Tạp chí cơ học T.IX, số 2, 1987 (trang 18 – 23)

VỀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA BẢN MỎNG TRONG LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN-DẺO

ĐÀO VĂN DŨNG

Trong [1, 3] các tác giả đã thiết lập bài toán ổn định của bản và vỏ mỏng đàn-dẻo theo tiêu chuẩn rẽ nhánh đồng chủ động [6], khảo sát ổn định của bản và vỏ mỏng ngoài giới hạn đàn hồi cho trường hợp trạng thái xuất phát là thuần nhất. Trong bài này xét bài toán trên cho trường hợp trạng thái xuất phát không thuần nhất bằng cách xây dựng phiếm hàm J và sử dụng phương pháp biến phân để tìm lực tới hạn, xét ví dụ minh họa phương pháp trên.

§1. CÁC HỆ THỨC CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH BẢN MỎNG ĐÀN – DẺO

Xét bản có độ dày h trong hệ tọa độ x, y, z ta vẫn giữ nguyên các giả thiết động học và tĩnh học như trong lý thuyết uốn bản. Ta có

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^*_{ij} - zW_{,ij}\,;\quad N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz\,;\quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{ij} dz \tag{1.1}$$

trong đó ε^*_{ij} là tenxơ biến dạng của mặt giữa, W là độ võng, N_{ij}, M_{ij} là các lực trong và mô men trong tác dụng lên phần tử bản. Chúng thỏa mãn hệ phương trình cân bằng có tính đến sự thay đổi hình học của bản

$$N_{ij,j} + q_i = 0, \tag{1.2}$$

$$M_{ij,ij} + N_{ij}W_{,ij} + q_z = 0. \tag{1.3}$$

Với giả thiết $(W_{,i})^2 \ll 1$, điều kiện biên viết theo chu tuyến chưa biến dạng. Hệ này cùng với liên hệ vật lý giữa ứng suất và biến dạng [1]

$$d\sigma_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u k(s)\,(d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} d\varepsilon_{kk}) + (\Phi'(s) - \sigma_u k(s))\frac{\sigma_{mn} d\varepsilon_{mn}}{\sigma_u^2}\sigma_{ij}, \tag{1.4}$$

$$i, j, m, n = 1, 2$$

và các điều kiện biên, sẽ cho ta hệ kín để tìm nghiệm ở trạng thái xuất phát.

Để thiết lập hệ phương trình cơ bản của bài toán ổn định của bản mỏng theo tiêu chuẩn rẽ nhánh đồng chủ động, ta lấy biến phân (1.2), (1.3) ứng với tiếp tục chính (ký hiệu bởi chỉ số 0) và tiếp tục phụ, rồi lấy hiệu các phương trình ta nhận được các hệ thức đối với hiệu gia số [1].

$$\Delta N_{ij,j} = 0, \tag{1.5}$$

$$\Delta M_{ij,ij} + N^0_{ij}\Delta W_{,ij} + W^0_{,ij}\Delta N_{ij} = 0 \tag{1.6}$$

trong đó

$$\Delta N_{ij} = dN_{ij} - dN^{\circ}_{ij}\,;\ \Delta M_{ij} = dM_{ij} - dM^{\circ}_{ij}\,;\ \Delta W = dW - dW^{\circ};$$

$$\Delta N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_{ij} dz\,;\ \Delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} z\Delta\sigma_{ij} dz\,;$$

$$\Delta\sigma_{ij} = d\sigma_{ij} - d\sigma^{\circ}_{ij}\,;\ \Delta\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon^{\circ}_{ij}\,;\ \Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon^{*}_{ij} - z\Delta W_{,ij}.$$

Theo (1.4) liên hệ vật lý đối với hiệu gia số cho ta

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{2}{3}\,\sigma^{\circ}_{u}k_{\circ}(\Delta\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{kk}) + (\Phi'_{\circ} - \sigma^{\circ}_{u}k_{\circ})\,\frac{\sigma^{\circ}_{mn}\Delta\varepsilon_{mn}}{(\sigma^{\circ}_{u})^{2}}\,\sigma^{\circ}_{ij}. \tag{1.7}$$

Các đại lượng N°_{ij}, σ°_{ij}, ε°_{ij}, σ°_{u}, S°, W° ứng với trạng thái xuất phát. Hệ phương trình (1.5), (1.6) cùng với (1.7) và các điều kiện biên tương ứng cho ta giải bài toán rẽ nhánh đồng chủ động của bản đàn-dẻo.

