Tạp chí cơ học T-IX, 1987, số 3 (trang 14 – 22)

BÀI TOÁN VA CHẠM CỦA CÁC HỆ CƠ HỌC

ĐỖ SANH

§ MỞ ĐẦU

Bài toán va chạm của các vật rắn là một trong những bài toán quan trọng của kỹ thuật, ví dụ trong lĩnh vực của chế tạo máy như trong các máy nghiền, trong truyền động bánh răng, trong đó phải kể đến các tai nạn giao thông mà phần lớn các nguyên nhân gây nên là do va chạm. Tuy nhiên cho đến nay các bài toán va chạm chỉ dùng ở các trường hợp đơn giản.

Mục đích của bài báo này là khảo sát bài toán va chạm của các cơ hệ phức tạp từ quan điểm của cơ học giải tích nhờ nguyên lý Phù hợp [2, 3, 4]:

VA CHẠM ĐÀN HỒI CỦA CÁC HỆ HÔLÔNÔM

Khảo sát một hệ cơ học, vị trí của nó được xác định bằng các tọa độ hôlônôm $q_i (i = \overline{1,n})$, chịu tác dụng của các lực suy rộng $Q_i (i = \overline{1,n})$. Giả sử rằng biểu thức động năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{*} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad (1.1)$$

trong đó a_{ij}^{*} là các hàm đã cho của thời gian và tọa độ hệ, ma trận quán tính $\|a_{ij}^{*}\|$ là ma trận xác định dương.

Như đã biết, phương trình chuyển động của hệ có thể được viết trong dạng:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (1.2)$$

Tích phân phương trình (1.2) với điều kiện đầu đã cho chúng ta nhận được

$$q_i = q_i(t) \qquad i = \overline{1,n} \qquad (1.3)$$

nó mô tả chuyển động của hệ trước va chạm

Giả sử rằng hệ bị va chạm do việc đặt một cách đột ngột các liên kết không ma sát không giữ dạng:

$$g_\alpha(t, q_i) \geqslant 0, \qquad \alpha = \overline{1,r} \qquad (1.4)$$

Chúng ta thừa nhận rằng tất cả các giả thiết đối với bài toán va chạm đều được thỏa mãn.

Đầu tiên chúng ta xác định thời điểm t_0 hệ va chạm với các liên kết (1.4): Rõ ràng rằng thời điểm t_0 là nghiệm dương bé nhất của phương trình sau:

$$g_\alpha(t, q_i(t)) = 0, \qquad (1.5)$$

trong đó $q_i(t)$ có biểu thức (1.3)

Vị trí và vận tốc của hệ tại thời điểm va chạm t_o được xác định nhờ các biểu thức:

$$q_{io} = q_i(t_o),\ \dot{q}_{io} = \dot{q}_i(t_o), \qquad (1.6)$$

Như đã biết [6, 9], va chạm sẽ xảy ra khi và chỉ khi $\left(\frac{dg_a}{dt}\right)_{t=t_o} < 0$.

Bây giờ chúng ta viết phương trình chuyển động của hệ trong quá trình va chạm trong giai đoạn biến dạng và giai đoạn khôi phục. Ký hiệu khoảng thời gian của các giai đoạn va chạm qua τ_1 và τ_2

Phương trình chuyển động của hệ trong quá trình va chạm (tức chuyển động của hệ với liên kết va chạm (1.4) có thể viết trong dạng [2, 3, 4].

