Tạp chí cơ học T. IX. 1987 số 1 trang (16—21)

XÂY DỰNG NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CÓ ĐIỀU KIỆN BIÊN PHI TUYẾN

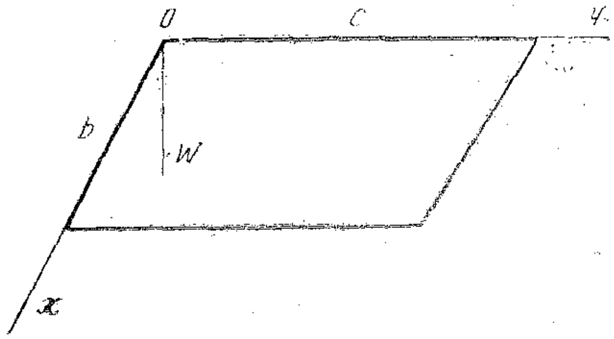
HOÀNG VĂN ĐA

Bài toán dao động của vật thể đàn hồi có hai biến không gian nói chung, của bản mỏng chữ nhật nói riêng, có điều kiện biên phi tuyến, theo tác giả, đến nay, còn chưa được nghiên cứu. Trong trường hợp tổng quát, việc nghiên cứu còn gặp nhiều khó khăn.

Dưới đây, sẽ xây dựng nghiệm cho phương trình, mô tả dao động của bản mỏng chữ nhật, có hai cạnh chịu liên kết tựa, còn hai cạnh kia chịu liên kết đàn hồi phi tuyến.

§1. ĐẶT BÀI TOÁN

Xét bản mỏng chữ nhật có kích thước và hệ tọa độ như hình vẽ.



Trên cạnh y = 0, c chịu liên kết tựa, các cạnh x = 0, b chịu liên kết đàn hồi phi tuyến.

Dao động của bản mỏng chữ nhật được mô tả bằng phương trình quen biết

$$\nabla^4 W + R^4 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \varepsilon F(\theta, x, y, w, \ldots) \tag{1.1}$$

Trong đó $R^4 = m/D$, m là mật độ khối lượng, $D = h^3/12(1 - \nu^2)$ là độ cứng chống uốn của bản, ν — hệ số Poatson, ε — tham số bé dương, F — hàm tuần hoàn chu kỳ 2π theo $\theta = \theta(t)$, $d\theta/dt = \gamma$ và có thể khai triển thành chuỗi Phuarie hữu hạn với các hệ số là giải tích đối với các biến $(x, y, w, \ldots)$.

Điều kiện biên phi tuyến trong trường hợp này có thể viết dưới dạng

$$L_{1j}[W] = L_{1j}\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) = \varepsilon\varphi_j\left(\theta, y, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right), \tag{1.2}$$

$$L_{2j}[W] = L_{2j}\left(W, \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) = \varepsilon\psi_j(\theta, y, W)$$

$$(x = j;\ j = 0, b)$$

$$L_{1k}[W] = L_{1k}\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{1.3}$$

$$L_{2k}[W] = L_{2k}\left(W, \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) = 0$$

$$(y = k;\ k = 0, c)$$

Các hàm φ_j, ψ_j tuần hoàn chu kỳ 2π theo θ và có thể khai triển thành tổng hữu hạn của chuỗi Phuariê với các hệ số là các đa thức nguyên đối với các biến $(x, y, W, \ldots)$; ∇, L_{1j}, L_{2j}, L_{1k}, L_{2k} là các toán tử tuyến tính Laplace với hệ số là các hằng số.

Chú ý rằng, để đơn giản vế phải của (1.1), (1.2), (1.3) chỉ viết các số hạng nhỏ cỡ ε.

§ 2. XÂY DỰNG NGHIỆM

Khi $\varepsilon = 0$, ta có phương trình suy biến và điều kiện biên tuyến tính thuần nhất sau

$$\nabla^4 W + R^4 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1}$$

$$L_{1j}[W] = 0,\ L_{2j}[W] = 0,\ L_{1k}[W] = 0,\ L_{2k}[W] = 0. \tag{2.2}$$

Nghiệm của bài toán biên trên tìm dưới dạng

$$W_o(x, y, t) = Z(x, y)\, T(t) \tag{2.3}$$

thế nghiệm (2.3) vào (2.1) và điều kiện biên (2.2), ta nhận được

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \tag{2.4}$$

$$\nabla^4 Z - \beta^4 Z = 0, \tag{2.5}$$

$$L_{1j}[Z] = 0,\ L_{2j}[Z] = 0,\ L_{1k}[Z] = 0,\ L_{2k}[Z] = 0, \tag{2.6}$$

trong đó

$$\beta^4 = R^4 \omega^2. \tag{2.7}$$

Giả sử rằng, từ phương trình (2.5), với điều kiện biên tuyến tính (2.6), tìm được các giá trị riêng β_{rs} tương ứng với các hàm riêng

$$Z_{rs}(x, y) = X_{rs}(x) \sin \frac{S\pi y}{C} \quad (r, s = 1, 2, \ldots) \tag{2.8}$$

trực giao trên miền chữ nhật $\{0 \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant C\}$. Theo (2.7) các tần số riêng ω_{rs} được xác định. Do đó

$$W_o(x, y, t) = \sum_{r,s=1}^{\infty} A_{rs} Z_{rs} \cos(\omega_{rs} t + \psi_{rs}) \tag{2.9}$$

trong đó A_{rs}, ψ_{rs} là hằng số tùy ý được xác định từ điều kiện đầu.