Sau đây giả thiết rằng trạng thái xuất phát không phụ thuộc vào độ dày (tức Z) và với $W^{\circ} = 0$, khi đó hệ (1.5) đồng nhất thỏa mãn, còn (1.6) sau khi thay (1.7) có dạng sau

$$C_{ijkm}\Delta W_{,ijkm} + C_{ijkm,ij}\Delta W_{,km} - N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,ij} = 0 \tag{1.8}$$

trong đó

$$C_{ijkm} = \frac{\sigma^{\circ}_{u}k_{\circ}h^{3}}{18}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{ij}\delta_{km}) + \frac{h^{3}}{12}\,\frac{\Phi'_{\circ} - \sigma^{\circ}_{u}k_{\circ}}{\sigma^{\circ 2}_{u}}\,\sigma^{\circ}_{ij}\,\sigma^{\circ}_{km} \tag{1.9}$$

Nhận xét rằng việc xác định chính xác lực tới hạn của bài toán (1.8) gặp nhiều khó khăn, vì vậy chúng ta giải gần đúng. Một trong các phương pháp này là phương pháp biến phân.

§2. PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN

Xây dựng phiếm hàm J

$$J = \iint (\Delta M_{ij}\Delta W_{,ij} - N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,i}\Delta W_{,j})dxdy \tag{2.1}$$

ta chứng tỏ rằng bài toán (1.8) dẫn đến phương trình biến phân $\delta J = 0$ và ngược lại từ phương trình này suy ra (1.8) và các điều kiện biên.

Thật vậy, lấy biến phân (2.1) (với trường ΔW đủ trơn, tùy ý, chỉ thỏa mãn điều kiện biên động học) ta nhận được

$$\delta J = \iint [\delta\Delta M_{ij}\Delta W_{,ij} + \Delta M_{ij}\delta\Delta W_{,ij} - N^{\circ}_{ij}\delta(\Delta W_{,i}\,\Delta W_{,j})]dxdy$$

Mặt khác từ các liên hệ (1.7) và M_{ij}, N°_{ij} ta dễ dàng có đẳng thức

$$\delta\Delta M_{ij}\Delta W_{,ij} = \Delta M_{ij}\delta\Delta W_{,ij}$$

$$N^{\circ}_{ij}\delta\Delta W_{,ij}\Delta W_{,j} = N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,i}\delta\Delta W_{,j}$$

vậy

$$\delta J = 2\iint [\Delta M_{ij}\delta\Delta W_{,ij} - N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,i}\,\delta\Delta W_{,j}]dxdy \tag{2.2}$$

Ta lại có

$$\Delta M_{ij}\delta\Delta W_{,ij} = (\Delta M_{ij}\delta\Delta W_{,i})_{,j} - (\Delta M_{ij,j}\delta\Delta W)_{,i} + \Delta M_{ij,ij}\delta\Delta W,$$

$$N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,i}\delta\Delta W_{,j} = (N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,i}\delta W)_{,j} - (N^{\circ}_{ij,j}\Delta W_{,i} + N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,ij})\delta\Delta W \tag{2.3}$$

Thay hai biểu thức này vào (2.2), sau đó sử dụng công thức Stôc biểu diễn tích ıân mặt và tích phân theo chu tuyến, nhận được

$$\delta J = 2\iint (\Delta M_{ij,ij} + N_{ij}\Delta W_{,ij} + N_{ji,j}\Delta W_{,i})\delta\Delta W dxdy +$$

$$+ 2\oint [\Delta M_{ij}\nu_j\delta\Delta W_{,i} - (\Delta M_{ij,j}\nu_i + N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,i}\nu_j)\delta\Delta W]ds \qquad (2.4)$$

ong đó ν_j là các thành phần của véctơ pháp tuyến ngoài của chu tuyến S

Ta biểu diễn (2.3) trong hệ tọa độ địa phương x', y' (hướng theo pháp tuyến $\vec{\nu}$ à tiếp tuyến $\vec{\tau}$ của S). Gọi φ là góc giữa $\vec{\nu}$ và trục x, ta có phép biến đổi sau

