

## NGHIỆM DỪNG CỦA BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT - CHẤT TRONG MÔI TRƯỜNG XÓP BI NUNG NÓNG BỞI NGUỒN NHIỆT KHỐI

DƯƠNG NGỌC HẢI

Xét bài toán thẩm và nung nóng chất lỏng có độ nhớt cao (thành phần thứ nhất) trong môi trường xốp (thành phần thứ hai) bởi nguồn nhiệt khối do hấp thụ năng lượng của sóng điện từ cao tần (SDT CT). Thành phần thứ nhất được giả thiết lúc đầu nằm ở trạng thái lỏng (có thể chuyển động được khi có chênh áp) hoặc rắn (không thể chuyển động được dưới tác dụng của thay đổi áp suất). Nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất và tính chất những nghiệm dừng của bài toán trong miền không gian hữu hạn hoặc vô hạn.

Kết quả bài toán trên có thể sử dụng trong việc sấy khô làm sạch môi trường xốp, trong việc khai thác, làm tăng hệ số ra vĩa của dầu thô có độ nhớt cao [1, 2, 8, 9, 10] và v.v. Vấn đề truyền nhiệt - chất có xét đến quá trình nóng chảy hoặc đông đặc của môi trường một thành phần (bài toán Stephan) có thể xem, ví dụ, trong [7, 11]

### §1. NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Nhiệt thủy động lực học quá trình nêu trên được xem xét trong khuôn khổ những phương pháp của cơ học môi trường nhiều pha [3] có xét đến khả năng chuyển pha loại 1 kiểu nóng chảy hoặc đông đặc. Quá trình nóng chảy hoặc đông đặc vật chất giả thiết xảy ra trên mặt bình học - fron chuyển pha có bề dày bằng không (quan niệm Stephan về quá trình nóng chảy và đông đặc). Ngoài fron chuyển pha (mặt gián đoạn mạnh) khoảng cách trên đó tham số của vật chất thay đổi đáng kể lớn hơn nhiều lần độ dài đặc trưng của các lỗ xốp và khoảng cách giữa chúng, trong khi đó đến lượt mình chính những độ dài này lại lớn hơn nhiều lần kích thước động học phân tử.

Khi đó trong khuôn khổ những giả thiết được chấp nhận ngoài mặt gián đoạn mạnh - fron nóng chảy  $x_m(t)$ , những phương trình cơ bản của chuyển động một chiều ( $\nu = 0, 1$  và  $2$  phù hợp với trường hợp đối xứng mặt, đối xứng trục và đối xứng cầu) trong hệ tọa độ Euler  $(x, t)$  có thể viết dưới dạng sau [3-6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x} (x^\nu \rho_i v_i) &= 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad \alpha_{1v_1} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}; \\ (P = P_1); \quad v_2 = v_3 = 0; \quad \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_1 \rho_1 C_{1v_1} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda x^\nu \frac{\partial T}{\partial x} \right) + A + Q; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = m; \quad (\alpha_3 = 1 - m); \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= 0; \quad \rho C = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_i C_i; \quad \lambda = \sum_{i=1}^3 \lambda_i. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ở đây chỉ số dưới  $i = 1, 2$  và  $3$  tương ứng dùng để chỉ tham số của pha thứ nhất (pha lỏng của thành phần thứ nhất) pha thứ hai (pha rắn của thành phần thứ nhất) và pha thứ ba đồng thời là thành phần thứ hai (xương xốp cứng);  $\alpha_i, \rho_i, P_i, v_i, \mu_i, C_i$  và  $\lambda_i$  tương ứng là thể tích, mật độ, áp suất, vận tốc, độ nhớt, nhiệt dung riêng và hệ số truyền nhiệt của pha thứ  $i$ .  $T$  là nhiệt độ;  $m$  là độ xốp;  $k$  là hệ số thấm;  $A$  là công lực nội;  $Q$  là cường độ của nguồn nhiệt khối;  $x$  là tọa độ không gian;  $t$  là thời gian. Chỉ số dưới  $m$  và  $b$  dùng để chỉ các tham số trên fron chuyển pha và trên biên giếng (biên trong).

Xét trường hợp khi có thể bỏ qua tác dụng của lực nội trong phương trình năng lượng:  $A \ll Q$ . Độ nhớt của chất lỏng phụ thuộc vào nhiệt độ  $\mu = \mu_1 = \mu_1(T)$ .

