Tạp chí Cơ học T. IX, số 2, 1987 (trang 8 — 12)

VỀ CHUYỂN ĐỘNG ĐỐI LƯU NHIỆT CỦA CHẤT LỎNG CÓ MẶT THOÁNG

NGÔ HUY CẨN

Trong bài báo nghiên cứu bài toán về chuyển động đối lưu nhiệt của chất lỏng nhớt có mặt thoáng. Khác với các công trình nghiên cứu trước đây trong bài này điều kiện nhiệt độ giữ giá trị không đổi thỏa mãn trên mặt thoáng kích động.

§ 1. ĐẶT BÀI TOÁN

Phương trình và điều kiện biên, điều kiện ban đầu của bài toán về các kích động nhỏ của chuyển động đối lưu nhiệt trong chất lỏng nhớt có mặt thoáng ở dạng không thứ nguyên sẽ viết như sau [1] :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla P' + \Delta v + R\gamma T, \text{ div } v = 0, \tag{1.1}$$

$$Pr\frac{\partial T}{\partial t} - (v\gamma) = \Delta T \text{ trong } \Omega \tag{1.2}$$

$$v = 0, \tag{1.3}$$

$$T = 0 \text{ trên } S, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, 2), \ \frac{\partial}{\partial t}\left(P - 2\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) = F^{-1}v_3 \text{ trên } \Gamma, \tag{1.5}$$

$$Pr\frac{\partial T}{\partial t} = v_3 \text{ trên } \Gamma, \tag{1.6}$$

$$v(o) = v_o, \ T(o) = T_o, \ P(o) = P_o \tag{1.7}$$

Ở đây v, T, P — kích động nhỏ của vận tốc, nhiệt độ và áp suất trong chất lỏng, $R = g\beta a L^4/\nu\chi$ — số Rayleigh, $Pr = \nu/\chi$ — số Prandtl, $F = \nu\chi/gL^3$ — số Frud, g — gia tốc trọng trường, ν, β, χ — hệ số nhớt, hệ số nở do nhiệt và hệ số truyền nhiệt của chất lỏng, γa — gradient nhiệt độ của chất lỏng trong trạng thái cân bằng cơ học, γ — véc tơ đơn vị theo chiều thẳng đứng từ dưới lên, L — đặc trưng chiều dài của miền chứa chất lỏng Ω, S — biên cứng, Γ — mặt thoáng của chất lỏng.

Trong [2] đã nghiên cứu bài toán (1.1) ÷ (1.7) cho trường hợp riêng khi Ω là lớp chất lỏng nằm ngang. Trong [1] nhiều bài toán bỏ qua điều kiện biên (1.5), (1.6).

Trong bài này sẽ nghiên cứu bài toán (1.1) ÷ (1.7) trong trường hợp miền Ω là bất kỳ với biên S đủ trơn.

§ 2. CÁC KHÔNG GIAN HÀM VÀ CÁC BÀI TOÁN BỔ TRỢ

Ký hiệu $J(\Omega)$ là không gian con của không gian $L_2(\Omega)$ gồm các véc tơ sôlênôit bình phương khả tích và có thành phần pháp tuyến bằng không trên S.

$W^1_{2,0}(\Omega)$ là không gian Sôbôlev của các véc tơ triệt tiêu trên biên S và có đạo hàm suy rộng bậc 1 bình phương kha tích trong Ω.

Trong [3] đã chứng minh rằng trong $W^1_{2,0}(\Omega)$ chuẩn xác định bằng công thức :

$$\| v \|_{W^1_{2,0}(\Omega)} = E(v, v) = \sum_{i,j}^{3} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega$$

sẽ tương đương với chuẩn Sôbôlev bình thường.

Ký hiệu $H_2(\Omega)$ là không gian Hilbert của các hàm bình phương khả tích trong Ω, $H^1_2(\Omega)$ là không gian Sôbôlev với chuẩn

$$\| T \|_{H^1_2(\Omega)} = \int_{\Omega} |\mathrm{grad}\, T|^2 d\Omega + \int_{S} |T|^2 dS$$

và $H^1_{2,0}(\Omega)$ là không gian con của $H^1_2(\Omega)$ gồm các hàm trong $H^1_2(\Omega)$ và triệt tiêu trên biên S, $H^1_{2,00}(\Omega)$ gồm các hàm trong $H^1_2(\Omega)$, triệt tiêu trên biên $S \cup \Gamma$.