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + Q_i^*,\ i = \overline{1,n} \qquad (1.7)$$

trong đó Q_i^* là phản lực liên kết của liên kết (1.4) tác dụng lên hệ

Tích phân hệ phương trình (1.7) ứng với các khoảng thời gian từ t_o đến $t_o + \tau_1$ và từ $t_1 (t_1 = t_o + \tau_1)$ đến $t_1 + \tau_2$, ta được:

$$p_{i1} = p_{io} + s_{i1} + s_{i1}^* \qquad (1.8)$$

$$p_{i2} = p_{i1} + s_{i2} + s_{i2}^* = p_{io} + s_i + s_i^* \qquad (1.9)$$

trong đó p_i là mômen mở rộng $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$

s_i là xung lực mở rộng của các lực hoạt động $s_i = \int_{t_o}^{t_o+\tau} Q_i dt$ nó được bỏ qua đối với các lực thông thường (lực không va chạm), s_i^* là xung lực mở rộng của các phản lực liên kết

$$s_i^* = \int_{t_o}^{t_o+\tau} Q_i^* dt$$

Cần chú ý rằng khoảng thời gian va chạm theo giả thiết là rất bé nên trong việc tích phân hệ phương trình (1.7) đã bỏ qua số hạng $\int_{t_o}^{t_o+\tau} \frac{\partial T}{\partial q_i} dt$

Ở đây và sau này các chỉ số 1 và 2 được ký hiệu cho trạng thái của hệ tại các thời điểm cuối của các giai đoạn va chạm, còn chỉ số «0» ký hiệu cho trạng thái của hệ tại thời điểm đầu của va chạm.

Khi sử dụng giả thiết của Niutơn chúng ta có:

$$s_{i2}^* = k\, s_{i1}^* \qquad i = \overline{1,n}, \qquad (1.10)$$

và do đó:

$$S_i^* = S_{i1}^* + S_{i2}^* = (1 + k) S_{i1}^* \qquad (1.11)$$

trong đó k là hệ số khôi phục.

Bây giờ chúng ta chú ý đến các liên kết va chạm (1.4)

ở đó:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\alpha i}\dot{q}_i + \overline{g_\alpha} \geqslant 0, \tag{1.12}$$

$$g_{\alpha i} = \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i}\ ; \qquad \overline{g_\alpha} = \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \tag{1.13}$$

Dễ dàng chỉ ra rằng tại thời điểm đầu và cuối của quá trình va chạm xảy ra:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\alpha i_o}\dot{q}_{i_o} + g_{\alpha o} < 0 \tag{1.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\alpha i_o}\dot{q}_{i_2} + g_{\alpha o} > 0 \tag{1.15}$$

Do tính chất liên tục của sự chuyển trạng thái, nhất định tồn tại một thời điểm ai đó vế trái của các bất phương trình trở nên bằng không. Dễ dàng chỉ ra rằng thời điểm đó chính là thời điểm cuối của giai đoạn biến dạng, tức thời điểm $t_1 = t_o + \tau_1$

Nói khác đi chúng ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\alpha i_o}\dot{q}_{i1} + \overline{g_{\alpha o}} = 0 \tag{1.16}$$

Điều kiện tương thích của các phương trình (1.8) với điều kiện (1.16) sẽ cho ta

$$\sum_{i=1}^{n} G_{\alpha i_o} S^*_{i1} + G_{\alpha o} = 0,$$

hi kết hợp với các hệ thức (1.11) ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} G_{\alpha i_o} S^*_i + (1+k)G_{\alpha o} = 0\ ; \quad \alpha = \overline{1,\ r} \tag{1.17}$$

đó:

$$G_{\alpha i_o} = \sum_{j=i}^{n} g_{\alpha j_o} a_{ji}\ ; \quad G_{\alpha o} = \sum_{i=1}^{n} G_{\alpha i_o}(s_i + p_{i_o}) + g_{\alpha o} \tag{1.18}$$

$\|a_{ij}\|$ là ma trận ngược của ma trận quán tính, nó cũng là một ma trận xác định dương.

