Delta t}\dot{U}, \tag{1.12}$$

trong đó các ma trận khối lượng M, ma trận cản D và vector lực tác dụng ${}^{t+\Delta t}R$ có dạng (để ý trong trường hợp này ${}^{t+\Delta t}R$ chỉ bao gồm các thành phần của lực mặt ${}^{t+\Delta t}_0\mathcal{P}$ và lực khối ${}^{t+\Delta t}_0F$)

$$ M = \int_{{}^0V} {}^0\delta H^TH\,{}^0dv, \tag{1.13}$$

$$D = \int_{{}^\circ A} {}^\circ\xi H^T H^\circ dv, \qquad (1.14)$$

$$^{t+\Delta t}R = \int_{{}^\circ A} H^{T\,t+\Delta t}_{\ \ \circ}\mathcal{P}^\circ da + \int_{{}^\circ V} H^{T\,t+\Delta t}_{\ \ \circ}F^\circ dv, \qquad (1.15)$$

còn ${}^t_\circ K^*$, ${}^t_\circ K^{**}$ và ${}^t_\circ F$ nhận được từ mô hình PTHH tương ứng của

$$\int_{{}^\circ V} {}_\circ C_{ijkm}\, {}_\circ\Delta E^*_{km}\delta_\circ\Delta E^*_{ij}\, {}^\circ dv, \quad \int_{{}^\circ V} {}^t_\circ S_{ij}\, \delta\, {}_\circ\Delta E^{**}_{ij}\, {}^\circ dv \ \text{ và } \int_{{}^\circ V} {}^t_\circ S_{ij}\, \delta_\circ\Delta E^*_{ij}\, {}^\circ dv :$$

$${}^t_\circ K^* = \int_{{}^\circ V} {}^t_\circ B^{*T}\, {}_\circ C\, {}^t_\circ B^*\, {}^\circ dv, \ (1.16) \quad {}^t_\circ K^{**} = \int_{{}^\circ V} {}^t_\circ B^{**T}\, {}^t_\circ S\, {}^t_\circ B^{**}\, {}^\circ dv, \qquad (1.17)$$

$${}^t_\circ F = \int_{{}^\circ V} {}^t_\circ B^{*T}\, {}^t_\circ\widehat{S}\, {}^\circ dv. \qquad (1.18)$$

Ở đây ${}^t_\circ B^*$ và ${}^t_\circ B^{**}$ tương ứng là các ma trận liên hệ tuyến tính và phi tuyến giữa chuyển vị và biến dạng, ${}_\circ C$ biểu thị quan hệ gia số ứng suất và biến dạng, ${}^t_\circ S$ là ma trận chứa các thành phần ứng suất Piola Kirchhoff loại hai, ${}^t_\circ\widehat{S}$ là vector của các thành phần ứng suất trên. Các ma trận này đều xác định theo cấu hình tại t do trên cấu hình tại t = 0 và dùng để xác định các hàm ẩn tại t + Δt. Dùng phép lặp cân bằng [2], phương trình (1.12) trở thành

$$({}^t_\circ K^* + {}^t_\circ K^{**})\,\overset{(i)}{\Delta U} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}_{\ \ \circ}\overset{(i-1)}{F} - M\,{}^{t+\Delta t}\overset{(i)}{\ddot U} - D\,{}^{t+\Delta t}\overset{(i)}{\dot U}, \qquad (1.19)$$

trong đó ${}^{t+\Delta t}\overset{(i)}{U} = {}^{t+\Delta t}\overset{(i-1)}{U} + \overset{(i)}{\Delta U}$. Để ý khi i = 1, (1.19) trở về dạng (1.12) nghĩa là :

$$\overset{(1)}{\Delta U} = \Delta U\,;\ {}^{t+\Delta t}\overset{(1)}{\dot U} = {}^{t+\Delta t}\dot U\,;\ {}^{t+\Delta t}\overset{(1)}{\ddot U} = {}^{t+\Delta t}\ddot U\,;\ {}^{t+\Delta t}\overset{(o)}{U} = {}^tU\,;\ {}^{t+\Delta t}_{\ \ \circ}\overset{(o)}{F} = {}^t_\circ F. \qquad (1.20)$$

