Tạp chí Cơ học T. IX, Số 2, 1987 (trang 29 — 32)

# SO SÁNH HAI PHƯƠNG PHÁP TRONG BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH BIẾN DẠNG CÁC VẬT THỂ LƯU BIẾN

TÔ VĂN TẤN

Phương pháp thứ nhất được trình bày và ứng dụng trong nhiều công trình của A.N.Guz' [1, 2, 3] trên cơ sở nghiên cứu điều kiện tắt dần của kích động. Các đại lượng đặc trưng cho kích động được biểu diễn dưới dạng tích của biên độ với thừa số chứa thời gian $\exp i\omega t$. Điều kiện ổn định được sử dụng ở dạng $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$. Phương pháp thứ hai của V.D.Kljushnikov [4] dựa vào sự phân tách các điểm phân nhánh giả và xây dựng các tương tự đàn hồi của phương trình trạng thái. Bài báo này nhằm so sánh hai phương pháp nêu trên.

Trước tiên là trình bày sơ lược nội dung hai phương pháp đó.

## §1. PHƯƠNG PHÁP A.N.GUZ'

Trong [1, 2, 3] với các đặt bài toán ba chiều, đã nghiên cứu sự ổn định các hệ từ vật liệu có tính chất lưu biến được viết bởi quan hệ xác định dưới dạng tenxơ như sau:

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, e, \dot{e}) = 0 \tag{1.1}$$

trong đó $\sigma$, $\dot{\sigma}$ — tenxơ ứng suất và tenxơ vận tốc thay đổi ứng suất.

$e$, $\dot{e}$ — tenxơ biến dạng và tenxơ vận tốc biến dạng.

Giả thiết rằng cùng với quá trình cơ bản ứng với $\sigma^{\circ}$, $e^{\circ}$, $\dot{\sigma}^{\circ}$, $\dot{e}^{\circ}$ tồn tại quá trình gần tùy ý.

$$\sigma = \sigma^{\circ} + \Delta\sigma, \qquad e = e^{\circ} + \Delta e$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{\circ} + \Delta\dot{\sigma}, \qquad \dot{e} = \dot{e}^{\circ} + \Delta\dot{e}$$

Xem rằng các quá trình biến đổi chậm, từ (1.1) có thể thu được phương trình được tuyến tính hóa.

Chuyển động tựa tĩnh đối với $\Delta\sigma$, $\Delta e$, $\Delta u$ có thể được viết một cách tượng trưng dưới dạng

$$\begin{aligned} \Delta e &= K[\Delta u], \\ L[\Delta\sigma, \Delta u, \sigma^{\circ}] &= 0, \\ L_B[\Delta\sigma, \Delta u, \sigma^{\circ}] &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó: K, L — những toán tử vi phân tác dụng bên trong vật thể, $L_B$ — toán tử tác dụng trên biên vật thể. Các toán tử đó đều là tuyến tính.

Trong các phần tử của các tenxơ đặc trưng cho kích động tách ra thừa số $\exp i\omega t$, còn các biên độ kích động vẫn ký hiệu như đối với các kích động. Do đó các phương trình đối với các biên độ có dạng trùng với (1.2).

Trong các phương trình được tuyến tính hóa từ phương trình (1.1) nếu ta thay $\Delta\dot{\sigma}$ bằng $\omega i\Delta\sigma$, $\Delta\dot{e}$ bằng $\omega i\Delta e$ thì sẽ thu được quan hệ tuyến tính giữa $\Delta\sigma$, $\Delta e$:

$$\Delta\sigma = E(\Delta e) \tag{1.3}$$

nhưng với các hệ số là số phức.

Kết hợp (1.2) và (1.3) ta được hệ phương trình của các biên độ chuyển vị. Có thể xây dựng được các phương trình đặc trưng của hệ phương trình trong chuyển vị đó và xem chúng như những phương trình đối với $\omega$. Điều kiện ổn định có dạng

$$\mathrm{Im}\,\omega_k \geqslant 0 \tag{1.4}$$

trong đó $\omega_k$ — nghiệm của phương trình đặc trưng. Biên giới của miền ổn định được xác định từ điều kiện

$$\min \{\mathrm{Im}\,\omega_k\} = 0 \tag{1.5}$$

## §2. PHƯƠNG PHÁP V. D. KLJUSHNIKOV

Phương pháp này dựa trên việc phân tách đối với quan hệ xác định các môi trường phức tạp tập hợp các điểm đặc biệt dạng phân nhánh giả.

