

ĐỊNH LÝ MÔ MEN ĐỘNG LƯỢNG ĐỐI VỚI TÂM ĐI ĐỘNG VÀ ỨNG DỤNG TRONG CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN

NGUYỄN ĐĂNG TỖ

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các tài liệu về cơ lý thuyết thường chỉ trình bày: định lý mô men động lượng đối với tâm cố định; đối với gốc tọa độ của hệ qui chiếu quán tính; định lý mô men động lượng đối với khối tâm.

Nội dung của bài báo này là phát triển định lý mô men động lượng đối với tâm đi động bất kỳ trong chuyển động tương đối và tuyệt đối của hệ; ứng dụng định lý này thiết lập phương trình vi phân chuyển động mô tả sự quay của vật rắn chuyển động song phẳng, trong nhiều trường hợp, sẽ đơn giản và nhanh hơn các phương pháp trước đây.

§2. ĐỊNH LÝ MÔ MEN ĐỘNG LƯỢNG TRONG CHUYỂN ĐỘNG TUYỆT ĐỐI ĐỐI VỚI TÂM ĐI ĐỘNG

Xét chuyển động của cơ hệ đối với hệ cố định $O\xi\eta\zeta$. Lấy điểm A bất kỳ trong không gian làm gốc — lập hệ trục động $Axyz$ song song với $O\xi\eta\zeta$.

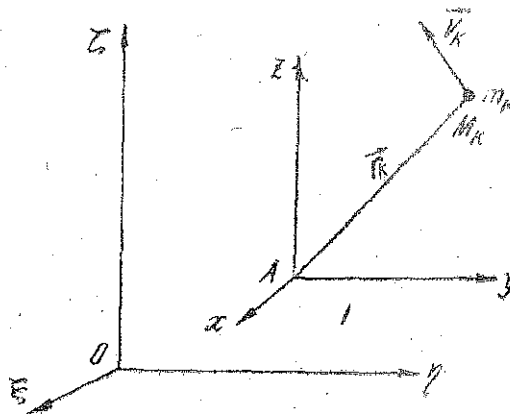
Ta có:

Định lý: Mô men động lượng của cơ hệ đối với tâm đi động A biến đổi theo biểu thức:

$$\vec{L}_A = \sum_k m_A \vec{r}_k \times \vec{v}_k + Q \vec{\omega} \times \vec{v}_A \quad (2.1)$$

Trong đó $Q = M V_c$ — động lượng của hệ.

Chứng minh: Xét chất điểm M_k với khối lượng m_k , bán kính véc tơ trong hệ động là \vec{r}_k .



Hình 1

Theo phương trình Niu-tơn ta có:

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e$$

(trong đó \vec{F}_k^i là nội lực; \vec{F}_k^e là ngoại lực tác dụng lên chất điểm M_k đó).

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \wedge m_k \vec{V}_k) - m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \wedge \vec{V}_k = \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^i + \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^e$$

Lấy tổng theo k ta được:

$$\sum_k m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \wedge \vec{V}_k = \sum_k m_k \vec{V}_k \wedge \vec{V}_k - \sum_k m_k \vec{V}_A \wedge \vec{V}_k = Q \wedge \vec{V}_A$$

và:

$$\vec{L}_A = \sum_k m_A (\vec{F}_k^e) + Q \wedge \vec{V}_A$$

Vì tổng mô men các nội lực đối với mọi điểm đều bằng không.

§3. ĐỊNH LÝ MÔ MEN ĐỘNG LƯỢNG TRONG CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI ĐỐI VỚI TÂM ĐI ĐỘNG

Xét chuyển động tương đối của hệ trong hệ động $Axyz$.

Bằng cách thiết lập tương tự, ta nhận được biểu thức của định lý này:

$$\vec{L}_A = \sum_k m_A (\vec{F}_k^e) - M_{rc} \wedge \vec{V}_A \quad (3.1)$$

Trong đó: \vec{L}_A là mô men động lượng của hệ trong chuyển động tương đối đối với tâm A .