Mặc dù quan hệ động học của mô tả Lagrange dùng trong mô hình PTHH mang tính tổng quát cho cả chuyển vị lớn và biến dạng lớn, nhưng khi áp dụng cần lưu ý đến quan hệ giữa các gia số ứng suất và biến dạng. Vì tensor ứng suất Piola Kirchhoff loại hai trong trường hợp chung không mô tả ứng suất thực nên thường phải đưa về dạng Cauchy có ý nghĩa vật lý rõ ràng hơn. Tính toán với các chuyển vị vô cùng bé, liên hệ (1.8) trở về dạng tổng quát của đàn hồi tuyến tính

$${}_\circ C_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\,\delta_{km} + \mu\,(\delta_{ik}\,\delta_{jm} + \delta_{im}\,\delta_{jk}) \qquad (1.21)$$

và ${}_\circ\Delta S_{ij}$, ${}_\circ\Delta E_{ij}$ trùng với các định nghĩa kỹ thuật của ứng suất và biến dạng. Trong trường hợp chuyển vị lớn và biến dạng nhỏ quan hệ (1.8) vẫn tương đương với định luật Hookes, vì các tensor Kirchhoff và Green là các bất biến khi vật thể chuyển động như vật cứng tuyệt đối. Từ nhận xét trên thấy rằng mô tả Lagrange đừng có thể dùng phù hợp cho các loại vật liệu phi tuyến vật lý chịu chuyển vị lớn và biến dạng nhỏ. Khi vật liệu chịu biến dạng lớn, dùng (1.8) không thích hợp. Có thể áp dụng, ví dụ mô hình Mooney Rivlin [2] cho vật liệu hyperelastic trong đó năng lượng biến dạng là hàm của các bất biến biến dạng $W = W(I_1, I_2, I_3)$ kèm theo giả thiết không nén ${}^t\rho/{}^\circ\rho = 1$.

$${}^t_\circ S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial\, {}^t_\circ E_{ij}} \qquad (1.22)$$

§ 2. TÍCH PHÂN SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUYỀN ĐỘNG

Hệ (1.12) có thể tích phân bằng phương pháp phân tích chuẩn hoặc tích phân trực). Theo phương pháp phân tích chuẩn, các bậc tự do tại nút được chuyền về dạng ẩn, nghĩa là đưa về các bậc tự do suy rộng tương ứng với những dạng dao động nh. Với giả thiết lực cản môi trường có thể biểu diễn dưới dạng tỉ lệ với khối lượng độ cứng, như kiểu hàm Rayleigh, nhờ tính trực giao Fourier có thể đưa hệ n bậc tự về n phương trình vi phân cho mỗi bậc tự do và giải độc lập nhau bằng tích phân Nghiệm của hệ nhận được bằng phép cộng tác dụng. Trong trường hợp bài toán phi ến, tần số và dạng dao động riêng thay đổi theo thời gian, để đưa hệ phương trình dạng chéo phải giải bài toán dao động riêng tại từng thời điểm xét. Phương pháp lặp ông gian con [2] cho lời giải tương đối nhanh và ổn định so với các phương pháp số i bài toán dao động riêng hiện dùng vì tốc độ hội tụ của chúng phụ thuộc nhiều vào đặc trưng vật lý và hình học của hệ xét. Nói chung phương pháp phân tích chuẩn có u quả cho bài toán phi tuyến khi dùng ít dạng dao động riêng và chủ yếu cho các hệ i tuyến cục bộ, ví dụ trong bài toán động đất. Hiện nay, các phương pháp tích phân ực tiếp vẫn là công cụ mạnh nhất tích phân trong miền thời gian hệ phương trình uyền động. Có thể kể đến phương pháp sai phân trung tâm, phương pháp Milne, Wilson θ, wmark... trong đó các phương pháp Wilson θ và Newmark được dùng phổ biến hơn, tính đơn giản và ổn định nghiệm của chúng. Đây là những phép tích phân ẩn vì ương trình chuyền động mô tả hệ tại $t + \Delta t$. Ý chính của các phương pháp này là ay vì giải hệ tại thời điểm t bất kỳ, hệ được giải cho từng bước Δt liên tiếp với giả iết điều kiện cân bằng chỉ cần thỏa mãn trong khoảng $[t, t + \Delta t]$ và xấp xỉ vận tốc và a tốc theo chuyền vị tại thời điểm xét. Dưới đây đề nghị một dạng cải biến của phương áp Wilson θ dùng cho hệ phi tuyến. Giả thiết gia tốc biến đổi tuyến tính trong khoảng $t + \Delta t]$, trong đó $\theta \geqslant 1$ (Wilson chỉ ra rằng với $\theta \geqslant 1.37$ phương pháp cho nghiệm ổn nh), nghĩa là trong khoảng $0 \leqslant \tau \leqslant \theta\Delta t$ ta có