Giả sử rằng, hệ đang xét tồn tại dao động không tắt dần với tần số ω_{11} và không có nội cộng hưởng, tức là

$$\omega_{rs} - n\omega_{11} \neq 0. \tag{2.10}$$

Xét trường hợp cộng hưởng $\omega_{11} \approx \frac{p}{q}\gamma$, (2.11)

p, q là hai số nguyên dương và nguyên tố đối với nhau.

Với các giả thiết đó, nghiệm của bài toán biên (1.1), (1.2), (1.3) tìm dưới dạng tiệm cận:

$$W(x, y, t) = aZ_{11}\cos\varphi + \varepsilon U_1(x, y, a, \varphi, \theta) + \varepsilon^2 U_2(x, y, a, \varphi, \theta) + \ldots, \tag{2.12}$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\omega_{11} - \frac{p}{q}\gamma\right) + \varepsilon B_1(a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(a, \psi) + \ldots, \tag{2.13}$$

$$\varphi = \frac{p}{q}\theta + \psi.$$

Thay (2.12) vào phương trình (1.1) và các điều kiện biên (1.2), (1.3), chú ý đến (2.13), trong xấp xỉ thứ nhất hoàn thiện, chúng ta nhận được

$$\nabla^4 U_1 + R^4\left(\omega_{11}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \gamma\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 U_1 = F_1 +$$

$$+ R^4\left\{\left[\left(\omega_{11} - \frac{p}{q}\gamma\right)a\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + 2\omega_{11}A_1\right]\sin\varphi - \left[\left(\omega_{11} - \frac{p}{q}\gamma\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2a\,\omega_{11}B_1\right]\cos\varphi\right\}Z_{11}. \tag{2.14}$$

Hàm U_1 cần thỏa mãn các điều kiện biên sau

$$L_{1j}[U_1] = \varphi_j^{(1)},\ L_{2j}[U_1] = \psi_j^{(1)},$$

$$L_{1k}[U_1] = 0,\ L_{2k}[U_1] = 0, \tag{2.15}$$

ở đây

$$F_1 = F(\theta, x, y, aZ_{11}\cos\varphi, \ldots), \tag{2.16}$$

$$\varphi_j^{(1)} = \varphi_j(\theta, y, aZ_{11}(0, y)\cos\varphi, \ldots),$$

$$\psi_j^{(1)} = \psi_j(\theta, y, aZ_{11}(b, y)\cos\varphi, \ldots).$$

Nghiệm của bài toán biên (2.14), (2.15), tìm dưới dạng

$$U_1(x, y, t) = V_1(x, y, t) + W_1(x, y, t). \tag{2.17}$$

Thế (2.17) vào (2.14) và (2.15), ta nhận được

$$\nabla^4 V_1 + R^4\left(\omega_{11}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \gamma\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 V_1 = -\nabla^4 W_1 - R^4\left(\omega_{11}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \right.$$

$$\left. + \gamma\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 W_1 + F_1 + R^4\left\{\left[\left(\omega_{11} - \frac{p}{q}\gamma\right)a\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + 2\omega_{11}A_1\right]\sin\varphi - \right.$$

$$\left. - \left[\left(\omega_{11} - \frac{p}{q}\gamma\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2a\,\omega_{11}B_1\right]\cos\varphi\right\}Z_{11}, \tag{2.18}$$

$$L_{1j}[V_1] + L_{1j}[W_1] = \varphi_j^{(1)},\ L_{2j}[V_1] + L_{2j}[W_1] = \psi_j^{(1)},$$

$$L_{1k}[V_1] + L_{1k}[W_1] = 0,\ L_{2k}[V_1] + L_{2k}[W_1] = 0. \tag{2.19}$$

Trong đó $[W_1]$ là hàm phụ được xác định từ phương trình và các điều kiện biên phi tuyến sau

$$\frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} = 0, \tag{2.20}$$

$$L_{1j}[W_1] = \varphi_j^{(1)},\ L_{2j}[W_1] = \psi_j^{(1)},\ L_{1k}[W_1] = 0,\ L_{2k}[W_1] = 0. \tag{2.21}$$