Bây giờ chúng ta viết điều kiện lý tưởng của các liên kết (1.4). Để làm điều ấy chúng ta đưa vào các vận tốc độc lập $\dot{q}_\sigma\ (\sigma = \overline{1,\ n-r})$ nhằm mục đích loại trừ sự có mặt của các liên kết (1.4). Khi chú ý đến các liên kết (1.4) (hay dạng tương đương với nó, các liên kết (1.12)) các vận tốc mở rộng $\dot{q}_i(i = \overline{1,\ n})$ được biểu diễn qua các vận tốc độc lập $\dot{q}_\sigma(\sigma = \overline{1,\ n-r})$. Nói một cách khác chúng ta có:

$$\dot{q}_i = \sum_{\sigma=1}^{n-\tau} d_{\sigma i} \cdot \dot{q}_\sigma + d_i, \quad i = \overline{1,\ n} \tag{1.19}$$

Rõ ràng rằng khi thay (1.19) vào (1.12) vế trái của (1.12) trở nên đồng nhất không.

Điều kiện lý tưởng của các liên kết (1.4) bây giờ sẽ là:

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\sigma_i} Q_i^* = 0, \quad \sigma = \overline{1, n-r}, \tag{1.20}$$

Điều kiện (1.20) rõ ràng còn có hiệu lực trong quá trình va chạm. Tích phân của các phương trình (1.20) trong khoảng thời gian va chạm từ t_o đến $t_o + \tau (\tau = \tau_1 + \tau_2)$ cho

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\sigma_i} S_i^* = 0, \quad \sigma = \overline{1, n-r}, \tag{1.21}$$

Như vậy tổng cộng chúng ta nhận được n phương trình (1.17) và (1.21) cho phép xác định n xung lực mở rộng của các phản lực liên kết $S_i^* (i = \overline{1, n})$. Trạng thái vận tốc của hệ sau va chạm bây giờ được tính nhờ các hệ thức (1.9).

Dễ dàng chỉ ra rằng trạng thái vận tốc sau va chạm có thể được xác định trực tiếp nhờ hệ phương trình sau:

$$\sum_{i=1}^{n} G_{\alpha i_o} p_{i2} + kG_{\alpha o} + \bar{g}_{\alpha_o} = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}, \tag{1.22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\sigma i_o} p_{i2} - d_{\sigma_o} = 0, \quad \sigma = \overline{1, n-r} \tag{1.23}$$

ở đó các đại lượng $G_{\alpha i}$, $G_{\alpha o}$ được tính theo các công thức (1.18), còn các đại lượng $d_{\sigma_o} (\sigma = \overline{1, n-r})$ có dạng như sau:

$$d_{\sigma_o} = \sum_{i=1}^{n} d_{\alpha i_o} (p_{i_o} + s_i) \tag{1.24}$$

Chú thích

1. Nếu như trong quá trình va chỉ xảy ra một giai đoạn: giai đoạn biến dạng thì ta có trường hợp va chạm không đàn hồi ($k = 0$).

Do đó ta nhận được các kết quả của va chạm không đàn hồi từ các kết quả của va chạm đàn hồi trong đó chúng ta đặt $k = 0$.

Cụ thể, để nhận được các xung lực của các phản lực liên kết chúng ta viết các phương trình sau:

$$\sum_{i=1}^{n} G_{\alpha i_o} S_i^* + G_{\alpha o} = 0; \quad \alpha = \overline{1, r}, \tag{1.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\sigma i_o} S_i^* = 0; \quad \sigma = \overline{1, n-r} \tag{1.26}$$

còn để nhận được các phương trình xác định trạng thải vận tốc sau va chạm chúng ta áp dụng các phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} G\alpha i_o\ Pi2 + kG_{\alpha o} + \bar{g}_{\alpha o} = 0;\ \alpha = \overline{1, r} \tag{1.27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d\sigma i_o\ Pi2 - d\sigma_o = 0;\ \sigma = \overline{1, n-r} \tag{1.28}$$

trong đó các đại lượng $G\alpha i_o$, $G\alpha_o$; $d\sigma i_o$, $d\sigma_o$ được tính theo các công thức đã được thiết lập ở trên