Để đóng kín hệ phương trình (1.1) ta sử dụng những phương trình trạng thái sau:

$$\rho_1 = \rho_{10} [1 + \beta_P(P - P_0) - \beta_T(T - T_0)]; \quad \rho_2 = \text{const}; \quad \rho_3 = \text{const} \quad (1.2)$$

Ở đây  $\beta_P$  và  $\beta_T$  là hệ số nén và hệ số nở nhiệt của chất lỏng.

Đối với SĐT đơn tần có xét đến khả năng phản xạ sóng bởi fron chuyển pha và sự khác nhau về tính chất điện từ của các pha sử dụng phương trình Umov - Poynting và định luật Bouguer - Lambert phân bố nguồn nhiệt khối  $Q$  xuất hiện do hấp thụ năng lượng của SĐT CT có thể viết dưới dạng sau:

$$x_b < x < x_m(t): Q_n = \frac{R_b}{L_n} \left( \frac{x_b}{x} \right)^\nu \left[ \exp \left( -\frac{x - x_b}{L_n} \right) + \right. \\ \left. + H \exp \left( -\frac{x_m - x_b}{L_n} - \frac{x_m - x}{L_n} \right) \right];$$

$$x > x_m(t): Q_s = (1 - H) \frac{R_b}{L_s} \left( \frac{x_b}{x} \right)^\nu \exp \left( -\frac{x_m - x_b}{L_n} - \frac{x - x_m}{L_s} \right);$$

$$R_b = \frac{N}{S_b}; \quad L_j^{-1} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i^{-1} \geq 0; \quad j = n, s. \quad (1.3)$$

Ở đây  $R_b$  là cường độ bức xạ trên biên  $x_b$ , xác định bởi công suất  $N$  và diện tích mặt phát xạ  $S_b = x(\nu)x_b^\nu$  (Đối với  $\nu = 0, 1$  và  $2$  phù hợp  $x(\nu) = 1, 2\pi h$  và  $4\pi$ ;  $h$  là độ dày của vĩa đối xứng trục);  $L$  là độ dài hấp thụ đặc trưng cho khả năng hấp thụ năng lượng SĐT CT của môi trường; tham số  $H$  ( $0 \leq H \leq 1$ ) đặc trưng cho sự phản xạ SĐT xác định bởi tỷ số giữa năng lượng của sóng phản xạ và đại lượng tương ứng của sóng tới. Để ký hiệu các tham số của hỗn hợp trong vùng pha nóng chảy ( $x_b < x < x_m(t)$ ) và chưa nóng chảy ( $x > x_m(t)$ ) của thành phần thứ nhất sử dụng các chỉ số dưới  $n$  và  $s$ .

Trong trường hợp tổng quát độ dài hấp thụ  $L$  phụ thuộc vào tần số SĐT  $\omega$ , áp suất  $p$  và nhiệt độ:  $L = L(\omega, p, T)$ . Khi đó ngay cả đối với trường hợp tần số SĐT  $\omega$  cố định những phương trình nhiệt - thủy động lực học (1.1) và những phương trình điện từ để xác định  $Q$  liên kết, ràng buộc lẫn nhau và chúng cần phải được giải đồng thời. Trong nhiều trường hợp có thể bỏ qua ảnh hưởng của áp suất  $p$  và nhiệt độ  $T$  lên  $L$  [5, 6]. Khi đó đối với mỗi tần số  $\omega$  độ dài hấp thụ  $L$  trở nên xác định và có thể tính được cường độ nguồn nhiệt khối  $Q$  không phụ thuộc vào nghiệm của những phương trình nhiệt - thủy động.

Hệ phương trình (1.1) - (1.3) đóng kín. Nó có thể được sử dụng để nghiên cứu những quy luật chung của quá trình nung nóng do truyền nhiệt (nguồn nhiệt mặt  $q_b$ ) và do hấp thụ năng lượng SĐT CT (nguồn nhiệt khối  $Q$ ) và thấm của chất lỏng trong

mỗi trường cho trước. Vấn đề toán học tương ứng đòi hỏi giải hệ phương trình trên với các điều kiện ban đầu và điều kiện biên sau:

$$\begin{aligned}
 t = 0: T &= T_0 < T_m \\
 x = x_b: \lambda_b S_b \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_b} &= -q_b, \text{ hay là } T = T_b; \\
 \rho_{1b} S_b v_b &= -g_b, \text{ hay là } P = P_b; \\
 x = x_e: \lambda_e S_e \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_e} &= q_e, \text{ hay là } T = T_e. \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

