Tạp chí Cơ học T.IX. số 2. 1987 (trang 24-28)

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ DỊCH CHUYỂN CỦA CÁC CÔNG TRÌNH CỨNG DẺO CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG MẠNH GÂY RA DỊCH CHUYỂN LỚN -I-

VŨ VĂN THẾ, TRẦN BÁ TỊNH

Phương pháp đánh giá dưới dịch chuyển dư của các công trình cứng dẻo chịu tải trọng động đã được cho trong [1, 2]. Nhằm mở rộng khả năng sử dụng của các phương pháp đánh giá và nâng cao độ chính xác của các kết quả nhận được ; trong bài này sẽ trình bày một phương pháp mới đánh giá dưới dịch chuyển dư của các công trình cứng dẻo chịu tải trọng động mạnh gây ra biến dạng lớn. Các đánh giá được xác lập trên cơ sở đưa vào các định nghĩa trường vận tốc biến dạng và ứng suất cho phép trong các bài toán động biến dạng lớn. Đánh giá nhận được chứa hai trường động học cho phép có thể chọn độc lập đối với nhau. Lợi thế trên đây cho phép chúng ta đơn giản hóa tính toán và nâng cao độ chính xác của phương pháp đánh giá dưới.

§ 1. ĐẶT BÀI TOÁN

a) Hệ các phương trình cơ bản.

Xét vật thể cứng dẻo có thể tích V mật độ ρ giới hạn bởi mặt S trơn hoặc trơn từng mẫu, chịu tác dụng lực mặt $P_i(x_i, t)$ trên phần mặt S_p, chịu ràng buộc liên kết trên phần mặt S_u. Vật được đặt trong hệ qui chiếu đề các vuông góc $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Khi xét tới các dịch chuyển lớn $u_i(x_i, t)$ bài toán được biểu diễn trong mô tả Lagrăng với tenxơ ứng suất Piola – Kirchhoff đối xứng hạng hai S_{ij} và tenxơ biến dạng đối xứng Green E_{ij}. Trên cơ sở các nguyên lý cơ bản của cơ học và lý thuyết dẻo chúng ta sẽ thu được các hệ thức sau:

– Các phương trình chuyển động khi bỏ qua lực khối

$$(S_{kn} + S_{nm}\, u_{k,m})_{,n} = \rho\, \ddot{u}_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

– Các điều kiện biên ứng suất :

$$(S_{kn} + S_{nm}\, u_{k,m})\, N_n = P_k \text{ trên } S_p \tag{1.2}$$

Ở đây N_k là thành phần của vectơ pháp tuyến ngoài trên S_p

– Điều kiện biên động học:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^s, \; u_i = u_i^s \text{ trên } S_u \tag{1.3}$$

Mối liên hệ giữa vận tốc với gia tốc :

$$\ddot{u}_i = \frac{d\dot{u}_i}{dt} \tag{1.4}$$

— Điều kiện đầu cho vận tốc và cho dịch chuyển :

$$\dot{u}_i\Big|_{t=0} = \dot{u}_{i_0},\ u_i\Big|_{t=0} = u_{i_0} \qquad (1.5)$$

— Các hệ thức hình học liên hệ giữa vận tốc biến dạng Green $\dot{E}_{ij}$ với các thành phần vận tốc và dịch chuyển :

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{i,m}\, u_{j,m} + \dot{u}_{j,m}\, u_{i,m}\right] \qquad (1.6)$$

— Điều kiện dẻo:

$$f(S_{ij}) \leqslant 0 \qquad (1.7)$$

— Qui luật chẩy

$$\dot{E}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial S_{ij}}\ ; \qquad \lambda \geqslant 0 \qquad (1.8)$$

Ở đây chúng ta sử dụng các ký hiệu sau:

$$(\ )_{,i} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_i}\ ,\ (\dot{\ }) = \frac{d(\ )}{dt}\ .$$

b) Một số định nghĩa.

+ Các thành phần dịch chuyển u_i vận tốc dịch chuyển $\dot{u}_i$, vận tốc biến dạng $\dot{E}_{ij}$ được xác định qua (1.8) thỏa mãn điều kiện không nén được, bảo đảm sự liên tục của vật thể, thỏa mãn các điều kiện biên động học (1.3) trên S_u, được gọi là trường động học cho phép và chúng ta ký hiệu là $\overset{\circ}{u}{}_i^*$, $\dot{E}_{ij}^*$, u_i^*.