Xét phương trình dạng (1.1). Đối với quá trình được kích động từ (1.1) có thể viết được phương trình

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}}\Delta\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial f}{\partial \dot{e}}\Delta\dot{e} = 0 \tag{2.1}$$

Trường hợp $\Delta\sigma = \Delta e = 0$, $\Delta\dot{\sigma} \neq 0$, $\Delta\dot{e} \neq 0$ được gọi là phân nhánh bậc một (P1), còn trường hợp $\Delta\dot{\sigma} = \Delta\dot{e} = 0$, $\Delta\sigma \neq 0$, $\Delta e \neq 0$ được gọi là phân nhánh giải bậc không (PGO).

Đối với PGO (2.1) có dạng

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e = 0 \tag{2.2}$$

Trong điều kiện có thể giải được theo $\Delta\sigma$ thì (2.2) cho tương tự đàn hồi

$$\Delta\sigma = \tilde{E}\Delta e \tag{2.3}$$

trong đó $\tilde{E}$ — môđun đàn hồi ảo.

Khi giải bài toán ổn định cần kết hợp (2.3) với (1.2).

Trong [4] chỉ ra rằng đối với quan hệ xác định chứa đạo hàm bậc M có thể tìm các điểm phân nhánh giả bậc cao hơn bậc M bằng cách đạo hàm quan hệ xác định ban đầu đủ số lần. Chẳng hạn M = 1 có thể trực tiếp xác định PGO, đạo hàm một lần quan hệ xác định đó theo t có thể xác định PG1, đạo hàm hai lần xác định PG2, v.v...

Giả sử quan hệ xác định có dạng

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \ldots, \overset{(M)}{\sigma}, e, \dot{e}, \ldots, \overset{(M)}{e}) = 0 \tag{2.4}$$

Điểm PGN của (2.4) ($N < M$) ứng với thời điểm khi $\Delta\overset{(N)}{\sigma} \neq 0$, $\Delta\overset{(N)}{e} \neq 0$, $\Delta\sigma = \Delta e = \ldots = 0$. Lấy biến phân (2.4) và sử dụng định nghĩa PNG ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial \overset{(N)}{\sigma}}\Delta\overset{(N)}{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \overset{(N)}{e}}\Delta\overset{(N)}{e} = 0 \tag{2.5}$$

Trường hợp riêng N = 0

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e = 0 \tag{2.6}$$

Phương trình (2.5) cho ta tương tự đàn hồi dạng

$$\Delta\overset{(N)}{\sigma} = \tilde{E}_N\Delta\overset{(N)}{e}$$

và để giải bài toán ổn định cần kết hợp nó với hệ (1.2), nhưng viết đối với $\Delta\overset{(N)}{\sigma}$, $\Delta\overset{(N)}{e}$, $\Delta\overset{(N)}{u}$

## §3. SO SÁNH HAI PHƯƠNG PHÁP

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng khi nghiên cứu ổn định các hệ lưu biến phương pháp A. N. Guz' cho kết quả trùng với kết quả thu từ PGO theo phương pháp V. D. Kljushnikov.

Ta chỉ quan tâm đến quan hệ xác định còn các phương trình cơ bản khác có dạng trùng nhau khi sử dụng hai phương pháp đó.

a) Trước tiên xét (1.1). Sau khi lấy biến phân (1.1) ta có (2.1). Theo phương pháp A. N. Guz' thay $\Delta\dot{\sigma}$ bằng $\omega_i\Delta\sigma$, $\Delta\dot{e}$ bằng $\omega_i\Delta e$, khi đó (2.1) có dạng :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \dot{e}}\Delta e\right)\omega_i + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e = 0 \qquad (3.1)$$

Không làm thay đổi phương pháp Guz' (điều kiện tắt dần của kích động) có thể giả thiết rằng $\omega$ chỉ chứa phần ảo. Theo điều kiện trên biên giới miền ổn định $I_m\omega = 0$ từ (3.1) ta rút ra :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e = 0$$

Phương trình này trùng với (2.2)

Bây giờ lấy biến phân (2.4) ta thu được :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}}\Delta\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \dot{e}}\Delta\dot{e} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \overset{(N)}{\sigma}}\Delta\overset{(N)}{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \overset{(N)}{e}}\Delta\overset{(N)}{e} = 0. \qquad (3.2)$$

Nếu ta thay $\Delta\overset{(K)}{\sigma}$ bằng $(\omega i)^K\Delta\sigma$ và $\Delta\overset{(K)}{e}$ bằng $(\omega i)^K\Delta e$ trong đó $K = 1, 2, \ldots, M$ thì (3.2) sẽ có dạng :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \dot{e}}\Delta e\right)\omega i + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial \overset{(M)}{\sigma}}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \overset{(M)}{e}}\Delta e\right)(\omega i)^M = 0 \qquad (3.3)$$

ký hiệu $\qquad \omega i = z, \quad \dfrac{\partial f}{\partial \overset{(K)}{\sigma}}\Delta\sigma + \dfrac{\partial f}{\partial \overset{(K)}{e}}\Delta e = a_K$