Để nghiên cứu bài toán (1.1) ÷ (1.7) ta xét bài toán bổ trợ sau

Bài toán 1 : Cho hàm $f_1 \in J(\Omega)$. Tìm các hàm u, p_1 thỏa mãn các phương trình và điều kiện biên :

$$-\Delta u + \nabla P_1 = f_1, \ \mathrm{div}\, u = 0 \text{ trong } \Omega,$$

$$u = 0 \text{ trên } S, \ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, 2), \ -P_2 + 2\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \text{ trên } \Gamma.$$

Bài toán 2 :

Cho hàm $\varphi_1 \in L_2(\Gamma) - \{1\}$. Tìm các hàm W, p_2 thỏa mãn các phương trình và điều kiện biên :

$$-\Delta W + \nabla P_2 = 0, \ \mathrm{div}\, W = 0 \text{ trong } \Omega$$

$$W = 0 \text{ trên } S, \ \frac{\partial W_i}{\partial x_3} + \frac{\partial W_3}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, 2), \ -P_2 + 2\frac{\partial W_3}{\partial x_3} = \varphi_1 \text{ trên } \Gamma.$$

Bài toán 3. Cho hàm $f_2 \in H_2(\Omega)$. Tìm hàm T_1 thỏa mãn phương trình và điều kiện biên $-\Delta T_1 = f_2$ trong Ω, $T_1 = 0$ trên $S \cup \Gamma$

Bài toán 4. Cho hàm $\varphi_2 \in H_2^{1/2}(\Gamma)$. Tìm hàm T_2 sao cho

$$\Delta T_2 = 0 \quad \text{trong } \Omega$$
$$T_2 = 0 \quad \text{trên } S, \ T_2 = \varphi_2 \text{ trên } \Gamma.$$

Trong các công trình [3-5] các bài toán 1, 2 đã được nghiên cứu tốt. Từ các kết quả của các công trình này ta có

Bổ đề 1. Với bất kỳ hàm $f_1 \in J(\Omega)$ sẽ tồn tại một nghiệm suy rộng duy nhất của bài toán 1 thỏa mãn hệ thức

$$(u, v)_{W^1_{2,0}(\Omega)} = E(u, v) = (f_1, v)_{J(\Omega)}$$

Gọi A_1^{-1} là toán tử cho nghiệm của bài toán 1 thì A_1 sẽ là toán tử tự liên hợp, dương xác định và $\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = W_{2,0}^1(\Omega)$,

$$(u, v)_{W_{2,0}^1(\Omega)} = (A_1 u, v)_{J(\Omega)} = (A_1^{1/2}u, A_1^{1/2} v)_{J(\Omega)}$$

Toán tử A_1^{-1} là toán tử hoàn toàn liên tục và thuộc lớp toán tử σ_p khi $p > 3/2$.

Bổ đề 2. Với hàm $\varphi_1 \in L(\Gamma) - \{1\}$ sẽ tồn tại một nghiệm suy rộng duy nhất của bài toán 2 thỏa mãn hệ thức

$$(W, v)_{W_{2,0}^1(\Omega)} = E(W, v) = (\varphi_1, v_3)_{L_2(\Gamma)-\{1\}}$$

Gọi Q_1 là toán tử cho nghiệm của bài toán 2 thì Q_1 sẽ là toán tử hoàn toàn liên tục tác động từ $L_2(\Gamma) - \{1\}$ vào $W_{2,0}^1(\Omega)$ và ta có

$$(Q_1\varphi_1, v)_{W_{2,0}^1(\Omega)} = (W, v)_{W_{2,0}^1(\Omega)} = (\varphi, \Gamma v)_{L_2(\Gamma)-\{1\}}$$

Γ — toán tử lấy thành phần pháp tuyến trên biên Γ.

Định nghĩa 1. Ta gọi nghiệm suy rộng của bài toán 3 là hàm $T_1 \in H_{2,00}^1(\Omega)$ thỏa mãn hệ thức

$$(T_1, T)_{H_{2,00}^1(\Omega)} = (f_2, T)_{H_2(\Omega)}$$

Sử dụng công thức Green cho các hàm của $H_{2,00}^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta T_1 T d\Omega = - \int_\Omega \nabla T_1 \nabla T d\Omega$$

và định lý Riss về dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính trong không gian Hilbert ta có thể chứng minh được:

Bổ đề 3. Đối với bất kỳ hàm $f_2 \in H_2(\Omega)$ bài toán 3 sẽ có một nghiệm suy rộng duy nhất. Gọi A_2^{-1} là toán tử cho nghiệm của bài toán này $A_2^{-1}f_2 = T_1$ thì A_2^{-1} sẽ là toán tử tự liên hợp, dương hoàn toàn liên tục và thuộc lớp toán tử σ_p với $p > 3/2$. Toán tử A_2 sẽ là toán tử tự liên hợp, dương xác định trong $H_2(\Omega)$ và $\mathcal{D}(A_2^{1/2}) = H_{2,00}^1(\Omega)$.