Bây giờ chúng ta chọn hàm $[W_1]$ có dạng sau

$$W_1(x, y, t) = [a_0(t)\,x^3 + a_1(t)\,x^2 + a_2(t)\,x + a_3(t)]\,f(y) \tag{2.22}$$

trong đó

$$f(y) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin\frac{S\pi y}{C} \tag{2.23}$$

b_s là các hằng số nào đó. Khai triển các hàm $\varphi_j(a, y, \varphi, \theta)$, $\psi_i(a, y, \varphi, 0)$ dưới dạng

$$\varphi_j = \sum_{s=1}^{\infty} C_s \sin\frac{S\pi y}{C},\ C_s = \frac{2}{C}\int_0^C \varphi_j^{(1)} \sin\frac{S\pi y}{C}\,dy, \tag{2.24}$$

$$\psi_j = \sum_{s=1}^{\infty} d_s \sin\frac{S\pi y}{C},\ d_s = \frac{2}{C}\int_0^C \psi_j^{(1)} \sin\frac{S\pi y}{C}\,dy. \tag{2.25}$$

Với cách chọn W_1 ở (2.22), phương trình (2.20) tự thỏa mãn, Thế biểu thức (2.22) vào các điều kiện biên (2.21) và chú ý đến các khai triển (2.23), (2.24), (2.25), rồi cân bằng điều hòa, chúng ta tìm được

$$W_1(x, y, t) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{s=1}^{\infty} A_{js}\, x^{3-j} \sin\frac{S\pi y}{C}. \tag{2.26}$$

trong đó

$$A_{js} = a_j(t)\, b_s \tag{2.27}$$

đã được xác định

Thế biểu thức của hàm W_1 từ (2.26) vào (2.18) và (2.19) dễ dàng thấy rằng V_1 được xác định từ bài toán biên sau với điều kiện biên tuyến tính thuần nhất

$$\nabla^4 V_1 + R^4\left(\omega_{11}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \gamma\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 V_1 = F_1^* + R^4\left\{\left[\left(\omega_{11} - \frac{p}{q}\gamma\right) a\,\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + 2\omega_{11} A_1\right]\sin\varphi - \left[\left(\omega_{11} - \frac{p}{q}\gamma\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2a\,\omega_{11} B_1\right]\cos\varphi\right\} Z_{11} \tag{2.28}$$

$$L_{1j}[V_1] = 0,\ L_{2j}[V_1] = 0,\ L_{1k}[V_1] = 0,\ L_{2k}[V_1] = 0, \tag{2.29}$$

$$(x = j,\ j = 0, b;\ y = k;\ k = 0, C)$$

$$F_1^* = -\frac{2\partial^4 W_1}{\partial x^2\,\partial y^2} - \frac{\partial^4 W_1}{\partial y^4} - R^4\left(\omega_{11}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \gamma\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 W_1 + F_1 \tag{2.30}$$

Thuật toán xây dựng nghiệm tiệm cận của bài toán biên (2.28), (2.29) trong trường hợp cộng hưởng đơn giản cũng như cộng hưởng tổng quát có thể xem ở [4, 5].

Như vậy trong xấp xỉ thứ nhất hoàn thiện, nghiệm của bài toán biên, có hai biến không gian và điều kiện biên phi tuyến đã được xây dựng.

§ 3. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Xét dao động của bản mỏng chữ nhật được mô tả bằng phương trình và các điều kiện biên sau đây

$$\Delta^4 W + R^4 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \tag{3.1}$$

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_{x=0,\, b} = 0, \quad W\Big|_{x=0,\, b} = 0, \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{y=0,\, c} = 0, \quad W\Big|_{y=0,\, c} = 0, \qquad (3.3)'$$

$$\left.\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right|_{x=0} = -kW + \varepsilon \sin\frac{\pi y}{c}\sin\gamma t. \qquad (3.3)$$

Trong đó $k = B/D$, B – độ cứng của lò xo, $\varepsilon = A/D$, A – là biên độ lực kích động coi là nhỏ.

Áp dụng thuật toán và các công thức đã trình bày ở trên, sau một loạt các phép tính cần thiết, tìm được phương trình để xác định giá trị riêng và các hàm riêng tương ứng.