Khi đó có thể viết (3.3) thành :

$$a_o + a_1 z + \ldots + a_M z^M = 0 \qquad (3.4)$$

và điều kiện $\min\{I_m\,\omega_K\} \geqslant 0$ bây giờ có dạng

$$\min\{Re\, z_K\} \leqslant 0, \ (K = 1, 2, \ldots, M)$$

Không làm thay đổi phương pháp Guz' ở đây giả thiết rằng $\omega_K$ chỉ chứa phần ảo, tức là $z_K$ là số thực. Theo điều kiện trên miền ổn định từ (3.4) rút ra là $a_o = 0$, tức là

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial e}\Delta e = 0$$

phương trình này trùng với (2.6). Nó có thể viết thành dạng tương tự đàn hồi :

$$\Delta\sigma = \tilde{E}\,\Delta e$$

Dễ dàng nhận thấy để xác định $\tilde{E}$ không cần đến phương trình cân bằng mà chỉ dùng đến quan hệ xác định. Từ các so sánh trên rút ra rằng các kết quả của bài toán ổn định thu được theo phương pháp Guz' và từ PGO của phương pháp Kljushnikov là như nhau.

b) Bây giờ ta chỉ ra rằng kết luận trên cũng đúng đối với các quan hệ xác định dạng di truyền.

$$\sigma_{ij}(t) = E_{ijmn}e_{mn}(t) - \int_0^t R_{ijmn}(t-\tau)e_{mn}(\tau)d\tau \tag{3.5}$$

từ (3.5) đối với các kích động ta viết được

$$\Delta\sigma_{ij}(t) = E_{ijmn}\Delta e_{mn}(t) - \int_0^t R_{ijmn}(t-\tau)\Delta e_{mn}(\tau)d\tau \tag{3.6}$$

Khai triển $\Delta e_{mn}(\tau)$ thành chuỗi tại lân cận $\tau = t_o$ đối với PGO ($\Delta\dot{\sigma}_{mn} = \Delta\dot{e}_{mn} = \Delta\ddot{\sigma}_{mn} = \Delta\ddot{e}_{mn} = 0$, $\Delta\sigma_{mn} \neq 0$, $\Delta e_{mn} \neq 0$), ta thu được tương tự đàn hồi

$$\Delta\sigma_{ij}(t) = \tilde{E}_{ijmn}\Delta e_{mn}(t)$$

trong đó

$$\tilde{E}_{ijmn} = E_{ijmn} - \int_0^t R_{ijmn}(t-\tau)d\tau \tag{3.7}$$

Trong [3] đã thu được

$$\Delta\sigma_{ij}(t) = \bar{E}_{ijmn}\Delta e_{mn}(t)$$

trong đó

$$\bar{E}_{ijmn} = E_{ijmn} - \int_0^t R_{ijmn}(t-\tau)\exp i\omega(\tau - t)d\tau \tag{3.8}$$

Phân tích $\exp i\omega(\tau - t)$ thành chuỗi và xét (3.8) như phương trình đại số đối với $\omega i$. Tiến hành tương tự như đối với (3.3) và sử dụng điều kiện $I_m\omega = 0$ ta sẽ thu được

$$\bar{E}_{ijmn} = E_{ijmn} - \int_0^t R_{ijmn}(t-\tau)d\tau$$

trùng với (3.7)

## §4. KẾT LUẬN

Phương pháp Guz' và phân nhánh giả bậc 0 (PGO) của phương pháp Kljushnikov trong bài toán ổn định các vật thể lưu biến dẫn đến kết quả như nhau. Điều này đúng với cả vật thể ba chiều vật liệu có tính chất từ biến hoặc có tính chất di truyền.

*Địa chỉ*
*Trường đại học Xây dựng HN.*

*Nhận ngày 26/3/1986*

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ГУЗЬ А. Н. О трёхмерной теории устойчивости деформирования материалов с реологическими свойствами. Изв АН СССР, МТТ, №5, 1976.
2. ГУЗЬ А. Н. Устойчивости трёхмерных деформируемых тел. Наукова Думка, Киев, 1977.
3. ГУЗЬ А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок Наукова Думка, Киев, 1977.
4. КЛЮШНИКОВ В. Д. К вопросу об устойчивости течения сложных сред. В кн. « Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твёрдого тела. Наука, М., 1984.

(Xem tiếp trang 23)