+ Các trường ứng suất S_{ij}° thỏa mãn các phương trình chuyển động

$$(S_{kn}^{\circ} + S_{nm}^{\circ}\, u_{k,m}^{\circ})_{,n} = \rho\, \ddot{u}_k^{\circ} \qquad (1.9)$$

Các điều kiện biên

$$(S_{kn}^{\circ} + S_{nm}^{\circ}\, u_{k,m}^{\circ})\, N_n = P_k \text{ trên } S_p \qquad (1.10)$$

Và điều kiện dẻo

$$f(S_{kn}^{\circ}) \leqslant 0 \qquad (1.11)$$

Chúng ta sẽ gọi là trường các ứng suất cho phép, trong trường hợp tổng quát thì u_i° và $\ddot{u}_i^{\circ}$ có thể độc lập với nhau, tức là không thể rút gia tốc $\ddot{u}_i^{\circ}$ qua dịch chuyển u_i° sau hai lần đạo hàm theo thời gian. Các dịch chuyển u_i° phải bảo đảm sự liên tục của vật thể và phải thỏa mãn các điều kiện đầu (1.5) và các điều kiện biên (1.3) đối với dịch chuyển. Tất nhiên là trường vận tốc biến dạng được xây dựng qua u_i° theo (1.6) nói chung là độc lập với các ứng suất S_{ij}°. Trường các ứng suất S_{ij}° theo định nghĩa trên đây là tồn tại vô số trong bài toán được khảo sát.

§2. THIẾT LẬP BIỂU THỨC ĐÁNH GIÁ

Theo định nghĩa ở phần trên khi xét chính vật thể V với dịch chuyển $\overline{u_i}$ và gia tốc $\overline{\ddot{u}_i}$ thỏa mãn các điều kiện liên kết trên biên S_u (1.3), chúng ta sẽ xác định được một lớp các trường ứng suất cho phép $\overline{S_{ij}^{\circ}}$ qua phương trình chuyển động:

$$(S_{kn}^{\circ} + \overline{S_{nm}^{\circ}}\, \overline{u_{k,m}})_{,n} = \rho\, \overline{\ddot{u}_k},\quad k = 1, 2, 3 \qquad (2.1)$$

Thỏa mãn các điều kiện biên

$$(\overline{S_{kn}} + \overset{\circ}{S}_{nm}\, \overline{u_{k,m}})N_n = P_k \text{ trên } S_p \tag{2.2}$$

và điều kiện dẻo

$$f(\overset{\circ}{\overline{S_{kn}}}) \leqslant 0 \tag{2.3}$$

Ở đây chúng ta xem $\dot{\overline{u_i}}$, $\ddot{\overline{u_i}}$ được xác định từ $\overline{u_i}$ qua đạo hàm theo thời gian. Trong trường hợp tổng quát $\dot{\overline{u_i}}$ không nhất thiết phải thỏa mãn điều kiện trên biên S_u về vận tốc và trường vận tốc biến dạng $\dot{\overline{E_{ij}}}$ xác lập từ $\overline{u_i}$ theo (1.6) là độc lập với $\overline{\overset{\circ}{S}_{ij}}$.

Nếu chúng ta xét một trường vận tốc động cho phép $\dot{u}_i^*(x_i, t)$ với thời gian kết thúc chuyển động T^* để cho $\dot{u}_i^*(x_i, T^*) = 0\ \forall_i$, x_i nói chung $\dot{u}_k^* \neq \overline{u_k}$. Nhân hai vế (1.1) với $\dot{u}_i^*$ tích phân cả hai vế theo toàn bộ thể tích V và trong khoảng thời gian (o, T^*): sau khi thực hiện các phép tính và sử dụng các điều kiện biên (1.2) trên S_p, chúng ta sẽ nhận được nguyên lý công ảo của các ứng suất thực S_{ij} và gia tốc thực trên vận tốc dịch chuyển ảo $\dot{u}_i^*$ như sau:

$$\int_0^{T^*}\int_V S_{ij}\dot{E}_{ij}^*\, dvdt = -\int_0^{T^*}\int_V \rho\, \ddot{u}_i\, \dot{u}_i^* dvdt + \int_0^{T^*}\int_{S_p} P_i \dot{u}_i^* dsdt, \tag{2.4}$$

ở đây $\dot{E}_{ij}^* = \dfrac{1}{2}[\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^* + \dot{u}_{i,k}^* u_{j,k} + \dot{u}_{j,k}^* u_{i,k}]$ là trường vận tốc biến dạng động cho phép được xác định từ trường vận tốc động cho phép $\dot{u}_i^*$ và dịch chuyển thực u_i nói chung $\dot{E}_{ij}^*$ và S_{ij} là độc lập đối với nhau.