$$2k + \lambda_{1s}\lambda_{2s}^2 \operatorname{cth}\lambda_{1s} b + \lambda_{1s}^2 \lambda_{2s} \operatorname{cth}\lambda_{2s} b = 0, \tag{3.4}$$

$$\lambda_{1s}^2 = \frac{s^2\pi^2}{C^2} + \beta^2, \quad \lambda_{2s}^2 = \frac{s^2\pi^2}{C^2} - \beta^2, \tag{3.5}$$

$$Z_{rs}(x, y) = X_{rs}(x) \sin\frac{s\pi y}{C}, \tag{3.6}$$

$$X_{rs}(x) = C_{rs}^{(1)}\left(\operatorname{sh}\lambda_{rs}^{(1)} x + \frac{\lambda_{rs}^{(1)}}{\lambda_{rs}^{(2)}} \operatorname{sh}\lambda_{rs}^{(2)} x\right) +$$

$$+ C_{rs}^{(2)}\left(\operatorname{ch}\lambda_{rs}^{(1)} x - \frac{2k}{(\lambda_{rs}^{(2)})^3} \operatorname{sh}\lambda_{rs}^{(2)} x - \left(\frac{\lambda_{rs}^{(1)}}{\lambda_{rs}^{(2)}}\right)^2 \operatorname{ch}\lambda_{rs}^{(2)} x\right) \tag{3.7}$$

Ở đây $C_{rs}^{(1)}$, $C_{rs}^{(2)}$ là các hằng số, được xác định sai khác một nhân tử tùy ý, từ phương trình :

$$C_{rs}^{(1)}\left(\operatorname{sh}\lambda_{rs}^{(1)} b + \frac{\lambda_{rs}^{(1)}}{\lambda_{rs}^{(2)}} \operatorname{sh}\lambda_{rs}^{(2)} b\right) +$$

$$+ C_{rs}^{(2)}\left(\operatorname{ch}\lambda_{rs}^{(1)} b - \frac{2k}{(\lambda_{rs}^{(2)})^3} \operatorname{sh}\lambda_{rs}^{(2)} b - \left(\frac{\lambda_{rs}^{(1)}}{\lambda_{rs}^{(2)}}\right)^2 \operatorname{ch}\lambda_{rs}^{(2)} b\right) = 0 \tag{3.8}$$

Hàm W1 trong trường hợp này dễ dàng xác định được

$$W_1(x, y, t) = [A_0(t)x^3 + A_1(t)x^2 + A_2(t)x + A_3(t)] \sin \frac{\pi y}{C} \tag{3.9}$$

$$A_0(t) = \frac{-\nu\pi^2C^2\sin\gamma t}{2[\pi^2(3C + \nu\pi^2 b) + 3C^2(kbC^2 - \nu\pi^2)]},$$

$$A_1(t) = \frac{3\nu\pi^2 bC^2\sin\gamma t}{2[\pi^2(3c + \nu\pi^2 b) + 3C^2(kbC^2 - \nu\pi^2)]},$$

$$A_2(t) = \frac{-C^2(3C^2 + \nu\pi^2 b^2)\sin\gamma t}{\pi^2(3C + \nu\pi^2 b) + 3C^2(kbC^2 - \nu\pi^2)},$$

$$A_3(t) = \frac{3bC^4\sin\gamma t}{\pi^2(3c + \nu\pi^2 b) + 3C^2(kbC^2 - \nu\pi^2)}.$$

§ 4 VÀI NHẬN XÉT

1. Bằng cách đặt biến, đã chuyển bài toán có điều kiện biên phi tuyến thành bài toán có điều kiện biên tuyến tính, để xây dựng nghiệm bằng phương pháp tiệm cận đã biết [3, 4].

2. Điều kiện biên phi tuyến được chuyển vào phương trình như lực phân bố và có ảnh hưởng rất lớn đến các đặc trưng dao động của các cơ hệ đã xét trước đây, mà có điều kiện biên tuyến tính.

3. Có nhận xét rằng, thuật toán trên đây có thể áp dụng cho hệ dao động được mô tả bằng phương trình đạo hàm riêng cấp cao có điều kiện phi tuyến.

Địa chỉ
Trường Đại học Mỏ — Địa chất

Nhận ngày 23/11/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN ĐẠO. Nonlinear oscillations of high order systems. National center for scientific research of Vietnam, 1979.

2. ЧАН КИМ ТЬИ. Асимптотические решения уравнений в частных производных высшего порядка. Укр. мат. журн. том 34, № 3, 1982.

3. МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю. А., МОСЕЕНКОВ Б. И. Асимптотические решения уравнения в частных производных. Изд. КГУ, Киев, 1976.

4. ХОАНГ ВАН ДА. Построение асимптотических решений уравнений в частных производных высокого порядка с двумя пространственными переменными Укр. мат. журн. том 36, № 1, 1984.

5. ХОАНГ ВАН ДА. Параметрические колебания стержня с учётом ползучести её материала и нелинейных краевых условий. Revue Roumaine des sciences techniquees mecaniquee appliquee. № 5, 1984.

SUMMARY

SOLUTION OF THE PARTIAL DERIVATIVE EQUATION WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

In this paper, the asymptotic method has been used to construct the solution of the partial derivative equation with nonlinear conditions, describing vibrations of the rectangular thin plate.

It is shown that the physical nonlinearity of the boundary has influence on oscillational characteristics of systems.