2. Đối với trường hợp của va chạm hoàn toàn đàn hồi chúng ta có thể nhận được các kết quả của nó từ các kết quả của va chạm đàn hồi, trong đó chúng ta lấy $k = 1$. Cụ thể, để xác định các xung lực của các lực liên kết, chúng ta sử dụng các phương trình

$$\sum_{i=1}^{n} G\alpha i_o\ S_i^* + 2\,G\alpha_o = 0,\ \alpha = \overline{1, r}, \tag{1.29}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d\sigma i_o\ S_i^* = 0,\ \sigma = \overline{1, n-r}, \tag{1.30}$$

còn để xác định trạng thái vận tốc sau va chạm chúng ta viết hệ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} G\alpha i_o\ pi2 + 2\,G_{\alpha o} + \bar{g}_{\alpha o} = 0,\ \alpha = \overline{1, r}, \tag{1.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d\sigma i_o\ pi2 - d\sigma_o = 0,\ \sigma = \overline{1, n-r}, \tag{1.32}$$

3. Các phương trình (1.22), (1.27) và (1.31) có thể thay tương ứng bằng các phương trình (1.22)' và (1.31)':

$$\sum_{i=1}^{n} g\alpha i_o\ \dot{q}i2 + k\,G_{\alpha o} + \bar{g}_{\alpha o} = 0, \tag{1.22)'}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g\alpha i_o\ qi2 + k_{o\alpha}G \mp g_{\alpha o} = 0, \tag{1.27)'}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g\alpha i_o\ \dot{q}i2 + 2G_{\alpha o} + \bar{g}_{\alpha o} = 0, \tag{1.31)'}$$

§ 2. CÁC THÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 1.

Khảo sát bài toán va chạm không đàn hồi của một vật chuyển động song phẳng do tại thời điểm t_o nào đó điểm G của hình phẳng bị buộc phải chuyển động với vận tốc có hai thành phần nằm ngang và thẳng đứng u và v.

Chọn tọa độ suy rộng là x, y và θ, trong đó x, y là tọa độ của khối tâm c của hình phẳng, θ là góc quay của hình phẳng đối với hệ trục tịnh tiến cùng với khối tâm.

Động năng của hệ được tính theo biểu thức:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

ở đó m là khối lượng của hình phẳng và I là moment quán tính của nó đối với khối tâm.

Rõ ràng ta có hệ thức sau:

$$x_G = x + h\cos\theta; \quad y_G = y + h\sin\theta$$

trong đó h là khoảng cách giữa hai điểm C và G.

Va chạm của vật là do đặt đột ngột liên kết dạng:

$$\dot{x} - h\sin\theta\dot{\theta} - u \geqslant 0 ; \dot{y} + h\cos\theta\dot{\theta} - v \geqslant 0$$

Khi chọn tọa độ θ như tọa độ độc lập, chúng ta dễ dàng thiết lập ma trận 1×3 $\| d_{\sigma i_o} \|$

$$\| d_{\sigma i_o} \| = \| h\sin\theta_o \; - h\cos\theta_o \; 1 \|$$

Ma trận ngược của ma trận quán tính là một ma trận chéo 3×3 có các yếu tố sau: $a_{11} = 1/m$, $a_{22} = 1/m$, $a_{33} = 1/I$.

Bây giờ ta tính các ma trận 2×3 $\| g_{\alpha i} \|$ và $\| G_{\alpha i} \|$

$$\| g_{\alpha i} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -h\sin\theta \\ 0 & 1 & h\cos\theta \end{Vmatrix} ; \| G_{\alpha i} \| = \begin{Vmatrix} 1/m & 0 & -h\sin\theta/I \\ 0 & 1/m & h\mathrm{sos}\theta/I \end{Vmatrix}$$