Chúng ta cũng thực hiện tương tự đối với (2.1) và sử dụng (2.2) sẽ dẫn đến kết quả:

$$\int_0^{T^*}\int_V \overline{\overset{\circ}{S}_{ij}}\, \dot{\overline{E}}_{ij}^* dvdt = -\int_0^{T^*}\int_V \rho\, \ddot{\overline{u_i}}\, \dot{u}_i^* dvdt + \int_0^{T^*}\int_{S_p} P_i \dot{u}_i^* dsdt, \tag{2.5}$$

ở đây

$$\dot{\overline{E}}_{ij}^* = \frac{1}{2}[\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^* + \dot{u}_{i,k}^* \overline{u_{j,k}} + \dot{u}_{j,k}^* \overline{u_{i,k}}]$$

là một trường vận tốc biến dạng động cho phép được xác định qua trường vận tốc $\dot{u}_i^*$ thỏa mãn điều kiện biên vận tốc trên S_u, và trường dịch chuyển $\overline{u_i}$ thỏa mãn điều kiện biên dịch chuyển trên S_u. Trong trường hợp tổng quát $\dot{\overline{E}}_{ij}^*$ không liên hệ với $\overline{\overset{\circ}{S}_{ij}}$ qua qui luật chảy dẻo (1.8).

Khi áp dụng định đề Drucker $(\overline{S_{ij}^*} - \overline{\overset{\circ}{S}_{ij}})\dot{\overline{E}}_{ij}^* \geqslant 0$ ở đây $\overline{S_{ij}^*}$ được xác định qua $\dot{\overline{E}}_{ij}^*$ theo qui luật chảy dẻo. Trong trường hợp tổng quát $\overline{S_{ij}^*} \neq \overline{\overset{\circ}{S}_{ij}}$ và $\overline{S_{ij}^*}$ không thỏa mãn phương trình chuyển động cũng với $\overline{u_i}$, $\rho\ddot{\overline{u_i}}$; thì từ (2.5) chúng ta sẽ nhận được bất đẳng thức sau đây:

$$\int_0^{T^*}\int_V \overline{S_{ij}^*}\, \dot{\overline{E}}_{ij}^* dvdt \geqslant -\int_0^{T^*}\int_V \rho\, \ddot{\overline{u_i}}\, \dot{u}_i^* dvdt + \int_0^{T^*}\int_{S_p} P_i \dot{u}_i^* dsdt. \tag{2.6}$$

Nếu bằng cách nào đó ta có:

$$-\int_0^{T^*}\int_V \rho \ddot{\bar{u}}_i \dot{u}_i^* dvdt \geqslant -\int_0^{T^*}\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dvdt \tag{2.7}$$

thì từ (2.6) chúng ta nhận được kết quả:

$$\int_0^{T^*}\int_V \bar{S}_{ij}^* \dot{\bar{E}}_{ij}^* dvdt \geqslant -\int_0^{T^*}\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dvdt + \int_0^{T^*}\int_{S_p} P_i \dot{u}_i^* dsdt \tag{2.8}$$

Một khi đã chọn $\dot{u}_i^*$, $\bar{u}_i$, các đại lượng $\dot{\bar{E}}_{ij}^*$ sẽ được xác định qua (1.6), $\bar{S}_{ij}^*$ được xác định từ $\dot{\bar{E}}_{ij}^*$ theo qui luật chẩy dẻo (1.8), như vậy vế trái là hoàn toàn xác định. Vế phải của (2.8) chứa duy nhất một đại lượng chưa biết là dịch chuyển thực u_i. Do vậy từ (2.8) chúng ta có thể rút ra biểu thức đánh giá dưới dịch chuyển thực. Hệ thức (2.7) kết hợp với (2.4) cho chúng ta điều kiện để chọn $\dot{u}_i^*$, $\bar{u}_i$ sao cho năng lượng hao tán trên trường ứng suất cho phép $\bar{S}_{ij}^*$ phải tương đương với năng lượng hao tán của trường ứng suất thực gây ra do vận tốc dịch chuyển ảo $\dot{u}_i^*$.

Tích phân từng phần số hạng thứ nhất trong vế phải của (2.8) theo biến thời gian chúng ta sẽ nhận được

$$-\int_0^{T^*}\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dvdt = \int_V \rho \dot{u}_{io} \dot{u}_{io}^* dv + \int_V \rho u_i(T^*) \ddot{u}_i^*(T^*) dv - \int_0^{T^*}\int_V \rho u_i \dddot{u}_i^* dtdv \tag{2.9}$$

Ở đây để nhận được đánh giá đối với thành phần thứ k của dịch chuyển chúng ta cần chọn trường động cho phép có dạng sau:

$$\dot{u}_i^*(x_i, t) = \delta_i^k a(x, t) \text{ với } a(x_i, T^*) = 0 \tag{2.10}$$

và $\quad \dot{a}(x_i, t) \leqslant 0, \quad \ddot{a}(x_i, t) \geqslant 0 \ \forall x_i, t, \quad i = 1, 2, 3.$