và các điều kiện trên tron chuyển pha  $x_m(t)$ :

$$\begin{aligned}
 v_{1m} &= \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_{1m}} \right) \frac{dx_m}{dt}; \quad \frac{dx_m}{dt} = \frac{F}{m\rho_2}; \\
 T &= T_m = \text{const}; \quad F l = q_n + q_s; \\
 q_n &= \lambda_n \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_m(t)-0}; \quad q_s = \lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_m(t)+0}. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Ở đây  $g_b$  là dòng khối toàn phần của pha lỏng;  $F, l$  là cường độ và nhiệt dung riêng chuyển pha;  $q_n$  và  $q_s$  là dòng nhiệt tới mặt phân cách pha từ phía pha lỏng và pha rắn;  $q_b = q(x_b, t)$  là dòng nhiệt toàn phần qua biên  $x_b$ ;  $q_e$  là dòng nhiệt toàn phần qua biên  $x_e$  (biên ngoài). Phương trình (1.5) nhận được từ điều kiện cân bằng vật chất và xấp xỉ tựa tĩnh (xấp xỉ thẩm) của điều kiện cân bằng năng lượng trên mặt phân cách pha  $x_m(t)$ . Nhiệt dung riêng chuyển pha  $l$  bằng hiệu entalpi của các pha có tác dụng làm thay đổi nội năng của vật chất và sinh công do thay đổi mật độ vật chất khi chuyển pha.

Trong trường hợp tổng quát, thông số của chất lỏng trên tron chuyển pha cần được xác định từ điều kiện cân bằng pha dọc theo đường chuyển pha trên cơ sở phương trình Clapeyron - Clausius. Ở đây giả thiết  $T_m = \text{const}$  [5, 6].

## §2. NHỮNG BIẾN SỐ VÀ THAM SỐ KHÔNG THỨ NGUYÊN, DẠNG CHUNG CỦA NGHIỆM. TIÊU CHUẨN ĐỒNG DẠNG

Để nghiên cứu nghiệm dừng của hệ phương trình (1.1) - (1.5) sử dụng các biến số và tham số không thứ nguyên:

$$X = \frac{x}{L_n}, \quad X_m = \frac{x_m}{L_n}, \quad L = \frac{L_n}{L_s}, \quad \theta = \frac{T}{T_m}. \quad (2.1)$$

khi đó dạng chung của nghiệm dừng:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0; \quad x_m = \text{const}; \quad (x_b < x_m < x_e) \quad (2.2)$$

có dạng sau :

- Trong miền  $X_b < X < X_m$  :

$$v = 0 : \theta(X) = -K_n \{ \exp[-(X - X_b)] + H \exp[-(X_m - X_b) - (X_m - X)] \} + CX + D ;$$

$$v = 1 : \theta(X) = K_n \left\{ \exp(X_b) E_i(-X) + H \exp[-(X_m - X_b) - X_m] \int_X^{X_m} \frac{\exp \xi}{\xi} d\xi \right\} + C_n X + D ;$$

$$v = 2 : \theta(X) = -K_n \left\{ \exp(X_b) \left[ \frac{\exp(-X)}{X} + E_i(-X) \right] - H \exp[-(X_m - X_b) - X_m] \times \right. \\ \left. \times \int_X^{X_m} \frac{\exp \xi}{\xi} d\xi \right\} - \frac{C}{X} + D. \quad (2.3)$$

- Trong miền  $X_m < X < X_e$  :

$$v = 0 : \theta(X) = -(1 - H) \frac{K_s}{L} \exp[-(X_m - X_b) - L(X - X_m)] + CX + D ;$$

$$v = 1 : \theta(X) = (1 - H) K_s \exp[-(X_m - X_b) + LX_m] E_i(-LX) + C_n X + D ;$$

$$v = 2 : \theta(X) = -(1 - H) K_s \exp[-(X_m - X_b) + LX_m] \left[ \frac{\exp(-LX)}{X} + \right. \\ \left. + L E_i(-LX) \right] - \frac{C}{X} + D. \quad (2.4)$$

Ở đây hàm tích phân chỉ số :

$$E_i(-\xi) = - \int_{\xi}^{+\infty} \frac{du}{u \exp(u)} ; \quad \xi > 0 ;$$

$K_i = Pe_i N^* X_b^v$  là tham số không thứ nguyên đặc trưng quan hệ giữa cấp nhiệt và dẫn nhiệt (số Pekle  $Pe_i = u_0 L n \rho_0 C_i / \lambda_i$  ;  $N^* = N / u_0 \rho_0 C_i S_b T_m$  ;  $u_0 = K P_0 / \mu_m L v$  ;  $i = u, S$ ).