Các ma trận 2×1 $\| \bar{g}_{\alpha o} \|$ và $\| G_{\alpha o} \|$ có dạng

$$\| \bar{g}_{\alpha o} \| = \begin{Vmatrix} -u \\ -v \end{Vmatrix} \| G_{\alpha o} \| = \begin{Vmatrix} (\dot{x}_o - h\sin\theta_o \dot{\theta}_o - u) \\ (\dot{y}_o - h\cos\theta_o \dot{\theta}_o - v) \end{Vmatrix}$$

Các phương trình (1.17) và (1.21) bây giờ có dạng

$$(1/m) S_1^* - (h\sin\theta_o/I) S_3^* + \dot{x}_o - h\sin\theta_o \dot{\theta}_o - u = 0$$

$$(1/m) S_2^* + (h\cos\theta_o/I) S_3^* + \dot{y}_o + h\cos\theta_o \dot{\theta}_o - v = 0,$$

$$h\sin\theta_o S_1^* - h\cos\theta_o S_2^* + S_3^* = 0$$

Từ các phương trình trên chúng ta nhận được:

$$S_1^* = \frac{m}{I + mh^2} [(I + mh^2\cos^2\theta_o)(u - \dot{x}_o) - mh^2\cos\theta_o\sin\theta_o(v - \dot{y}_o) + $$
$$+ Ih\sin\theta_o \dot{\theta}_o],$$

$$S_2^* = \frac{m}{I + mh^2} [(I + mh^2\sin^2\theta_o)(v - \dot{y}_o) + mh^2\cos\theta_o\sin\theta_o(\dot{x}_o - u) -$$
$$Ih\cos\theta_o \dot{\theta}_o],$$

$$S_3^* = \frac{mhI}{I + mh^2}\,[(v - \dot{y}_o)\cos\theta_o - (u - \dot{x}_o)\sin\theta_o - h\dot{\theta}_o].$$

Từ các công thức (1.9) chúng ta nhận được trạng thái vận tốc của cuối giai đoạn va chạm:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{I + mh^2}\,\{I\dot{\theta}_o + mh\,[(v - \dot{y}_o)\cos\theta_o - (u - \dot{x}_o)\sin\theta_o]\},$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_o + \frac{1}{I + mh^2}\,[(I + mh^2\cos^2\theta_o)(u - \dot{x}_o) + mh^2\cos\theta_o\sin\theta_o(v - \dot{y}_o) + Ih\sin\theta_o\,\dot{\theta}_o],$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_o + \frac{1}{I + mh^2}\,(I + mh^2\sin^2\theta_o)(v - \dot{y}_o) + mh^2\cos\theta_o\sin\theta_o(u - \dot{x}_o) - Ih\cos\theta_o\,\dot{\theta}_o].$$

Chú thích:

a) Dễ dàng chỉ ra rằng nếu: $u = \dot{x}_o - h\sin\theta_o\dot{\theta}_o$, $v = \dot{y}_o + h\cos\theta_o\dot{\theta}_o$, tức điểm G của vật không bị cưỡng bức chuyển động thì $S_1^* = S_2^* = S_3^* = 0$; $\dot{x}_2 = \dot{x}_o$, $\dot{y}_2 = \dot{y}_o$ $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_o$.

Trong trường hợp như vậy không gây ra va chạm. Điều này là dễ hiểu vì điều kiện (1.14) không được thỏa mãn.

b) Xét trường hợp điểm G bị dừng đột ngột, tức sau va chạm vật quay quanh điểm cố định G. Khi đó thay $u = 0$; $v = 0$ trong các kết quả đã nhận được chúng ta có:

$$S_1^* = \frac{m}{I + mh^2}\,[(I + mh^2\cos^2\theta_o)\dot{x}_o + mh^2\sin\theta_o\cos\theta_o\,\dot{y}_o - Ih\sin\theta_o\,\dot{\theta}_o].$$

$$S_2^* = \frac{m}{I + mh^2}\,[(I + mh^2\sin^2\theta_o)\dot{y}_o + mh^2\sin\theta_o\cos\theta_o\dot{x}_o + Ih\cos\theta_o\dot{\theta}_o]$$

$$S_3^* = \frac{mhI}{I + mh^2}\,[(\dot{y}_o\cos\theta_o - \dot{x}_o\sin\theta_o + h\dot{\theta}_o)]$$

$$\dot{\theta}_2 = [I\dot{\theta}_o + mh(\dot{x}_o\sin\theta_o - \dot{y}_o\cos\theta_o)]/(I + mh^2).$$

Bằng một phương pháp đơn giản ta nhận được kết quả đã trình bày trong [5] (tr. 20).

