Tạp chí Cơ học T. IX, số 2, 1987 (trang 13 — 17)

VỀ TRẠNG THÁI TỚI HẠN CỦA ỔN ĐỊNH ĐỐI LƯU NHIỆT CỦA CHẤT LỎNG VI CỰC

NGUYỄN XUÂN HUY

Trong [1] đã chứng minh rằng chuyển động đối lưu nhiệt của chất lỏng vi cực tuân theo nguyên lý biến đổi ổn định đều. Trong bài này chúng tôi xét trạng thái tới hạn của ổn định đối lưu nhiệt của chất lỏng vi cực, chứng minh rằng hiệu ứng vi cực làm cho tính ổn định của chuyển động giảm.

§1. ĐẶT BÀI TOÁN

Ta gọi Ω là miền chứa chất lỏng và S là biên. Hệ phương trình tuyến tính mô tả trạng thái tới hạn của chuyển động đối lưu nhiệt trong chất lỏng vi cực dưới dạng toán tử được viết như sau (xem [1]) :

$$-A_1\overline{v} + HB_{12}\overline{w} + R\Pi(T\overline{\gamma}) = 0 \tag{1.1}$$

$$-A_2\overline{w} + HB_{21}\overline{v} - 2H\overline{w} = 0 \tag{1.2}$$

$$-A_3T + \overline{v}\,\overline{\gamma} = 0 \tag{1.3}$$

Ở đây : $\overline{v}$ — vận tốc, $\overline{w}$ — xoay trong, T — nhiệt độ, $\overline{\gamma}$ — véc tơ đơn vị trục Oz, R — số Rayleigh, $A_1 = -\Pi\Delta$, $A_2 = -M$ grad div + N rot rot, $A_3 = -\Delta$, $B_{21} =$ rot, H, M, N là các hằng số dương là $H < 1$, Π — toán tử chiếu từ $L_2(\Omega)$ xuống $\widetilde{L}_2(\Omega)$.

Ta xét $\overline{v}$ thuộc không gian H_1 — đóng của tập các véc tơ sôlênôit trơn triệt tiêu trên biên S với tích vô hướng :

$$(\overline{V}_1, \overline{V}_2)_{H_1} = \int \text{rot}\,\overline{V}_1\, \text{rot}\,\overline{V}_2\, d\Omega\,; \quad \forall\, \overline{V}_1, \overline{V}_2 \in H_1. \tag{1.4}$$

Ta xét $\overline{w}$ thuộc không gian H_2 — đóng của tập các véc tơ trơn triệt tiêu trên biên S với tích vô hướng :

$$(\overline{W}_1, \overline{W}_2)_{H_2} = M \int \text{div}\,\overline{W}_1 \cdot \text{div}\,\overline{W}_2\, d\Omega + N \int \text{rot}\,\overline{W}_1 \cdot \text{rot}\,\overline{W}_2\, d\Omega\,; \ \forall\, \overline{W}_1, \overline{W}_2 \in H_2. \tag{1.5}$$

Ta xét T thuộc không gian H_3 — đóng của tập các hàm trơn triệt tiêu trên biên S với tích vô hướng :

$$(T_1, T_2)_{H_3} = \int \text{grad}\, T_1 \cdot \text{grad}\, T_2\, d\Omega, \ \forall\, T_1, T_2 \in H_3 \tag{1.6}$$

Trong [1] đã chứng minh rằng các chuẩn sinh ra bởi các tích vô hướng (1.4), (1.5), (1.6) tương đương với các chuẩn trong các không gian Sôbôlev bình thường. Các toán tử A_1, A_2, A_3 là tự liên hợp, xác định dương và có các toán tử ngược hoàn toàn liên tục, tự liên hợp, dương và $A_1^{1/2} = B_{21}$.

Chúng ta sẽ xét cấu trúc của tập các trị số Rayleigh tới hạn

§2. CẤU TRÚC TẬP TRỊ SỐ RAYLEIGH TỚI HẠN

Từ (1.3) ta có:

$$T = A_3^{-1}(\overline{v}\,\overline{\gamma}) \tag{2.1}$$

Do $H > 0$ nên toán tử $A_2 + 2H$ có toán tử ngược giới nội $(A_2 + 2H)^{-1}$.

Từ (1.2) ta có:

$$\overline{W} = (A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\overline{V} \tag{2.2}$$

Thay (2.1), (2.2) vào (1.1) ta có:

$$-A_1\overline{V} + HB_{12}(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\overline{V} + R\Pi[\overline{\gamma}\,A_3^{-1}(\overline{V}\,\overline{\gamma})] = 0$$

hay là:

$$[E - A_1^{-1}HB_{12}(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}]\overline{V} = RA_1^{-1}\Pi(\overline{\gamma}\,A_3^{-1}(\overline{V}\,\overline{\gamma})) \tag{2.3}$$

Ta kí hiệu: $A = A_1^{-1}HB_{12}(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}$.