Cũng với các điều kiện trên biên, các tiêu chuẩn đồng dạng trong trường hợp (2.2) bao gồm :

- 6 tiêu chuẩn thể hiện tác động nhiệt và các tính chất vật lý nhiệt - điện từ của môi trường :

$$H, L, K_n, K_s, q_b^* = \frac{q_b L n}{\lambda_b S_b T_m} \quad (\text{hay } \theta_b), \quad q_e^* = \frac{q_e L n}{\lambda_e S_e T_m}.$$

- 3 tiêu chuẩn đặc trưng hình học không gian :  $v, X_b, X_e$ . So với 20 tiêu chuẩn đồng dạng trong bài toán không dừng, trường hợp bài toán dừng thực sự đã được đơn giản hóa đi rất nhiều.

### 3. NGHIỆM DỪNG TRONG MIỀN KHÔNG GIẠN HỮU HẠN ( $X_e < +\infty$ )

Xét trường hợp nghiệm dừng (2.2) với các điều kiện sau :

$$X = X_b : \left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X = X_b + 0} = -q_b^* = \text{const} \\ X = X_e : \left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X = X_e - 0} = q_e^* = \text{const}. \quad (3.1)$$

Khi đó các hằng số tích phân C và D trong (2.3) và (2.4) hoàn toàn được xác định:

- Trong miền  $X_b < X < X_m$ :

$$\begin{aligned} v = 0: \quad C &= -K_n \{ 1 - H \exp[-2(X_m - X_b)] + q_b^*/K_n \}; \\ D &= 1 + K_n(1 + H) \exp[-(X_m - X_b)] - C X_m; \\ v = 1: \quad C &= -K_n \{ 1 - H \exp[-2(X_m - X_b)] + q_b^* X_b / K_n \}; \\ D &= 1 - K_n \exp(X_b) \text{Ei}(-X_m) - C \ln X_m; \\ v = 2: \quad C &= -K_n \{ 1 - H \exp[-2(X_m - X_b)] + q_b^* X_b^2 / K_n \}; \\ D &= 1 + K_n \exp(X_b) \left[ \frac{\exp(-X_m)}{X_m} + \text{Ei}(-X_m) \right] + \frac{C}{X_m}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Trong miền  $X_m < X < X_e$ :

$$\begin{aligned} v = 0: \quad C &= -K_s \{ (1 - H) \exp[-(X_m - X_b) - L(X_e - X_m)] + q_e^*/K_s \}; \\ D &= 1 + (1 - H) \frac{K_s}{L} \exp[-(X_m - X_b)] - C X_m; \\ v = 1: \quad C &= -K_s \{ (1 - H) \exp[-(X_m - X_b) - L(X_e - X_m)] - q_e^* X_e / K_s \}; \\ D &= 1 - (1 - H) \exp[-(X_m - X_b) + L X_m] \text{Ei}(-L X_m) - C \ln X_m; \\ v = 2: \quad C &= -K_s \{ (1 - H) \exp[-(X_m - X_b) - L(X_e - X_m)] - q_e^* X_e^2 / K_s \}; \\ D &= 1 + (1 - H) K_s \exp[-(X_m - X_b) + L X_m] \left[ \frac{\exp(-L X_m)}{X_m} + \right. \\ &\quad \left. + L \text{Ei}(-L X_m) \right] + C / X_m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

và phương trình để xác định vị trí của fron chuyển pha:

$$\begin{aligned} E(X_m) &= 1 - H \exp[-2(X_m - X_b)] - (1 - H) \exp[-(X_m - X_b) - L(X_e - X_m)] = \\ &= - \left( \frac{q_b^* X_b}{K_n} + \frac{q_e^* X_e}{K_s} \right) = q^*; \quad v = 0, 1 \text{ và } 2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Để dàng chỉ ra rằng phương trình (3.4) chính là điều kiện cân bằng năng lượng toàn phần do vật chất hấp thụ qua nguồn nhiệt khối  $QE(x)$  và năng lượng  $q^*$  truyền qua các biên  $X_b$  và  $X_e$ .

Từ đây cũng dễ dàng nhận thấy khi  $q^* \leq 0$  và  $q^* \geq 1$  nghiệm dừng dạng (2.2) không tồn tại. Trong trường hợp này toàn bộ vật chất của thành phần thứ nhất tồn tại hoặc ở dạng lỏng ( $q^* \leq 0$ ) hoặc ở dạng rắn ( $q^* \geq 1$ ).