$$(T_1, T)_{H_{2,00}^1(\Omega)} = (f_2, T)_{H_2(\Omega)} = (A_2 T_1, T)_{H_2(\Omega)} = (A_2^{1/2}T_1, A_2^{1/2}T)_{H_2(\Omega)}$$

Ta gọi Φ_2 là thác triển giải tích của hàm $\varphi_2 \in H_2^{1/2}(\Gamma)$ vào Ω sao cho $\Phi_2 = 0$ trên S và $\Phi_2 = \varphi_2$ trên Γ. Khi đó $\Phi_2 \in H_{2,0}^1(\Omega)$

Ta định nghĩa toán tử Γ_1 như sau: $\Gamma_1\Phi_2 \equiv \varphi_2$

Làm phép biến đổi $T_2 = -T_3 + \varphi_2$. Để xác định T_3 từ bài toán 4 ta suy ra:

$$\Delta T_3 = \Delta\Phi_2 \text{ trong } \Omega, \; T_3 = 0 \text{ trên } S \cup \Gamma \tag{2.1}$$

Định nghĩa 2. Nghiệm suy rộng của bài toán (2.1) là hàm T_3 thỏa mãn đẳng thức:

$$(T_3, T)_{H_{2,00}^1(\Omega)} = (\Phi_2, T)_{H_{2,00}^1(\Omega)} \tag{2.2}$$

Ở đây $H_{2,00}^1(\Omega) = \{T \in H_2^1(\Omega) \text{ và } T = 0 \text{ trên } S \cup \Gamma\}$

Với bất kỳ hàm $\Phi_2 \in H_{2,0}^1(\Omega)$ thì vế phải của đẳng thức (2.2) là phiếm hàm tuyến tính trong $H_{2,00}^1(\Omega)$. Thật vậy:

$$|\Phi(T)| = \left| \int_\Omega \nabla\Phi_2 \nabla T d\Omega \right| \leqslant \|\nabla\Phi_2\|_{H_2(\Omega)} \|\nabla T\|_{H_2(\Omega)} =$$

$$= \|\Phi_2\|_{H_{2,0}^1(\Omega)} \|T\|_{H_{2,00}^1(\Omega)} \tag{2.3}$$

Có nghĩa là: $|\Phi(T)| \leqslant C\|T\|_{H_{2,00}^1(\Omega)}$

Theo định lý Riss ta sẽ tìm được một hàm T_3 duy nhất thỏa mãn đẳng thức (2.2). Có nghĩa là bài toán (2.1) có một nghiệm suy rộng duy nhất.

Ta gọi: $T_2 = -T_3 + \Phi_2$ là nghiệm suy rộng của bài toán 4. Đặt $T = T_3$. Từ (2.2), (2.3) suy ra:

$$\|T_3\|_{H^1_{2,00}(\Omega)} \leqslant \|\Phi_2\|_{H^1_{2,0}(\Omega)} \tag{2.4}$$

Vì $T_2 = -T_3 + \Phi_2$ nên:

$$\|T_2\|_{H^1_{2,0}(\Omega)} \leqslant \|T_3\|_{H^1_{2,00}(\Omega)} + \|\Phi_2\|_{H^1_{2,0}(\Omega)} \tag{2.5}$$

Từ (2.4), (2.5) suy ra:

$$\|T_2\|_{H^1_{2,0}(\Omega)} \leqslant 2\|\Phi_2\|_{H^1_{2,0}(\Omega)} \leqslant C\|\Gamma_1\Phi_2\|_{H_2^{1/2}(\Gamma)}$$

Để nhận được đánh giá ngay đã sử dụng kết quả của [6]. Gọi Q_2 là toán tử cho nghiệm của bài toán 4: $T_2 = Q_2\varphi_2 \equiv Q_2\Gamma_1\Phi_2$. Từ bất đẳng thức cuối ta có

$$\|Q_2\Gamma_1\Phi_2\|_{H^1_{2,0}(\Omega)} \leqslant C\|\Gamma_1\Phi_2\|_{H_2^{1/2}(\Gamma)} = C\|\varphi_2\|_{H_2^{1/2}(\Gamma)}$$

Hệ thức này chứng tỏ rằng toán tử Q_2 giới nội từ $H_2^{1/2}(\Gamma)$ và $H^1_{2,0}(\Omega)$. Ta đã chứng minh:

Bổ đề 4. Với bất kỳ hàm $\varphi_2 \in H_2^{1/2}(\Gamma)$ bài toán 4 có một nghiệm suy rộng duy nhất và toán tử Q_2 cho lời giải của bài toán 4 là toán tử giới nội.

$$T_2 = Q_2\varphi_2 \tag{2.6}$$

§ 3. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN

Tìm $v = u + w$, $p = p_1 + p_2$, $T = T_1 + T_2$.