$B = A_1^{-1}\Pi(\overline{\gamma}\,A_3^{-1}(*\,\overline{\gamma}))$.

Bổ đề 1. Toán tử A là tự liên hợp

Chứng minh. Ta có:

$$(A\overline{V}_1, \overline{V}_2)_{H_1} = \int \mathrm{rot}A\overline{V}_1 \cdot \mathrm{rot}\overline{V}_2 d\Omega = \int A_1A\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 d\Omega =$$

$$= \int HB_{12}(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 d\Omega = \int (A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\overline{V}_1 \cdot HB_{21}\overline{V}_2 d\Omega =$$

$$= ((A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\overline{V}_1,\ A_2^{-1}HB_{21}\overline{V}_2)_{H_2}.$$

Dựa vào tính chất tự liên hợp của A_2^{-1}, $(A_2 + 2H)^{-1}$ và tính hoán vị của A_2 và $A_2 + 2H$ ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Bổ đề 2. Toán tử $E - A$ là xác định dương.

Chứng minh. Ta có:

$$((E - A)\overline{V}, \overline{V})_{H_1} = \int \mathrm{rot}(E - A)\overline{V}\,\mathrm{rot}\overline{V} d\Omega =$$

$$= \int [(B_{21}\overline{V})^2 - (A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\overline{V} \cdot HB_{21}\overline{V}]d\Omega \tag{2.4}$$

Ta đổi biến: $(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\overline{V} = \overline{u}$.

Khi đó (2.4) có dạng:

$$((E - A)\overline{V}, \overline{V})_{H_1} = \int \left[\frac{1}{H^2}(A_2\overline{u} + 2H\overline{u})^2 - \overline{u} \cdot (A_2\overline{u} + 2H\overline{u})\right]d\Omega =$$

$$\int \left[\frac{1}{H^2}(A_2\overline{u})^2 + \frac{4H}{H^2}A_2\overline{u} \cdot \overline{u} + 4\overline{u}^2 - A_2\overline{u} \cdot \overline{u} - 2H\overline{u}^2\right]d\Omega =$$

$$\int \left[\frac{1}{H^2}(A_2\overline{u})^2 + \left(\frac{4}{H} - 1\right)A_2\overline{u} \cdot \overline{u} + (4 - 2H)\overline{u}^2\right]d\Omega$$

Do $H < 1$ và A_2 là toán tử xác định dương nên ta suy ra điều phải chứng minh.

Toán tử $(E - A): H_1 \to H_1$ là tự liên hợp, xác định dương. Do đó toán tử $(E - A)^{-1}: H_1 \to H_1$ tồn tại, tự liên hợp, dương và giới nội. Khi đó toán tử $(E - A)^{-1/2}: H_1 \to H_1$ tồn tại, tự liên hợp, dương và giới nội [5].

Bổ đề 3. Toán tử B là hoàn toàn liên tục, tự liên hợp dương.

Chứng minh. Vì A_1^{-1} và A_3^{-1} là hoàn toàn liên tục nên B là hoàn toàn liên tục. Tính chất tự liên hợp và dương của toán tử B được suy ra từ dãy các đẳng thức sau:

$$(B\overline{V}_1, \overline{V}_2)_{H_1} = \int \operatorname{rot} B\overline{V}_1 \cdot \operatorname{rot} \overline{V}_2 \, d\Omega = \int A_1 B \overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 \, d\Omega =$$

$$\int \Pi\left[\overline{\gamma} A_3^{-1}(\overline{V}_1 \overline{\gamma})\right] \cdot \overline{V}_2 d\Omega = \int A_3^{-1}(\overline{V}_1 \overline{\gamma}) \cdot \overline{V}_2 \, \overline{\gamma} \, d\Omega = (A_3^{-1}(\overline{V}_1 \overline{\gamma}), \ A_3^{-1}(\overline{V}_2 \overline{\gamma}))_{H_3}.$$

Bổ đề được chứng minh.