Xét hàm số:

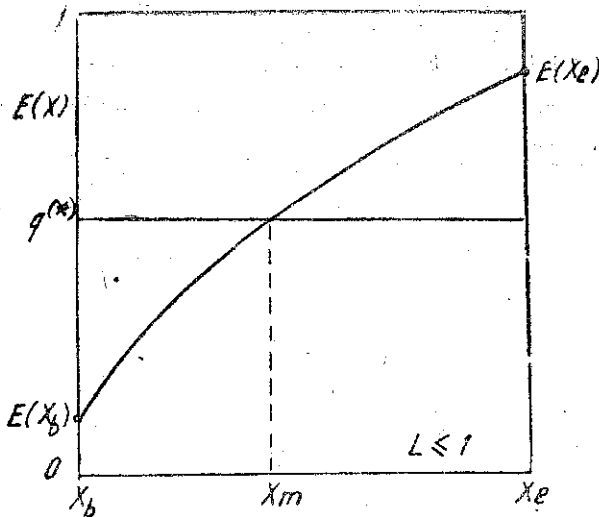
$$E(X) = 1 - H \exp[-2(X - X_b)] - (1 - H) \exp[-(X - X_b) - L(X_e - X)] \quad (3.5)$$

**Mệnh đề 1.** Đối với  $L \leq 1$  nghiệm dừng dạng (2.2) của bài toán (1.1) - (1.5), (3.1) tồn tại duy nhất với điều kiện:

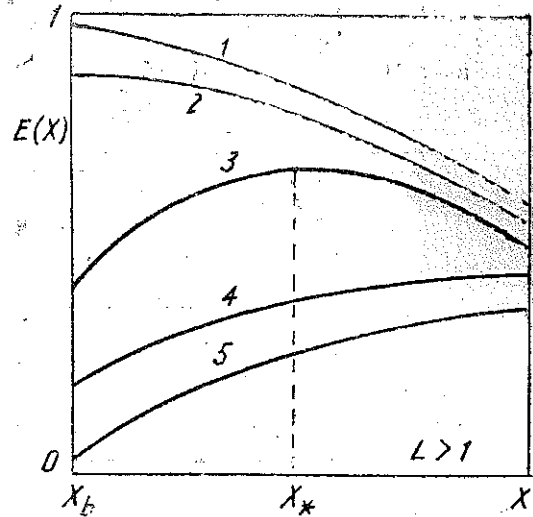
$$E(X_b) \leq q^{(*)} \leq E(X_e) \quad (3.6)$$

và khi đó trường nhiệt độ xác định bởi các công thức (2.3), (2.4) và (3.2), (3.3). Chứng minh. Thực vậy, đối với  $L \leq 1$  dễ dàng chỉ ra rằng  $E(x)$  là hàm số lồi đơn

điều tăng. Và khi đó đối với  $X \in [X_b, X_e]$ :  $\min E(X) = E(X_b) \geq 0$ ;  $\max E(X) = E(X_e) \leq 1$  (hình 1). Bởi vậy đối với mọi  $q^{(*)}$ ,  $E(X_b) \leq q^{(*)} \leq E(X_e)$  tồn tại và duy nhất  $X_m$  thỏa mãn phương trình (3.4). Mệnh đề được chứng minh.



Hình 1. Dạng của hàm số  $E(X)$  khi  $L \leq 1$



Hình 2. Dạng của hàm số  $E(X)$  khi  $L > 1$ . Các đường cong 1, 2, 3, 4 và 5 phù hợp với  $H = 0$ ,  $H = H_b$ ,  $H_b < H < H_e$ ,  $H = H_e$  và  $H = 1$ .

Đối với  $L = 1$ ,  $H = 0$  phương trình (3.4) suy biến. Trong trường hợp này tồn tại vô số nghiệm dừng của bài toán đang xét khi:  $q^{(*)} = 1 - \exp[-(X_e - X_b)]$ .

Để xác định duy nhất một nghiệm cần phải cho thêm điều kiện nhiệt độ trên biên  $X_b$  hoặc  $X_e$ .