Kết hợp (2.8), (2.9) và (2.10) chúng ta sẽ nhận được đánh giá sau

$$W_{k\max} \geqslant \frac{\int_0^{T^*}\int_{S_p} P_i \dot{u}_i^* dsdt + \int_V \rho \dot{u}_{io} \dot{u}_{io}^* dv - \int_0^{T^*}\int_V \bar{S}_{ij}^* \dot{\bar{E}}_{ij}^* dvdt}{-\int_V \rho \ddot{u}_k^*(T^*) dv + \int_0^{T^*}\int_V \rho \dddot{u}_k^* dvdt}. \tag{2.11}$$

Bất đẳng thức (2.11) là đúng với mọi T^*, chúng ta hãy chọn T^* như thế nào để vế phải của (2.11) đạt giá trị lớn nhất.

Từ (2.7) chúng ta sẽ xác định điều kiện để chọn các hàm $\dot{u}_i^*$, $\bar{u}_i$. Thật vậy, tích phân từng phần theo t ở vế phải của (2.7) chúng ta có

$$-\int_0^{T^*}\int_V \rho \ddot{u}_k \dot{u}_k^* dvdt = \int_V \rho \dot{u}_{ko} \dot{u}_{ko}^* dv + \int_0^{T^*}\int_V \rho \dot{u}_k \ddot{u}_k^* dvdt \tag{2.12}$$

Vì các vận tốc thực là dương $\dot{u}_i(x_i, t) \geqslant 0$ và $\dot{u}_i^*(x_i, t) \leqslant 0$ nên từ (2.12) ta suy ra

$$-\int_0^{T^*}\int_V \rho\, \ddot{u}_k \dot{u}_k^* dvdt \leqslant \int_V \rho \dot{u}_{ko} \dot{u}_{ko}^* dv \qquad (2.13)$$

Từ (2.13) chúng ta thấy rằng nếu chọn $\dot{u}_i^*$, $\bar{u}_i$ sao cho:

$$-\int_0^{T^*}\int_V \rho\, \ddot{\bar{u}}_k \dot{u}_k^* dvdt \geqslant \int_V \rho \dot{u}_{ko} \dot{u}_{ko}^* dv \qquad (2.14)$$

thì bất đẳng thức (2.7) được đảm bảo và chúng ta thu được đánh giá (2.11)

§3. KẾT LUẬN

Dựa trên khái niệm các trường cho phép trong bài toán các công trình cứng dẻo chịu tải trọng động trong vùng dịch chuyển lớn, một phương pháp đánh giá dưới các dịch chuyển dư đã được trình bày.

Biểu thức đánh giá (2.11) thu được trên cơ sở chọn các trường động cho phép $\dot{u}_i^*$ và $\bar{u}_i$ thỏa mãn các điều kiện (2.14). So với phương pháp trình bày trong [1, 2] phương pháp mới không cần phải tách tenxơ biến dạng thành phần phi tuyến và tuyến tính, để có đánh giá thích hợp cho phần phi tuyến trên cơ sở đó mới rút ra được đánh giá cần tìm.

Biểu thức đánh giá (2.11) chứa hai trường cho phép $\dot{u}_i^*$, $\bar{u}_i$ có thể chọn độc lập với nhau. Lợi thế trên đây sẽ cho phép chúng ta đơn giản hóa được tính toán và nhận được đánh giá tốt hơn các đánh giá đã có [1].

Minh họa lợi thế của phương pháp mới so với phương pháp đã có sẽ được trình bày chi tiết trong ví dụ bản tròn ở phần II.

Địa chỉ
Phân Viện Cơ T. P. Hồ Chí Minh
Trường đại học tổng hợp Huế

Nhận ngày 21/3/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. VŨ VĂN THẾ, SAWCZUK A. A. Lower bound to large displacements of impulsively loaded plastically orthotropic structures. Int. J. Sol. Struct. Vol. 19 №3, 1983.

2. VŨ VĂN THẾ. Phương pháp đánh giá dịch chuyển lớn của vỏ trụ cứng dẻo chịu tải trọng động. Tạp chí KHKT, tập 22, №2, 1984.

SUMMARY

A NEW DISPLACEMENT BOUND TECHNIQUE FOR RIGID PLASTIC CONTINUA SUBJECTED TO STRONG DYNAMIC LOADING AT LARGE DEFLECTIONS

A new displacement bound technique, which is based on concept of admissible fields has been developed for rigid Plastic continua subjected to strong dynamic loading at large deflections. the lower bound obtained (2.11) depends on kinematically admissible displacement $\bar{u}_i$ and kinematically admissible velocity $\dot{u}_i^*$ which must be chosen so that the condition (2.14) may be satisfide. Parameter T* Would be determinated by maximizing the right hand side of (2.11).