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

$$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi$$

hi đó

$$\Delta W_{,i} = \frac{\partial\Delta W}{\partial x'}x'_{,i} + \frac{\partial\Delta W}{\partial y'}y'_{,i}$$

Mặt khác, tại điểm thuộc chu tuyến ta có

$$x'_{,i} = \nu_i,\ y'_{,i} = \tau_i;\ \tau_x = -\nu_y,\ \tau_y = \nu_x,$$

$$\frac{\partial\Delta W}{\partial x'} = \frac{\partial\Delta W}{\partial\nu},\quad \frac{\partial\Delta W}{\partial y'} = \frac{\partial\Delta W}{\partial S}$$

Do vậy

$$\Delta W_{,i} = \frac{\partial\Delta W}{\partial\nu}\nu_i + \frac{\partial\Delta W}{\partial S}\tau_i$$

Trên cơ sở các công thức này, ta nhận được

$$\Delta M_{ij}\nu_j\delta\Delta W_{,i} = \Delta M_{ij}\nu_i\nu_j\frac{\partial\delta\Delta W}{\partial\nu} + \Delta M_{ij}\tau_i\nu_j\frac{\partial\delta\Delta W}{\partial S}$$

$$N^{\circ}_{ij}\nu_j\Delta W_{,i} = N^{\circ}_{ij}\nu_i\nu_j\frac{\partial\Delta W}{\partial\nu} + N^{\circ}_{ij}\tau_i\nu_j\frac{\partial\Delta W}{\partial S} \qquad (2.5)$$

Ký hiệu

$$\Delta M_{\nu\nu} = \Delta M_{ij}\nu_i\nu_j;\ \Delta M_{\nu S} = \Delta M_{ij}\tau_i\nu_j$$

$$N^{\circ}_{ij}\nu_i\nu_j = P_{\nu\nu};\ N^{\circ}_{ij}\tau_i\nu_j = P_{\nu S};\ \Delta M_{ij,j}\nu_i = \Delta Q_\nu \qquad (2.6)$$

'à chú ý rằng

$$N^{\circ}_{ij,j} = 0,$$

$$\Delta M_{\nu S}\frac{\partial\delta\Delta W}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}(\Delta M_{\nu S}\delta\Delta W) - \frac{\partial\Delta M_{\nu S}}{\partial S}\delta\Delta W$$

Khi đó thay (2.5), (2.6) vào (2.4), ta thu được

$$\delta J = 2\iint(\Delta M_{ij,ij} + N^{\circ}_{ij}\Delta W_{,ij})\delta\Delta W dxdy +$$

$$+2\oint\left[\Delta M_{\nu\nu}\frac{\partial\delta\Delta W}{\partial\nu} - \left(\Delta Q_\nu + \frac{\partial\Delta M_{\nu S}}{\partial S} + P_{\nu\nu}\frac{\partial\Delta W}{\partial S} + P_{\nu S}\frac{\partial\Delta W}{\partial S}\right)\delta\Delta W\right]dS. \qquad (2.7)$$

Như vậy nếu ΔW là nghiệm của bài toán (1.8) cùng với các điều kiện biên đối ,ới ΔW, $\partial\Delta W/\partial\nu$ trên chu tuyến đã biết, thì các tích phân trong (2.7) bằng không, do ló bài toán ổn định rẽ nhánh động chủ động dẫn về phương trình biến phân sau

$$\delta J = 0 \qquad (2.8)$$

Ngược lại, từ (2.8) do $\delta\Delta W$ là tùy ý, suy ra phương trình (1.8) và các điều kiện sau

$$R_v = \Delta Q_v + \frac{\partial \Delta M_{vS}}{\partial S} + P_{vv}\frac{\partial \Delta W}{\partial v} + P_{vS}\frac{v\Delta W}{\partial S} = 0,$$

$$\Delta M_{vv} = 0. \tag{2.9}$$

Rõ ràng P_{vv}, P_{vS} là các thành phần lực dọc và tiếp của bản, ΔM_{vv}, ΔM_{vS} là các thành phần mômen uốn và xoắn trên chu tuyến bản, còn ΔQ_v là lực cắt.