Khi  $L > 1$  đối với  $0 < H < 1$  hàm số  $E(x)$  có một giá trị cực đại ở điểm  $X_*$ :

$$X_*(H) = \left\{ X_b + LX_e + \ln \left[ \frac{2H}{(1-H)(L-1)} \right] \right\} / (1+L)$$

Có thể chứng minh được rằng đối với:

$$H_b = \frac{(L-1)\exp[-L(X_e - X_b)]}{2 + (L-1)\exp[-L(X_e - X_b)]}, \quad H_e = \frac{(L-1)\exp(X_e - X_b)}{2 + (L-1)\exp(X_e - X_b)}. \quad (3.7)$$

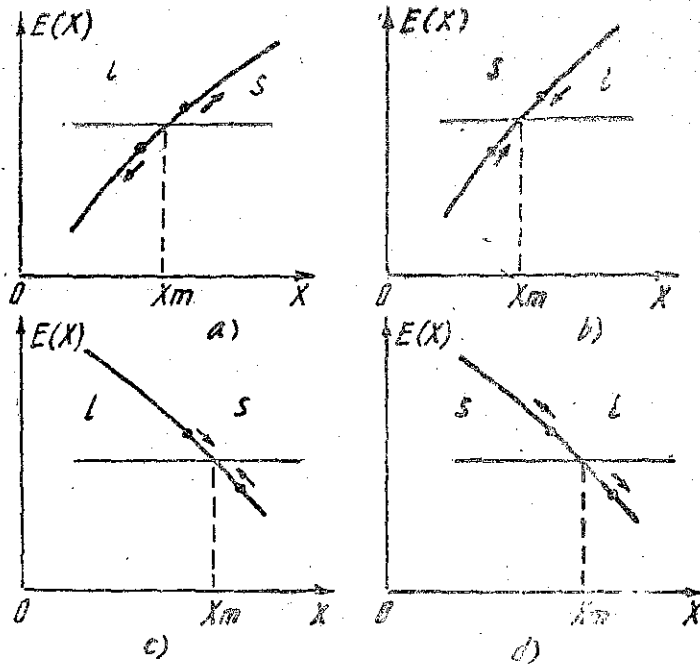
$H_b \leq H \leq H_e$  thì  $X_b \leq X_* \leq X_e$ ; khi  $H = H_b$ ,  $H = H_e$  thì tương ứng  $X_* = X_b$ ,  $X_* = X_e$ . Ngoài ra có thể chứng minh các tính chất sau của hàm số  $E(X, L, H)$  khi  $L > 1$ :

- +  $E(X, L, H)$  là hàm số lồi theo  $X$ .
- +  $E(X_b, L, H)$  và  $E(X_e, L, H)$  là hàm số đơn điệu giảm theo  $H$ .
- + Với  $H = 0$  hàm số  $E(X, L, 0)$  lồi đơn điệu giảm theo  $X$ .
- + Với  $H = 1$  hàm số  $E(X, L, 1)$  lồi đơn điệu tăng theo  $X$ .

(Hình 2). Từ đó suy ra:

**Mệnh đề 2.** Đối với  $L > 1$  nghiệm dừng dạng (2.2) của bài toán đang xét tồn tại duy nhất với  $q^{(*)}$ ,  $E(X_b) \leq q^{(*)} \leq E(X_e)$  hoặc  $E(X_b) > q^{(*)} > E(X_e)$

Đối với  $q^{(*)}$ ,  $E(X_{**}) \leq q^{(*)} \leq E(X_*)$ , ở đây  $E(X_{**}) = \max\{E(X_b), E(X_e)\}$  phương trình (3.4) có hai nghiệm. Tuy nhiên trong trường hợp này từ điều kiện cân bằng năng lượng toàn phần và từ tính chất của hàm số  $E(X)$  đã xét ở trên có thể chỉ ra rằng một trong hai nghiệm đó là không ổn định đối với các nhiễu xạ nhỏ (Hình 3).



Hình 3. Các dạng nghiệm không ổn định (a, d) và ổn định (b, c).

Ngoài ra, do chế độ cấp thoát nhiệt ở các biên, có thể xuất hiện nghiệm dừng dạng (2.2) với hai fron chuyển pha [6]. Trong trường hợp không có phản xạ SĐT bởi fron chuyển pha ( $H = 0$ ), với mọi  $L$  hàm số  $E(X)$  đơn điệu bởi vậy nếu tồn tại nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

#### § 4. NGHIỆM DỪNG TRONG MIỀN KHÔNG GIAN VÔ HẠN ( $X_e \rightarrow +\infty$ )

Xét nghiệm dừng (2.2) với điều kiện nhiệt độ cho trước tại vô cực:

$$X \rightarrow +\infty; T \rightarrow T_0 = \text{const.} \quad (4.1)$$

**Mệnh đề 3.** Đối với  $\nu = 0$  và 1 (chuyển động một chiều đối xứng mặt và đối xứng trục) nghiệm dừng dạng (2.2) của bài toán (1.1) - (1.5) với điều kiện biên ở vô cực (4.1) không tồn tại.