Thí dụ 2.

Khảo sát va chạm đàn hồi không ma sát của một thanh đồng chất có độ dài L và khối lượng m, Momen quán tính của thanh đối với khối tâm bằng I, $I = mL^2/12$, với mặt nằm ngang.

Chọn các tọa độ của khối tâm của thanh x, y và góc θ của thanh làm với đường thẳng đứng làm tọa độ suy rộng.

Biểu thức động năng của thanh có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

Va chạm của thanh xảy ra được xem là do xuất hiện đột ngột liên kết dạng:

$$y - \frac{1}{2}L\cos\theta \geqslant 0,$$

nó có thể được viết trong dạng tương đương sau:

$$\dot{y} + \frac{1}{2} L \sin\theta\dot{\theta} \geqslant 0$$

Nếu chọn x và θ làm tọa độ độc lập thì ma trậm $\| d_{\sigma_i} \|$ có dạng:

$$\| d_{\sigma_i} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-L/2) & 1 \end{Vmatrix}$$

Ma trận ngược của ma trận quán tính sẽ là ma trận chéo 3×3, có các yếu tố:

$$a_{11} = 1/m, \quad a_{22} = 1/m, \quad a_{33} = 1/I,$$

Các ma trận 1×3 $\| g_{\alpha o} \|$ và $\| G_{\alpha o} \|$ sẽ có dạng:

$$\| g_{\alpha o} \| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} L \sin\theta_o \end{Vmatrix}; \quad \| G_{\alpha o} \| = \| 0 \quad (1/m) \quad L \sin\theta_o / 2I \|$$

Ma trận $\| \bar{g}_\alpha \|$ và $\| G_{\alpha o} \|$ sẽ là:

$$\| \bar{g}_\alpha \| = \| 0 \|; \quad \| G_{\alpha o} \| = \left\| \left(\dot{y}_o + \frac{1}{2} L \sin\theta_o \dot{\theta}_o \right) \right\|$$

Các phương trình (1.17) và (1.21) bây giờ được viết như sau:

$$\frac{1}{m} S_2^* + \frac{1}{2} \frac{L}{I} \sin\theta_o S_3^* + \left(\dot{y}_o + \frac{1}{2} L \sin\theta_o \dot{\theta}_o \right) \quad (1 + k) = 0,$$

$$S_1^* = 0, \quad -\frac{1}{2} L S^* + S_3^* = 0.$$

Khi giải các phương trình trên chúng ta nhận được:

$$S_1^* = 0, \; S_2^* = m(1 + k) \left(\dot{y}_o + \frac{1}{2} L \sin\theta_o \dot{\theta}_o \right) \Big/ (4 + 3\sin^2\theta_o),$$

$$S_3^* = mL\,(1 + k) \left(\dot{y}_o + \frac{1}{2} L \sin\theta_o \dot{\theta}_o \right) \Big/ 2(4 + 3\sin^2\theta_o).$$

Các vận tốc của cuối va chạm được tính theo các hệ thức (1.9), đó là:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_o + S_1^*/m = \dot{x}_o,$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_o + S_2^*/m = [2(3\sin^2\theta^o - k)\dot{y}_o - (1 + k) L \sin\theta_o \dot{\theta}_o] / 2(1 + 3\sin^2\theta_o).$$