§4. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG

4.1. $\vec{V}_A \equiv 0$; tức là A cố định thì từ (2.1) nhận được biểu thức định lý mô men động lượng đối với tâm cố định

$$\vec{L}_A = \sum_k m_A (\vec{F}_k^e) \quad (4.1)$$

4.2. Nếu lấy khối tâm C làm tâm đi động A ; có 2 trường hợp:

a) Nếu xét chuyển động tương đối của hệ trong hệ tọa độ Kênic này thì do $\vec{r}_c \equiv 0$ nên từ (3.1) ta nhận được biểu thức định lý Kênic:

$$\vec{L}_c = \sum_k m_e (\vec{F}_k^e) \quad (4.2)$$

b) Nếu xét chuyển động tuyệt đối của hệ thì do $\vec{Q} \wedge \vec{V}_A \equiv M \vec{V}_c \wedge \vec{V}_A \equiv 0$ nên từ (2.1) ta nhận được:

$$\vec{L}_c = \sum_k \vec{m}_k (\vec{F}_k^e) \quad (4.3)$$

So sánh (4.2) và (4.3) rút ra kết luận: Biến thiên mô men động lượng đối với khối tâm trong chuyển động tương đối và tuyệt đối là như nhau.

4.3. Nếu $\vec{V}_A = \text{const}$ - tức là A chuyển động thẳng đều. Xét chuyển động tương đối của hệ, ta nhận được biểu thức định lý động lượng trong hệ quán tính:

$$\vec{L}'_A = \sum_k \vec{m}_k (\vec{F}_k^e) \quad (4.4)$$

do trong (3.1) có $\vec{W}_A \equiv 0$

4.4. Nếu \vec{V}_A song song với \vec{V}_c ; do $\vec{V}_A \wedge \vec{V}_c \equiv 0$ nên từ (2.1) ta nhận được:

$$\vec{L}_A = \sum_k \vec{m}_k (\vec{F}_k^e) \quad (4.5)$$

Ở đây, biểu thức sẽ có dạng giống như trường hợp tâm cố định (4.1).

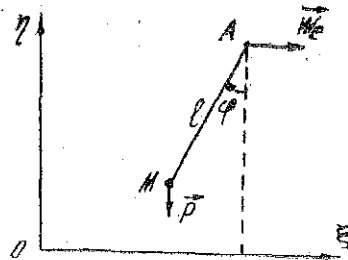
Đặc biệt nếu xét chuyển động tương đối ta thu được các biểu thức đã được trình bày trong [3]

Ví dụ: Xét chuyển động của con lắc có điểm treo dịch chuyển theo phương ngang với $W_A = W_e$.
Viết phương trình vi phân chuyển động:

$$L'_{Az} = -ml\dot{\varphi}; \quad \sum_k m_{Az} (\vec{F}_k^e) = mg'l \sin \varphi;$$

$$(\vec{M}_c \wedge \vec{W}_A)_z = m'W_e \cos \varphi$$

$$\text{Thay vào (3.1)} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{W_e}{l} \cos \varphi = 0$$



Hình 2

§5. ỨNG DỤNG TRONG CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN

5.1. Trong trường hợp vật rắn chuyển động song phẳng ta lấy tâm quay tức thời làm tâm di động $C_* \equiv A$. Khi đó (2.1) sẽ là:

$$\vec{L}_{C_*} = \sum_k \vec{m}_{C_*} (\vec{F}_k^e) + \vec{Q} \wedge \vec{V}_{C_*} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Đạo } \vec{V}_c &= \vec{\omega} \wedge C_* C \quad \text{nên:} \quad \vec{Q} \wedge \vec{V}_{c*} = M \vec{V}_c \wedge \vec{V}_{c*} = -M \vec{V}_c \wedge \frac{dC_* C}{dt} \\ &= -M(\vec{\omega} \wedge C_* C) \wedge \frac{dC_* C}{dt} = \frac{M\omega}{2} \frac{d}{dt} (C_* C)^2 \end{aligned}$$

Thay vào (5.1), thu được:

$$\vec{L}_{c*} = \sum_k m_{c*} \vec{F}_k^e + \frac{M\omega}{2} \frac{d}{dt} (C_* C)^2 \quad (5.2)$$