Chứng minh. Từ (2.3), (2.4) và (4.1), do tính chất luôn dương của hàm số  $\exp$  và luôn âm của hàm số tích phân chỉ số  $E_1(-X)$  suy ra rằng đối với trường hợp  $\nu = 0$  và 1,  $C = 0$  và  $D = 0_0$ . Khi đó dễ dàng nhận thấy rằng không tồn tại  $X_m$ ,  $X_b < X_m < X_e$  sao cho  $\theta(X_m) = 1$ . Mệnh đề được chứng minh.

**Mệnh đề 4.** Đối với  $\nu = 2$  và  $L < 1$  (chuyển động một chiều đối xứng cầu) nghiệm dừng dạng (2.2) của bài toán (1.1) - (1.5) với điều kiện biên ở vô cực (4.1) khi:

$$K_n > K_* = \frac{1}{B} \left[ \frac{K_n(1 - \theta_0)}{K_s} - q_b^{(*)} X_b \right]; \quad B = -(1 - H) \exp(L X_b) \text{Ei}(-L X_b) \quad (4.2)$$

tồn tại.

**Chứng minh.** Trong trường hợp này các hằng số tích phân xác định:

- Trong miền  $X_b < X < X_m$ :

$$C = -K_n \{ 1 - H \exp[-2(X_m - X_b)] \} - q_b^{(*)} X_b^2;$$

$$D = 1 + \frac{C}{X_m} + K_n \exp(X_b) \left[ \frac{\exp(-X_m)}{X_m} + \text{Ei}(-X_m) \right].$$

- Trong miền  $X_m < X < +\infty$ :

$$C = -(1 - \theta_0) X_m - (1 - H) K_s X_m \exp[-(X_m - X_b) + L X_m] \times \\ \times \left[ \frac{\exp(-L X_m)}{X_m} + L \text{Ei}(-L X_m) \right]; \quad D = \theta_0. \quad (4.3)$$

và phương trình để xác định  $X_m$  có dạng sau:

$$Z(X) = V(X) - Y(X) = 0; \quad (4.4)$$

$$V(X) = 1 - H \exp[-2(X - X_b)] - (1 - H) \exp[-(X - X_b)];$$

$$Y(X) = X \left\{ (1 - H) L \exp[-(X - X_b) + L X] \text{Ei}(-L X) + \frac{1 - \theta_0}{K_s} - \frac{q_b^{(*)} X_b^2}{X K_n} \right\}.$$

Để dàng chỉ ra  $V(X)$  là hàm số lồi đơn điệu tăng từ 0 đến 1 trong miền  $X_b < X < +\infty$  còn hàm số  $Y(x)$  có tính chất sau:  $Y(X_b) > 0$ ;  $X \rightarrow +\infty Y(x) \rightarrow +\infty$ . Từ đó suy ra phương trình (4.3) có ít nhất một nghiệm. Mệnh đề được chứng minh.

Đối với phần lớn các loại vật chất điều kiện ràng buộc  $L < 1$  phù hợp với tính chất vật lý của chúng. Vì vậy, tuy đây là một ràng buộc trong chứng minh nhưng là một ràng buộc vật lý phù hợp.

## § 5. NGHIỆM 2 FRON CHUYỂN PHA

Phụ thuộc vào chế độ nhiệt, bài toán trên có thể nảy sinh trường hợp trong môi trường tồn tại nhiều fron chuyển pha đồng thời tách biệt nhau. Ở đây ta chỉ xét một trường hợp đơn giản và có ý nghĩa vật lý rõ ràng đó là nghiệm dừng 2-fron chuyển pha  $X_m^{(1)}$  và  $X_m^{(2)}$ ,  $X_b \leq X_m^{(1)} < X_m^{(2)} < +\infty$ .