Ta viết lại phương trình (2.3) như sau:

$$(E - A)\overline{v} = R B\overline{v} \qquad (2.5)$$

Ta đưa vào biến mới: $(E - A)^{1/2}\overline{v} = \tau$. Khi đó (2.5) có dạng:

$$(E - A)^{1/2}\tau = RB(E - A)^{-1/2}\tau \to \tau = R(E - A)^{-1/2} B(E - A)^{-1/2}\tau.$$

Từ các kết quả trên suy ra toán tử $(E - A)^{-1/2} B(E - A)^{-1/2}$ là một toán tử tự liên hợp, dương, hoàn toàn liên tục. Ta có định lý sau:

Định lý. Tập trị số Rayleigh tới hạn của bài toán (1.1) – (1.3) là rời rạc và lập thành dãy:

$$0 < R_1 < R_2 < \ldots$$

và tập các hàm riêng $(\overline{v}_1, \overline{w}_1, T_1)$, $(\overline{v}_2, \overline{w}_2, T_2)$, ... tương ứng là đầy đủ.

§ 3. BÀI TOÁN BIẾN PHÂN

Tương tự trong [3] ta thay hàm T bằng hàm $\tilde{T}$ như sau:

$$\tilde{T} = CT \text{ với } C = \sqrt{R} \qquad (3\text{-}1)$$

Khi đó hệ phương trình (1.1) – (1.3) được viết lại như sau:

$$-A_1\overline{v} + HB_{12}\overline{w} + C\Pi(\tilde{T}\overline{\gamma}) = 0 \qquad (3.2)$$

$$-A_2\overline{w} + HB_{21}\overline{V} - 2H\overline{w} = 0 \qquad (3.3)$$

$$-A_3\tilde{T} + C\overline{V}\,\overline{\gamma} = 0 \qquad (3.4)$$

Giả sử $\overline{v}_1, \overline{w}_1, \tilde{T}_1$ là các hàm riêng tương ứng với giá trị $C_1 = \sqrt{R_1}$ nhỏ nhất. Dễ dàng tính được rằng:

$$C_1 = \frac{\| B_{21}\overline{v}_1 - H\overline{w}_1\|^2_{L_2} + \|\overline{w}_1\|^2_{H_2} + \|\tilde{T}_1\|^2_{H_3} + H(2 - H)\|\overline{w}_1\|^2_{L_2}}{(\tilde{T}, \overline{v}_1\overline{\gamma})_{L_2}} \qquad (3.5)$$

Ta xây dựng các phiếm hàm:

$$J = \int [(B_{21}\overline{v} - H\overline{w})^2 + A_2\overline{w} \cdot \overline{w} + A_3\tilde{T} \cdot \tilde{T} + H(2 - H)\overline{w}^2] d\Omega \qquad (3.6)$$

$$K = \int \tilde{T} \cdot \overline{V}\,\overline{\gamma} d\Omega \qquad (3.7)$$

Ta phát biểu bài toán biến phân: Tìm cực trị extr J với các điều kiện

$$K = 1,\ \mathrm{div}\,\bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = (A_2 + 2H)^{-1}B_{21}\bar{v} \tag{3.8}$$

Theo cách trong [4] có thể chứng minh được rằng: các phương trình Euler thu được từ điều kiện:

$$\frac{1}{2}\delta J - C\delta K = 0 \tag{3.9}$$

trùng với hệ phương trình (3.2) – (3.4)

Kết hợp với (3.5) ta có:

$$C_1 = \min\frac{J}{K} \tag{3.10}$$

trên tập các hàm thỏa mãn điều kiện (3.8)

Mặt khác, sử dụng điều kiện cuối cùng trong (3.8) ta có thể đưa (3.6) về dạng sau:

$$J = \|B_{21}\bar{v}\|^2_{L_2} + \|\nabla\tilde{T}\|^2_{L_2} - \|\bar{w}\|^2_{H_2} - 2H\|\bar{w}\|^2_{L_2} \tag{3.11}$$

Khi đó ta có:

$$C_1 = \min\frac{\|B_{21}\bar{v} - H\bar{w}\|^2_{L_2} + \|\bar{w}\|^2_{H_2} + \|\tilde{T}\|^2_{H_3} + H(2-H)\|\bar{w}\|^2_{L_2}}{(\tilde{T}, \bar{v}\bar{\gamma})_{L_2}}$$

$$= \min\frac{\|B_{21}\bar{v}\|^2_{L_2} + \|\nabla\tilde{T}\|^2_{L_2} - \|\bar{w}\|^2_{H_2} - 2H\|\bar{w}\|^2_{L_2}}{(\tilde{T}, \bar{v}\bar{\gamma})_{L_2}} \tag{3.12}$$

trên tập các hàm thỏa mãn điều kiện (3.8)

Trong trường hợp chất lỏng newton trong [3] đã chỉ ra rằng

$$C_1^{new} = \min\frac{\|B_{21}\bar{V}\|^2_{L_2} + \|\nabla\tilde{T}\|^2_{L_2}}{(\tilde{T}, \bar{V}\bar{\gamma})_{L_2}} \tag{3.13}$$

trên tập thỏa mãn điều kiện:

$$K = \int \tilde{T}\cdot\bar{V}\bar{\gamma}\,d\Omega = 1,\ \mathrm{div}\,\bar{v} = 0$$

So sánh (3.12) và (3.13) ta nhận thấy rằng hiệu ứng vi cực làm giảm giá trị số Rayleigh tới hạn có nghĩa là hiệu ứng này làm giảm tính ổn định của chuyển động.