Để giải gần đúng phương trình $\delta J = 0$ ta tìm nghiệm dưới dạng

$$\Delta W = \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha \varphi_\alpha(x, y) \tag{2.10}$$

trong đó $\varphi_\alpha(x, y)$ được chọn sao cho ΔW thỏa mãn các điều kiện biên động học, C_α là các hằng số tùy ý. Sau đó thay (2.10) vào biểu thức ΔM_{ij}, còn N°_{ij} là hàm đã biết của (x,y) và một tham số tải nào đó, và thay tất cả vào J rồi tính $\delta J = 0$ dẫn đến

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial J}{\partial C_\alpha}\delta C_\alpha = 0 \tag{2.11}$$

Do δC_α là tùy ý ta suy ra hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với C_α

$$\frac{\partial J}{\partial C_\alpha} = 0; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N$$

hệ này sẽ chứa tham số tải. Từ điều kiện không tầm thường của C_α, suy ra hệ thức xác định tham số tải. Giá trị nhỏ nhất của tải trọng, chính là nghiệm bài toán ổn định.

§3. GIẢI BÀI TOÁN BẢN CHỊU DÃN KHÔNG ĐỀU

Xét bản chữ nhật cạnh a, b gắn bầu lề chịu lực nén theo qui luật $P = P_o\left(1 - \alpha\frac{y}{h}\right)$ theo ox; $0 < \alpha < 1$.

Trước hết có

$$N^\circ_{xx} = -P_o\left(1 - \alpha\frac{y}{b}\right)h \cdot \; N^\circ_{yy} = N^\circ_{xy} = 0;$$

$$\sigma^\circ_{xx} = -P_o\left(1 - \alpha\frac{y}{b}\right); \; \sigma^\circ_{yy} = \sigma^\circ_{xy} = 0. \tag{3.1}$$

Các thành phần mômen là

$$\Delta M_{xx} = -(A + B)\Delta W_{,xx} - B\Delta W_{,kk};$$

$$\Delta M_{xy} = -B\Delta W_{,xy};$$

$$\Delta M_{yy} = -B(\Delta W_{,yy} + \Delta W_{,kk});$$

$$A = (\Phi'_o - \sigma^\circ_u k_o)\frac{h^3}{12}; \quad B = \frac{2}{3}\sigma^\circ_u k_o \frac{h^3}{12}, \; k = 1, 2. \tag{3.2}$$

Phiếm hàm J (2.1) được xác định như sau

$$J = \int_0^a \int_0^b \Big[-(A + 2B)(\Delta W_{,xx})^2 - 2B\Delta W_{,xx}\Delta W_{,yy} - 2B(\Delta W_{,yy})^2$$

$$- 2B\Delta W_{,xy}\Delta W_{,xy} + hP_o\left(1 - \alpha\frac{y}{b}\right)\Delta W_{,x}\Delta W_{,x}\Big]dxdy \qquad (3.3)$$

Tìm nghiệm ΔW thỏa mãn điều kiện biên động học dưới dạng

$$\Delta W = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (3.4)$$

Thay (3.4) vào (3.3), rồi lấy tích phân theo x và y, cuối cùng ta đi đến

$$J = \frac{ab}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{-H_{mn}A_m^2 + P_o h\Big[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)A_{mn}^2 +$$

$$+ \frac{8\alpha}{\pi^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{nj}{(n^2 - j^2)^2}A_{mn}A_{mj}\Big]\Big\} \qquad (3.5)$$

trong đó

$$H_{mn} = (A + 2B)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 4B\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 2B\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \qquad (3.6)$$

Lấy biến phân $\delta J = 0$ và do δA_{mn} tùy ý ta nhận được

$$H_{mn}A_{mn} - P_o h\Big\{A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{\alpha m^2\pi^2}{2a^2}\Big[A_{mn} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{16nj}{\pi^2}\frac{A_{mj}}{(\pi^2 - j^2)^2}\Big]\Big\} = 0 \qquad (3.7)$$