Hoặc viết dưới dạng hình chiếu trên trục vuông góc với mặt phẳng cơ sở:

$$\frac{d}{dt} (L_{c*z}) = \sum_k m_{c*z} \vec{F}_k^e + \frac{M\omega}{2} \frac{d}{dt} (C_* C)^2 \quad (5.3)$$

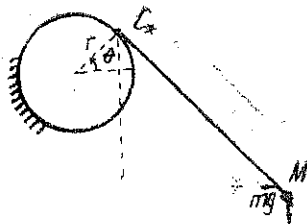
Mặt khác ta luôn có:

$$L_{c*z} = J_{c*z} \omega = [J_{c*z} + M(C_* C)^2] \omega$$

thay vào (5.3) thu được:

$$J_{c*z} = \sum_k m_{c*z} \vec{F}_k^e - \frac{M\omega}{2} \frac{d}{dt} (C_* C)^2 \quad (5.4)$$

Ví dụ: Xét chất điểm khối lượng m , được buộc vào dây quấn quanh hình trụ bán kính r khi dây thẳng đứng nó có độ dài l . Viết phương trình vi phân chuyển động.



Hình 3

Có thể coi khối lượng m được gắn ở đầu thanh chuyển động song phẳng với tâm quay tức thời C_* như trên hình vẽ. Ta có:

$$J_{C_* \zeta} = m(l+r\theta)^2; \quad \sum_k m_{C_* \zeta} \vec{F}_k^e = mg(l+r\theta) \sin\theta; \\ (C_* C)^2 = (l+r\theta)^2$$

Thay vào (5.4) ta thu được:

$$(l+r\theta)\ddot{\theta} + r\dot{\theta}^2 + g \sin\theta = 0$$

TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT: Nếu $C_* C = \text{const}$ (hay nói cách khác; khoảng cách giữa khối tâm và tâm quay tức thời là không đổi) thì từ

(5.2) do $\frac{d}{dt} (C_* C)^2 = 0$ ta thu được:

$$\vec{L}_{C_*} = \sum_k m_{C_*} \vec{F}_k^e \quad (5.5)$$

Tức là có thể áp dụng như đối với tâm cố định.

Cụ thể hơn từ (5.4) ta có được:

$$J_{C_* \zeta} = \sum_k m_{C_* \zeta} \vec{F}_k^e \quad (5.6)$$

Vi dụ:

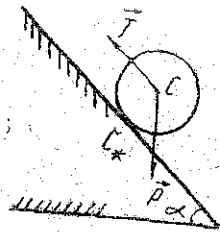
a) Kết trụ bán kính R trọng lượng P lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α ; dưới tác dụng của lực T — như trên hình vẽ. Lập phương trình vi phân chuyển động.

Do $CC_* = R = \text{const}$, nên sử dụng (5.6) ta có:

$$J_{C_*} \ddot{\zeta} = J_C \ddot{\zeta} + \frac{P}{g} CC_*^2 = \frac{P}{g} \frac{R^2}{2} + \frac{P}{g} R^2 = \frac{3}{2} \frac{P}{g} R^2,$$

$$\sum_k m_{C_*} \zeta (\vec{F}_k^e) = TR - PR \sin \alpha.$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \frac{P}{g} R^2 \ddot{\zeta} = TR - PR \sin \alpha \Rightarrow \ddot{\zeta} = \frac{2}{3} g \frac{T - P \sin \alpha}{P}$$



Hình 4

b) Xét cơ cấu trong mặt phẳng thẳng đứng. Thanh đồng chất AB dài $2l$, trọng lượng P ; bỏ qua khối lượng của 2 con chạy và ma sát tại đó. Viết phương trình vi phân chuyển động.

Vi $C_* C = l = \text{const}$, ta có thể sử dụng (5.6).