$$ {}^{t+\tau}\ddot{U} = {}^{t}\ddot{U} + \frac{\tau}{\theta\Delta t}\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^{t}\ddot{U}\right) \tag{2.1} $$

ch phân (2.1) nhận được

$$ {}^{t+\tau}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + {}^{t}\ddot{U}\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^{t}\ddot{U}\right), \tag{2.2} $$

$$ {}^{\tau}\Delta U = {}^{t}\dot{U}\tau + \frac{1}{2}\,{}^{t}\ddot{U}\tau^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t}\,\tau^3\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^{t}\ddot{U}\right). \tag{2.3} $$

hác với phương pháp Wilson θ, trong (2.3) đề nghị dùng dạng biểu diễn gia số. Từ (2.2) à (2.3) tại thời điểm $t + \theta\Delta t$ có thể viết

$$ {}^{t+\theta\Delta t}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + \frac{\theta\Delta t}{2}\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} + {}^{t}\ddot{U}\right), \tag{2.4} $$

$$ {}^{\theta\Delta t}\Delta U = \theta\Delta t\,{}^{t}\dot{U} + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} + 2\,{}^{t}\ddot{U}\right) \tag{2.5} $$

iải hệ (2.4) và (2.5) ta có thể biểu diễn ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U}$ và ${}^{t+\theta\Delta t}\dot{U}$ theo ${}^{\theta\Delta t}\Delta U$

$$ {}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}\,{}^{\theta\Delta t}\Delta U - \frac{6}{\theta\Delta t}\,{}^{t}\dot{U} - 2\,{}^{t}\ddot{U}, \tag{2.6} $$

$$ {}^{t+\theta\Delta t}\dot{U} = \frac{3}{\theta\Delta t}\,{}^{\theta\Delta t}\Delta U - 2\,{}^{t}\dot{U} - \frac{\theta\Delta t}{2}\,{}^{t}\ddot{U}. \tag{2.7} $$

Để tính được chuyển vị, vận tốc và gia tốc tại thời điểm $t + \Delta t$ xét phương trình (1.12) tại $t + \theta\Delta t$.

$$({}^t_0K^* + {}^t_0K^{**})\,{}^{\theta\Delta t}\Delta U = {}^{t+\theta\Delta t}R - {}^t_0F - M\,{}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - D\,{}^{t+\theta\Delta t}\dot{U}. \quad (2.8)$$

với

$${}^{t+\theta\Delta t}R = {}^tR + \theta({}^{t+\Delta t}R - {}^tR). \quad (2.9)$$