Đây là hệ phương trình đại số tuyến tính vô hạn đối với A_{mn}, từ điều kiện không tầm thường của A_{mn} ta nhận được định thức hệ số của nó bằng không, đó chính là phương trình xác định lực P_o. Tuy nhiên việc nghiên cứu tổng quát này khó khăn, chỉ có thể thực hiện bằng gần đúng, ở gần đúng thứ nhất bằng cách đặt $A_{11} \neq 0$ còn các A_{mn} khác bằng không, từ đó ta nhận được lực tới hạn.

$$P_o^{th} = \frac{\pi^2 h^2}{36b^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}\left[(3\Phi'_o + \sigma_u^o k_o)\frac{b^2}{a^2} + 8\sigma_u^o k_o + 4\sigma_u^o k_o\frac{a^2}{b^2}\right] \qquad (3.8)$$

Nhận xét:

a) Trường hợp bản đàn hồi, ta có

$$\Phi'_o = \sigma_u^o k_o = E$$

từ (3.8) nhận được nghiệm quen biết [2,4]

$$P_o^{th} = \frac{\pi^2 h^2 E}{9b^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \qquad (3.9)$$

b) Trường hợp trạng thái xuất phát là thuần nhất tức là $\alpha = 0$, từ (3.8) suy ra (với a = b)

$$P_o^{th} = \frac{\sigma_u^o k_o \pi^2 h^2}{36a^2} \left(13 + 3 \frac{\Phi_o^\cdot}{\sigma_u^o k_o} \right) \quad (3.10)$$

Kết quả hoàn toàn trùng với [1].

KẾT LUẬN

Trên đây đã thiết lập được phiếm hàm J và sử dụng phương pháp biến phân để nghiên cứu bài toán với trạng thái xuất phát không thuần nhất. Phương pháp này đã tỏ ra có nhiều tiện lợi và cho phép nghiên cứu được một số bài toán phức tạp hơn. Các kết quả trong phần ví dụ minh họa trong các trường hợp riêng đã trùng với các kết quả của các tác giả khác.

Chúng tôi chân thành cảm ơn giáo sư Đào Huy Bích đã hướng dẫn công trình này.

Địa chỉ
Trường đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 20/10/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ĐÀO HUY BÍCH. Bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của bản và vỏ mỏng theo lý thuyết quá trình biến dạng đàn-dẻo. Tạp chí Cơ học, số 2, 1986.
2. TIMOSHENKO S. Theory of elastic stability. N.Y. 1936.
3. ĐÀO HUY BÍCH, ĐÀO VĂN DŨNG. Về sự ổn định của vỏ mỏng trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn-dẻo, Tạp chí cơ học số 3, 1986.
4. ВОЛМИР А.С. Устойчивость упругих систем М., 1963.
5. КЛЮШНИКОВ В.Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М., 1980.
6. КЛЮШНИКОВ В. Д. Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения. Изв АН СССР, МТТ, № 5, 1972.

RESUME

SUR LA STABILITE DE LA MINCE PLAQUE SUIVANT LA THEORIE DES PROCESSUS DE DEFORMATIONS ELASTO – PLASTIQUES

Dans cet article, on a étudié le problème de la stabilité de la mince plaque à l'état de départ non-homogène suivant la théorie des processus de déformation élasto-plastiques. Après avoir établi le fonctionnel J, on a employé la méthode des variations pour calculer le pression critique. Les résultats obtenus, dans des cas particuliers, ont coincidé avec ceux de [1, 2, 4].

SO SÁNH HAI PHƯƠNG PHÁP ... (tiếp theo trang 32)

РЕЗЮМЕ

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ПОДХОДОВ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛ

В статье сокращённо изложены два подхода в задаче устойчивости деформирования реологических тел: подход А. Н. Гузя и подход В. Д. Клюшникова. Показано, что первый подход даёт результат, совпадающий с результатом ПБО второго подхода. Сравнение приводится в общем случае дифференциального определяющего соотношения и в случае определяющего соотношения наследственного типа.