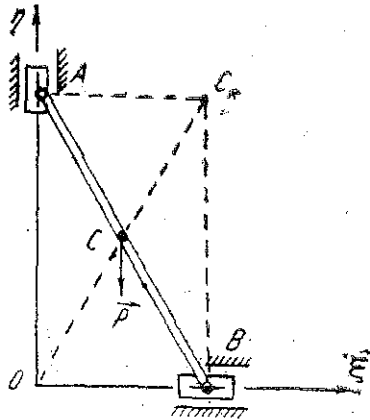
Ở đây:

$$J_{C_*} \ddot{\zeta} = J_C \ddot{\zeta} + \frac{P}{g} l^2 = \frac{4}{3} \frac{P}{g} l^2, \quad \sum_k m_{C_*} \zeta (\vec{F}_k^e) = -Pl \cos \varphi$$

Từ đó ta thu được phương trình chuyển động:

$$\frac{4}{3} l \ddot{\varphi} + g \cos \varphi = 0$$

Nhận xét: Như vậy sử dụng định lý mô men động lượng đối với tâm di động C_* trong phương trình sẽ không chứa phần lực liên kết nên có thể tích phân trực tiếp.

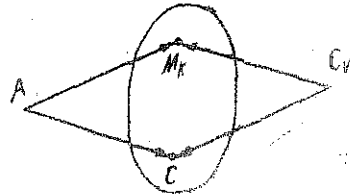


Hình 5

5.2. Biểu thức mô men động lượng đối với tâm di động:

Trong những trường hợp, đối với vật rắn chuyển động song phẳng, ta không chọn điểm A là tâm quay tức thời mà chọn một điểm đặc biệt nào đó để việc giải bài toán đơn giản hơn. Khi đó ta có thể sử dụng công thức tổng quát (2.1) mà trước hết phải đi tính đại lượng L_A .

$$\begin{aligned} L_A &= \sum_k m_k \vec{AM}_k \wedge \vec{V}_k = \sum_k m_k \vec{AM}_k \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{C}_k M_k) \\ &= \sum_k m_k (\vec{C}_k M_k \cdot \vec{AM}_k) \vec{\omega} = \end{aligned}$$



Hình 6

$$\begin{aligned} &= \left[\sum_k m_k (\vec{CM}_k^2 + \vec{MAC} \cdot \vec{CVC} + (\vec{AC} + \vec{CVC}) \sum_k m_k \vec{CM}_k) \right] \vec{\omega} \\ &= [J_{C_*} \zeta + M (\vec{AC} \cdot \vec{CVC})] \vec{\omega} \end{aligned} \quad (5.7)$$

a) Trường hợp: $(\vec{AC} \cdot \vec{CVC}) = 0$ (tức là AC luôn vuông góc với \vec{CVC}).

Ta có $L_A = J_{C_*} \zeta \vec{\omega} \quad (5.8)$

Khi đó từ (2.1) ta thu được:

$$J_{C\zeta} \ddot{\alpha} = \sum_k m_{A\zeta} (\vec{F}_k^c) + (\vec{Q} \wedge \vec{V}_A)_{\zeta} \quad (5.9)$$

b) Trường hợp: $(\vec{AC} \cdot \vec{ACV}) \equiv 0$ (tức là AC luôn vuông góc với \vec{ACV}).

ta có: $(\vec{AC} \cdot \vec{CVC}) = AC^2$ nên từ (5.7) thu được

$$\vec{L}_A = [J_{C\zeta} + MAC^2] \vec{\omega} = J_{A\zeta} \vec{\omega} \quad (5.10)$$

và (2.1) sẽ là:

$$\frac{d}{dt} (J_{A\zeta} \vec{\omega}) = \sum_k \vec{m}_A (\vec{F}_k^c) + \vec{Q} \wedge \vec{V}_A \quad (5.11)$$

Ví dụ: Thanh đồng chất AB dài $2l$, tựa trên nền rập O_x và tường rập O_y . Hệ số ma sát ở đây bằng 1. Tìm phương trình chuyển động của thanh.

Giải: Gọi I là giao điểm của 2 đường thẳng chứa tương ứng 2 phản lực tại A và B.

Phương trình của 2 đường thẳng này là:

$$\begin{aligned} x - y + 2l \cos \alpha &= 0 \quad \text{và} \quad x + y - 2l \sin \alpha = 0 \\ I &\left\{ \begin{array}{l} l(\sin \alpha - \cos \alpha) \\ l(\sin \alpha + \cos \alpha) \\ 0 \end{array} \right\} \\ C &\left\{ \begin{array}{l} l \sin \alpha \\ l \cos \alpha \\ 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ CV &\left\{ \begin{array}{l} 2l \sin \alpha \\ 2l \cos \alpha \\ 0 \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \vec{IC} \cdot \vec{CVC} \equiv 0 \end{aligned}$$

Áp dụng định lý mô men động lượng đối với điểm I. Do $\vec{IC} \cdot \vec{CVC} \equiv 0$ ta có thể sử dụng (5.9).