Ta xét bài toán dừng phi tuyến sau:

$$-A_1\bar{V} - P_r^{-1}(\bar{V}\cdot\nabla)\bar{V} + HB_{12}\bar{W} + R\Pi(T\bar{\gamma}) = 0 \tag{3.14}$$

$$-A_2\bar{W} - P_r^{-1}(\bar{V}\cdot\nabla)\bar{W} + HB_{21}\bar{V} - 2H\bar{W} = 0 \tag{3.15}$$

$$-A_3T - (\bar{V}\cdot\nabla)T + \bar{V}\bar{\gamma} = 0 \tag{3.16}$$

trong đó Pr là số Prandtl.

Giả sử bài toán phi tuyến có một nghiệm nào đó $\overline{V}_0$, $\overline{W}_0$, T_0 tương ứng giá trị R_0. Làm tương tự như khi dẫn ra biểu thức (3.5), chú ý rằng:

$$\int (\overline{V}.\nabla)\overline{V}.\overline{V}d\Omega = \int (\overline{V}.\nabla)(\overline{V})^2 d\Omega = \int \operatorname{div} \overline{V}.(\overline{V})^2 d\Omega = 0$$

và tương tự:

$$\int (\overline{V}.\nabla)\overline{W}.\overline{W}d\Omega = 0, \quad \int (\overline{V}.\nabla)\tilde{T}.\tilde{T}\,d\Omega = 0$$

ta có:

$$\sqrt{R_0} = C_0 = \frac{\|B_{21}\overline{V}_0 - H\overline{W}_0\|^2_{L_2} + \|\overline{W}_0\|^2_{H_2} + \|\tilde{T}_0\|^2_{H_3} + H(2-H)\|\overline{W}_0\|^2_{L_2}}{(\tilde{T}_0, \overline{V}_0\,\gamma)_{L_2}}. \quad (3.17)$$

Chú ý đến (3.12) ta có $C_1 < C_0$

Hệ thức này chứng tỏ rằng số Rayleigh tới hạn khi không tính đến các thành phần phi tuyến giảm đi.

Khi không tính đến hiệu ứng vi cực các kết quả thu được ở đây trùng với các kết quả trong [2].

KẾT LUẬN

Trong bài này đã chứng minh rằng tập các trị số Rayleigh tới hạn của chuyển động đối lưu nhiệt trong chất lỏng vi cực là tập rời rạc, dương và tăng dần đều, đã xây dựng phiếm hàm để tính các trị số này, chứng minh rằng hiệu ứng vi cực làm giảm tính ổn định của chuyển động.

Tác giả xin cảm ơn Tiến sĩ Ngô Huy Cần đã có những chỉ dẫn và thảo luận các kết quả của bài này.

Địa chỉ
Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội

Nhận ngày 8/12/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGÔ DUY CAN, NGUYEN XUAN HUY. Sur la convection thermique des fluides micropolaires. Acta mathematica Vietnamica. Vol II. №2. p. 193 – 203. 1986.
2. УХОВСКИЙ М. Р., ЮДОВИЧ В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, Т. 27, №2, стр. 295 — 300. 1963.
3. ГЕРШУНИЙ Г. З., ЖУХОВИЦКИЙ Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Наука, М, 1972.
4. МИХЛИН С. Г. Вариационные методы в математической физике, Наука. М., 1970.
5. ЛЮСТЕРНИК Л. А., СОБОЛЕВ В. И. Элементы функционального анализа. М., 1965.

RESUME

SUR L'ETAT CRITIQUE DE LA STABILITE DE LA CONVECTION THERMIQUE DES FLUIDES MICROPOLAIRE

Dans cette étude on montre que l'ensemble des valeurs critiques du nombre Rayleigh de la convection thermique des fluides micropolaires est discret. Ces valeurs sont positives et forment une suite croissante. Une fonctionnelle est construite pour les calculer. On montre aussi que l'effet micropolaire rend les mouvements des fluides plus instables.