Từ (2.6), (2.7) thấy rằng tại $t + \theta\Delta t$ vận tốc và gia tốc viết được dưới dạng hàm của gia số chuyển vị, nghĩa là khi thay (2.6), (2.7) vào (2.8) nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính đối với ${}^{\theta\Delta t}U$. Giải hệ này, xác định được ${}^{\theta\Delta t}U$. Thay giá trị của ${}^{\theta\Delta t}U$ vào (2.6) tính được ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U}$, từ đó theo (2.1), (2.2) và (2.3) với $\tau = \Delta t$ tính được ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$, ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ và ${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + {}^{\Delta t}\Delta U$. Phương pháp nêu trên về cơ bản giống phương pháp Wilson θ nhưng do biểu diễn chuyển vị dưới dạng gia số, thuật toán trở nên đơn giản hơn khi tính vector tải trọng quy đổi.

§3. THUẬT TOÁN

Từ các kết quả nhận được trong mục §1 và §2 có thể viết thuật toán giải bài toán động lực của hệ dàn dẻo biến dạng chuyển vị lớn trong mô tả Lagrange dừng của mô hình PTHH bằng phương pháp tích phân trực tiếp:

A – TÍNH TOÁN BAN ĐẦU

a) Tính các ma trận tuyến tính ${}^0_0K$, khối lượng M, cản D. Định các giá trị đầu ${}_0U$, ${}^0\dot{U}$, ${}^0\ddot{U}$

b) Tính các hằng số

Trường hợp bài toán tĩnh, $\theta = 1$, nhảy tới B.

$$\theta = 1.4;\ a_0 = 6/\theta^2\Delta t^2;\ a_1 = 3/\theta\Delta t;\ a_2 = 2a_1;\ a_3 = \theta\Delta t/2;$$

$$a_4 = a_0/\theta;\ a_5 = -a_2/\theta;\ a_6 = 1 - 3/\theta;\ a_7 = \Delta t/2;\ a_8 = \Delta t^2/6.$$

c) Tính ma trận hệ số quy đổi ban đầu

$$\widehat{K} = {}^0_0K^* + a_0M + a_1D$$

B – TÍNH TOÁN CHO MỖI BƯỚC Δt

a) Khi cần, lập ma trận hệ số mới kể đến hiệu ứng phi tuyến hình học và vật liệu. Tam giác hóa

$$\widehat{K} = {}^t_0\widehat{K} + {}^t_0K^{**};\ \widehat{K} = LDL^T$$

b) Tính vector lực tác dụng quy đổi

$${}^{t+\theta\Delta t}\widehat{R} = {}^tR + \theta({}^{t+\Delta t}R - {}^tR) - {}^t_0F + M(a_2\,{}^t\dot{U} + 2\,{}^t\ddot{U}) + D(2\,{}^t\dot{U} + a_3\ddot{U})$$

c) Giải hệ phương trình, tìm gia số chuyển vị ${}^{\theta\Delta t}\Delta U$

$$LDL^T\,{}^{\theta\Delta t}\Delta U = {}^{t+\theta\Delta t}\widehat{R}$$

d) Lặp cân bằng $\|{}^{\theta\Delta t}\Delta U^{(i)}\| \approx \|{}^{\theta\Delta t}\Delta U^{(i-1)}\|$