Trong đó: $J_{C\zeta} = Ml^2/3$,

$$\sum_k m_{I\zeta} (\vec{F}_k^c) = m_{I\zeta} (\vec{P}) = Pl \cos \alpha$$

(phản lực tại A và B đi qua I nên mô men bằng không).

$$\begin{aligned} \text{Từ trên ta có: } \vec{V}_C &\left\{ \begin{array}{l} l \cos \alpha \dot{\alpha} \\ -l \sin \alpha \dot{\alpha} \\ 0 \end{array} \right\} \\ \vec{V}_I &\left\{ \begin{array}{l} l(\cos \alpha + \sin \alpha) \dot{\alpha} \\ l(\cos \alpha - \sin \alpha) \dot{\alpha} \\ 0 \end{array} \right\} \\ \Rightarrow M (\vec{V}_C \wedge \vec{V}_I)_{\zeta} &= Ml^2 \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

Thay vào (5.9) ta thu được kết quả:

$$\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 + \frac{3g}{l} \cos \alpha = 0$$

Nhận xét: Như vậy áp dụng định lý mô men động lượng đối với tâm di động trong phương trình không chứa phản lực nên có thể tích phân trực tiếp.

36. KẾT LUẬN

Định lý trình bày trên tổng quát hơn các định lý trước đây. Áp dụng nó có thể giải khá nhiều bài toán nhanh gọn hơn các phương pháp khác. Đặc biệt trong chuyển động song phẳng của vật rắn, ta có thể sử dụng trực tiếp phương trình vi phân mô tả chuyển động quay của nó trong nhiều trường hợp.

Địa chỉ:
Trường đại học Thủy lợi

Nhận ngày 27/6/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. АППЕЛЬ П. Теоретическая механика. Том 2, М., 1969.
2. МЕЩЕРСКИЙ И. В. Сборник задач по теоретической механике. Изд. Наука, М., 1968.
3. ЧАПЛЫГИН С. А. Исследования по динамике неголономных систем. М. Л., 1949

SUMMARY

THEOREM OF CHANGE IN THE ANGULAR MOMENTUM OF A SYSTEM WITH RESPECT TO A MOVING CENTER.

The Literatures of theoretical mechanics only present the theorem of change in the angular momentum of a system with respect to a fixed center; with respect to the center of mass... In this paper we developed that theorem with respect to any moving center in relative and absolute motion of system.

Having applied this theorem in many special cases of plane motion of a rigid body; we can write directly the differential equation without reactions that describes the rotation of that body so as its integration will be more convenient.

ÒN ĐỊNH CỦA THANH TỪ VẬT LIỆU

(Tiếp trang 25)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. КЛЮШНИКОВ В. Д., ТО ВАН ТАН. Устойчивость при ползучести: Вариант теории и эксперимент. Изв. АН СССР, МТТ, №2, 1986.
2. ТО ВАН ТАН. Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных стержней при длительном действии нагрузки. ДЭП в ВИНТИИ АН СССР у11, 4703-85, 1985.
3. ПЕКУС-САХНОВСКИЙ Д. Н. Экспериментальное исследование несущей способности центрально-сжатых гибких железобетонных стоек при длительном действии нагрузки. В сб. НИИСК: Строительные конструкции, вып. 11, Киев, 1968.

РЕЗЮМЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ИЗ НАСЛЕДСТВЕННОГО СТАРЕЮЩЕГО МАТЕРИАЛА

В данной работе для соотношений наследственного стареющего стержня применяется методика выделения множества особых точек на основе общего понятия псевдобифуркации. Построены кривые разных порядков псевдобифуркации. Из сопоставления этих кривых и экспериментальных данных получено, что границей области устойчивости можно считать $N_{кр} = 2$.