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_o + S_3^*/I = [(1 - 3k \sin^2\theta_o)\dot{\theta}_o - 6L\,(1 + k) \sin\theta_o \dot{y}_o] / (1 + 3\sin^2\theta_o).$$

Có thể xác định trực tiếp trạng thái vận tốc của thanh sau va chạm nhờ các phương trình (1.22) và (1.23). Muốn thế, chúng ta tính ma trận 2×1 $\| d_{\sigma_o} \|$ theo công thức (1.24):

$$\| d_{\sigma_o} \| = \begin{Vmatrix} m\dot{x}_o \\ \frac{1}{2} mL \sin\theta_o \dot{\theta}_o + I\dot{\theta}_o \end{Vmatrix}$$

Các phương trình (1.22) và (1.23) bây giờ có dạng:

$$\dot{y}_2 + \frac{1}{2} L \sin\theta_o \dot{\theta}_o + k \left((\dot{y}_o + \frac{1}{2} L \sin\theta_o \dot{\theta} \right) = 0,$$

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_o = 0,$$

$$-\frac{1}{2} mL \sin\theta_o \dot{y}_2 + I\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} mL \sin\theta_o \dot{y}_o - I\dot{\theta}_o = 0.$$

Các phương trình này cho ngay kết quả đã tìm ở trên.

Đối với trường hợp va chạm không đàn hồi ($k = 0$) chúng ta có:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_o; \qquad \dot{y}_2 = (6\sin^2\theta_o\dot{y}_o - L\sin\theta_o\dot{\theta}_o)/2(1 + 3\sin^2\theta_o),$$

$$\dot{\theta}_2 = (L\dot{\theta}_o - 6\sin\theta_o\dot{y}_o)/(1 + 3\sin^2\theta_o).$$

Kết quả cuối cùng đã đưa ra trong [5]

KẾT LUẬN

Trong bài báo đã tiến hành khảo sát bài toán va chạm đàn hồi của các hệ hôlônôm. Đã nhận được một thuật toán đơn giản cho phép xác định một cách chắc chắn và nhanh chóng các xung lực va chạm của các phản lực và trạng thái vận tốc của hệ sau các giai đoạn va chạm (hai vấn đề này có thể được xác định độc lập đối với nhau). Các kết quả nhận được đã được áp dụng trực tiếp cho các trường hợp va chạm không đàn hồi và va chạm hoàn toàn đàn hồi xem như là những trường hợp riêng.

Địa chỉ
Trường đại học Bách khoa HN

Nhận ngày 6/9/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. APPELL P. Traité de mecanique rationnelle, Paris, t. II, Gauthier—Villars, 1953.
2. DO SANH. On the principle of compatibility and the equations of motion of a constrained mechanical system ZAMM, Berlin. 1980.
3. DO SANH. On the dynamical action of each constraint on a mechanica system, Zagadnienia Drgan Nieliniowych, N° 20, Warsaw. 1979.
4. DO SANH. Về chuyển động của các hệ cơ học chịu liên kết. Luận án tiến sĩ khoa học, Hà nội, 1984.
5. GOLDSMITH W. The theory and physical behavious of collinding solid, London Edward Arnold LTD, 1960.
6. KILCHIEVXKI N. A. Giáo trình Cơ học lý thuyết, NXB « Nauka », 1977. (bằng tiếng Nga).
7. PANOVKO JA G. Nhập môn lý thuyết va chạm. NXB « Nauka », 1977, (bằng tiếng Nga).
8. PARS L. A. A treatise on analytical Dynamics, Heimeannu 1965.
9. PERES J. Mecanique general, Masson et C Editeurs, Paris, 1953.

РЕЗЮМЕ

УДАР МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящей статье представлен метод аналитческой механики для исследований задач об ударе, которые были рассмотрены как задачи внезапного наложения идеальных одностронних связей на механические системы.

Исследования посвящены анализу задач об ударе с использованием принципа совместности. Были получены простые методы для определения скоростей механических систем после окончания удара и импульсы мгновенной реакции.