e) Tính gia tốc, vận tốc và chuyển vị tại $t + \Delta t$

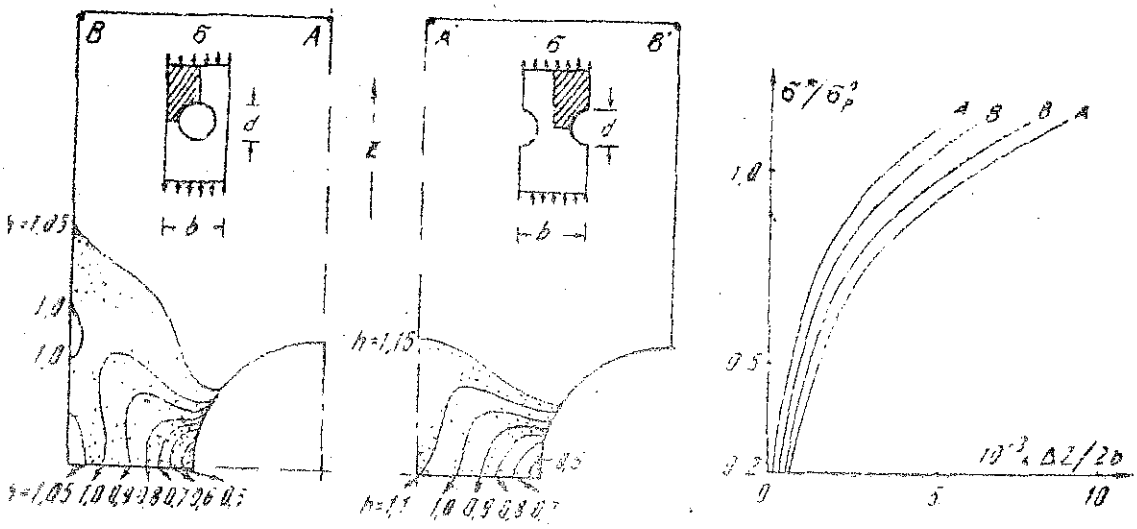
$$ {}^{t+\Delta t}\ddot{U} = a_4\,{}^{\theta\Delta t}\Delta U + a_5\,{}^{t}\dot{U} + a_6\,{}^{t}\ddot{U}, $$

$$ {}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + a_7({}^{t+\Delta t}\ddot{U} + {}^{t}\ddot{U}), $$

$$ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t}U + \Delta t\,{}^{t}\dot{U} - a_8({}^{t+\Delta t}\ddot{U} + 2\,{}^{t}\ddot{U}). $$