Ở đây $\{u, p_1\}$, $\{w, p_2\}$, $\{T_1\}$, $\{T_2\}$ là nghiệm của các bài toán 1, 2, 3, 4 tương ứng.

Theo phương pháp trong [3-5,7] từ phương trình (1.1), (1.2) và các điều kiện biên (1.3), (1.4), (1,5) ta thu được hệ phương trình:

$$\frac{dv}{dt} = -A_1u + RMT \tag{3.1}$$

$$\frac{dw}{dt} = -F^{-1}Q\Gamma v \tag{3.2}$$

với $MT = \Pi\Upsilon T$, toán tử chiếu xuống $J(\Omega)$. Ta viết phương trình (1.2) dưới dạng:

$$P_r\frac{\partial T_1}{\partial t} + P_2\frac{\partial T_2}{\partial t} - v_3 = \Delta T_1 + \Delta T_2 \tag{3.3}$$

Ta nhận xét rằng do $T_1 = 0$ trên ΓUS nên điều kiện (1.6) có dạng

$$P_r\frac{\partial T_2}{\partial t} - v_3 = 0 \qquad \text{trên } \Gamma \tag{3.4}$$

Hệ thức này chứng tỏ rằng hàm $P_r\dfrac{\partial T_2}{\partial t} - v_3$ thuộc $H^1_{2,00}(\Omega)$. Nhân 2 vế (3.3) với $T \in H^1_{2,00}(\Omega)$, tích phân trên Ω ta có

$$\left(P_r\frac{\partial T_1}{\partial t} + P_2\frac{\partial T_2}{\partial t} - v_3,\ T\right)_{H_2(\Omega)} = (\Delta T_1, T)_{H_2(\Omega)} = -(A_2T_1, T)_{H_2(\Omega)}$$

Vì $H^1_{2,00}(\Omega)$ trù mật trong $H_2(\Omega)$ và T là hàm bất kỳ trong $H^1_{2,00}(\Omega)$ nên ta suy ra

$$P_r \frac{\partial T_1}{\partial t} + P_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - v_3 = -A_2 T_1 \quad (3.5)$$

Vi phân hai vế (2.6) theo t ta được

$$\frac{dT_2}{dt} = Q_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} \right)_\Gamma$$

Sử dụng điều kiện (1.6) dưới dạng (3.4) từ hệ thức cuối ta suy ra

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{P_r} Q_2 \Gamma v \quad (3.6)$$

Sử dụng (3.6) ta có thể viết (3.5) dưới dạng

$$P_r \frac{dT_1}{dt} = -A_2 T_1 - Q_2 \Gamma v + Nv, \; Nv \equiv v_3 \quad (3.7)$$

Tương tự trong [7] hệ phương trình (3.1), (3.2), (3.6), (3.7) có thể đưa về phương trình tích phân Vôn te có nhân giới nội hoặc kỳ dị yếu và do vậy chúng nghiệm duy nhất.

Định lý: Bài toán (1.1) ÷ (1.7) có nghiệm suy rộng duy nhất trong không gian $_{2,0}^{1}(\Omega) \times H^1_{2,0}(\Omega)$ nếu $v(o) \in W^1_{2,0}(\Omega)$, $T(o) \in H^1_{2,0}(\Omega)$.

KẾT LUẬN

Trong bài báo đã chứng minh định lý tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng o một bài toán mới trong lý thuyết đối lưu nhiệt.

Địa chỉ:
ện Cơ — Viện KHVN

Nhận ngày 8/12/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

ГЕРШУНИ Г. З., ЖУХОВИЦКИЙ Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Наука, М., 1972.

ИЗАКСОН В.Х, ЮДОВИЧ В.И. О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей. Известия Академии Наук СССР, МЖГ, N°4, 1968.

КРЕЙН С.Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Доклады АН СССР, Т.159, №2, 1964.

КРЕЙН С.Г., ЛАПТЕВ Г.И.К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. Функциональный анализ и его приложения Т.2, № 1, 1968.

КОПАЧЕВСКИЙ Н.Д. О колебаниях капиллярной вязкой вращающейся жидкости. Доклады АН СССР, Т.219, №5, 1974.

НИКОЛЬСКИЙ С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Наука, М., 1977.

КОПАЧЕВСКИЙ Н.Д., НГО ЗУЙ КАН. Об одной задаче теории свободной конвекции. Доклады АН СССР. Т.251, №6, 1980.

РЕЗЮМЕ

О КОНВЕКТИВНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В работе рассматривается линейная задача о конвективном движении вязкой кимаемой жидкости со свободной поверхностью. Доказана теорема существования ения задачи.