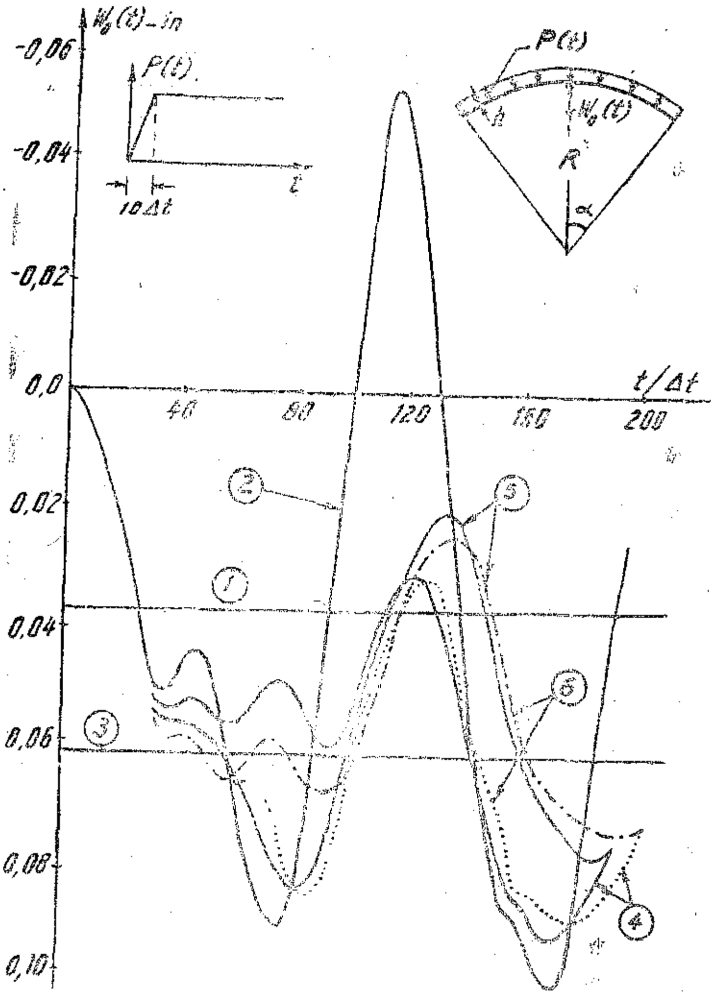
§ 4. VÍ DỤ MINH HỌA

Trong ví dụ thứ nhất, xét một trường hợp riêng của bài toán động lực, khi tải trọng tác dụng tĩnh. Khảo sát đối xử của hai tấm phẳng, một có lỗ ở giữa và một khoét hai nửa lỗ hai bên, chịu tải trọng kéo cường độ σ tăng dần theo thời gian. Tỷ lệ đường kính lỗ và bề rộng tấm là $d/b = 0,5$. Áp dụng lý thuyết chảy dẻo Prandtl Reuss với mặt chảy dẻo Huber Mises cho vật liệu đàn dẻo tái bền đẳng hướng tuyến tính, với hệ số Poisson $\nu = 0.2$, modul Young $E_e = 7000 KG/mm^2$, modul dẻo $E_p = 0.032E_e$, giới hạn dẻo ban đầu $\sigma_p^0 = 24.3 KG/mm^2$, 52 PTHH và 69 nút, 20 bước tải trọng. Hình 1a biểu thị sự phát triển vùng dẻo trong trạng thái ứng suất phẳng của hai tấm khi cường độ tải trọng σ tăng dần với hệ số $h = \sigma^*/\sigma_p^0$ trong đó $\sigma^* = \sigma b/(b-d)$. So sánh sự làm việc của hai tấm thấy rằng điểm dẻo đầu tiên xuất hiện với các hệ số tải $h = 0.5$ và $h = 0.6$, phá hủy dẻo xảy ra khi $h = 1.05$ và 1.15, nghĩa là với cùng quan hệ d/b tấm có lỗ giữa chịu tác động của quá trình phá hủy dẻo sớm hơn. Số liệu thực nghiệm [3], tương ứng với các kết quả trên là 0.47, 0.56, 1.09 và 1.11. Quan hệ giữa tải trọng và chuyển vị theo hướng tải trọng vẽ trên hình 1.



Hình 1

Ví dụ thứ hai xét đối xử động lực của vỏ cản chịu tải trọng phân bố đều $p(t)$: Đặc trưng hình học, vật liệu và tải trọng ghi trên hình 2. Tính toán thực hiện trong trường hợp kể đến ảnh hưởng chuyển vị lớn của vật liệu đàn dẻo tái bền đẳng hướng tuyến tính theo thuyết Prandtl Reuss và mặt dẻo Huber Mises. Kết quả nhận được cho trường hợp đàn hồi tuyến tính, vật liệu đàn dẻo chuyển vị nhỏ và vật liệu đàn dẻo chuyển vị lớn. Hệ phương trình chuyển động được tích phân cho 200 bước thời gian với $\Delta t = 0{,}5 \times 10^{-5}$ sec. Từ hình 2 nhận thấy ảnh hưởng đáng kể của phi tuyến vật liệu và phi tuyến hình học so với trường hợp tuyến tính : tăng chu kỳ dao động, giảm biên độ dao động nhưng độ võng trung bình (độ võng tĩnh) tăng gấp rưỡi. Sự sai khác nhỏ về định lượng so với kết quả nhận được trong [4] có thể giải thích bởi việc sử dụng các phần tử đẳng thông số trong [4] tuy phức tạp hơn nhưng cho lời giải chính xác hơn các phần tử vỏ xuyến dạng thanh thẳng.



Hình 2.
$h = 0{,}41$ in ; $R = 22 . 17$ in
$\alpha = 26 . 67^\circ$; $\nu = 0{,}3$; $E_e = 10 . 5 \times 10^6$ lb/in^2 ; $\sigma_\rho^\circ = 24 \times 10^3$ lb/in^2 ; $E_p = 0{,}21 \times 10^6$ lb/in^2 ; $\rho = 2 . 45 \times 10^{-4}$ lbsec^2/in^4 ; $P(t) = 600$ lb/in^2 ; $\Delta t = 0{,}5 \times 10^{-5}$ sec ; 32 phần tử ; 33 nút.

1. Nghiệm tĩnh đàn hồi tuyến tính.
2. Nghiệm động lực đàn hồi tuyến tính.
3. Nghiệm tĩnh phi tuyến vật lý.
4. Nghiệm đàn dẻo chuyển vị nhỏ.
5. Nghiệm đàn dẻo chuyển vị lớn
6. Kết quả theo [4].

§5. KẾT LUẬN

Mô tả Lagrange dừng, một trong những đường lối hiện đại giải bài toán động lực của hệ đàn dẻo biến dạng chuyển vị lớn trong mô hình PTHH được giới thiệu. Trên cơ sở phương pháp Wilson θ, một phương pháp tích phân trực tiếp hệ phương trình gia số của chuyển động được đề nghị, trong đó hàm xấp xỉ được viết dưới dạng gia số chuyển vị trong mỗi bước thời gian Δt. Điều đó làm cho tính toán đơn giản hơn, nhất là khi mỗi bài toán đòi hỏi tích phân theo 100 — 200 bước thời gian. Kinh nghiệm chỉ ra rằng nếu tần số lớn nhất của lực kích động là ω thì chỉ cần chọn lưới PTHH sao cho mô tả đủ chính xác tới các tần số 4ω của hệ thực là đủ, vì năng lượng của các dạng dao động riêng tần số cao hơn sẽ không đáng kể so với năng lượng toàn hệ và độ chính xác của mô hình. Vì vậy trước lúc giải cần sơ bộ phân tích Fourier lực kích động để chọn lưới PTHH thích hợp. Ngoài ra, bước tích phân Δt nên chọn khoảng $t = T/20$ với T là chu kỳ tương ứng với tần số ω của lực kích động, trừ trường hợp phép lặp cân bằng lâu hội tụ, phải chọn Δt nhỏ hơn [5]. Nhận xét cuối cùng liên quan đến đặc điểm mô tả Lagrange dừng; cho kết quả chính xác trong trường hợp phi tuyến vật lý có chuyển vị lớn nhưng biến dạng nhỏ. Trong trường hợp biến dạng lớn, mô tả Lagrange không dừng cho kết quả tốt hơn. Giới thiệu mô tả Lagrange không dừng và so sánh chi tiết hai mô tả sẽ là nội dung bài báo tiếp sau.

Địa chỉ
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 20-9-1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. HIBBITT H. D., MARCAL P. V., RICE J. R. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement, Int. J. Solids Struct., Vol. 6, 1069 — 1086 1970.
2. BATHE K. J. Finite element procedures in engineering analysis, Prentice Hall Inc. New Jersey, 1982.
3. DIETRICH L., MIASTKOWSKI J., SZCZEPINSKI W. Nos'nos'c' graniczna elementów konstrukc ji, PWN, Warszawa, 1970.
4. BATHE K. J., RAMM E., WILSON E. L. Finite element formulation for large deformation dynamic analysis, Int. J. Num. Meths Engng, Vol. 9, 373 — 376, 1975.
5. HIEN T. D. Nieliniowa dynamika cial i powlok osiowosymetrycznych poddanych dowolnym obciazeniom, Praca IPPT PAN, N31, 1981.

SUMMARY

LARGE DEFORMATION DYNAMIC ANALYSIS ELASTOPLASTIC SOLIDS BY THE FINITE ELEMENT METHOD I. TOTAL LAGRANGIAN FORMULATION.

An effective finite element formulation based upon the total Lagrangian description is presen ted for nonlinear dynamic problems in deformable solids. Continuum is considered with large displacement, large strain and material elastoplasticity. A modified form of the Wilson θ method for time integration of the incremental equatious of motion is proposed. This formulation is implemented and the results of some sample analyses are given.