Để đơn giản xét trường hợp  $H = 0$  và nghiệm dừng của bài toán có dạng sau:

- Trong miền 1 - miền pha rắn của thành phần thứ nhất  $X_b < X < X_m^{(1)}$ :

$$\theta(X) = -K_s \exp(L X_b) \left[ \frac{\exp(-L X)}{X} + L \text{Ei}(-L X) \right] - \frac{C}{D} + D; \quad (5.1)$$

$$C = -K_s \left( 1 + \frac{q_b^{(*)} X_b^2}{K_s} \right);$$



$$D = 1 + K_s \exp(L X_b) \left[ \frac{\exp(-L X_m^{(1)})}{X_m^{(1)}} + L \operatorname{Ei}(-X_m^{(1)}) \right] - \frac{K_s}{X_m^{(1)}} \left( 1 + \frac{q_b^{(s)} X_b^2}{K_s} \right).$$

- Trong miền 2 - miền pha lỏng của thành phần thứ nhất  $X_m^{(1)} < X < X_m^{(2)}$ :

$$\theta(X) = -K_n \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) + X_m^{(1)}] \left[ \frac{\exp(-X)}{X} + \operatorname{Ei}(-X) \right] - \frac{C}{X} + D; \quad (5.2)$$

$$C = -K_n \frac{X_m^{(1)} X_m^{(2)}}{X_m^{(2)} X_m^{(1)}} \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) + X_m^{(1)}] \left[ \frac{\exp(-X_m^{(1)})}{X_m^{(1)}} + \operatorname{Ei}(-X_m^{(1)}) - \frac{\exp(-X_m^{(2)})}{X_m^{(2)}} - \operatorname{Ei}(-X_m^{(2)}) \right];$$

$$D = 1 + K_n \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) + X_m^{(1)}] \left[ \frac{\exp(-X_m^{(2)})}{X_m^{(2)}} + \operatorname{Ei}(-X_m^{(2)}) \right] + \frac{C}{X_m^{(2)}}.$$

- Trong miền 3 - miền pha rắn của thành phần thứ nhất  $X_m^{(2)} < X < +\infty$ :

$$\theta(X) = -K_s \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) - (X_m^{(2)} - X_m^{(1)}) + L X_m^{(2)}] \left[ \frac{\exp(-LX)}{X} + L \operatorname{Ei}(-LX) \right] - \frac{C}{X} + D; \quad (5.3)$$

$$C = -K_s X_m^{(2)} \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) - (X_m^{(2)} - X_m^{(1)}) + L X_m^{(2)}] \left\{ \frac{\exp(-L X_m^{(2)})}{X_m^{(2)}} + L \operatorname{Ei}(-L X_m^{(2)}) + \frac{1 - \theta_0}{K_s \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) - (X_m^{(2)} - X_m^{(1)}) + L X_m^{(2)}]} \right\}$$

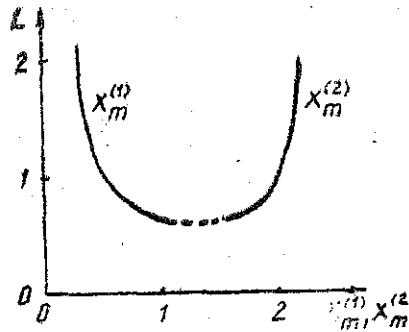
$$D = \theta_0$$

và hệ phương trình để xác định  $X_m^{(1)}$  và  $X_m^{(2)}$ :

$$f_1(X_m^{(1)}, X_m^{(2)}) = 1 + \frac{q_b^{(s)} X_b^2}{K_s} - X_m^{(1)} \left\{ \frac{1 - \theta_0}{K_s} + \frac{\exp[-L(X_m^{(1)} - X_b)]}{X_m^{(1)}} + \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) + X_m^{(1)}] \operatorname{Ei}(-X_m^{(1)}) + L \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) - (X_m^{(2)} - X_m^{(1)}) + L X_m^{(2)}] \operatorname{Ei}(-L X_m^{(2)}) - \exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) + X_m^{(1)}] \operatorname{Ei}(-X_m^{(2)}) \right\} = 0;$$

$$f_2(X_m^{(1)}, X_m^{(2)}) = 1 + \frac{q_b^* X_b^2}{K_s} - X_m^{(2)} \left\{ \frac{1 - \theta_0}{K_s} + \frac{\exp[-L(X_m^{(1)} - X_b) - (X_m^{(2)} - X_m^{(1)})]}{X_m^{(2)}} \right. \\ \left. + \text{Lexp}[-L(X_m^{(1)} - X_b) - (X_m^{(2)} - X_m^{(1)}) + LX_m^{(2)}] \text{Ei}(-LX_m^{(2)}) \right\} = 0. \quad (5.4)$$

Hệ phương trình (5.4) được giải số, kết quả tính toán thể hiện trên hình 4.

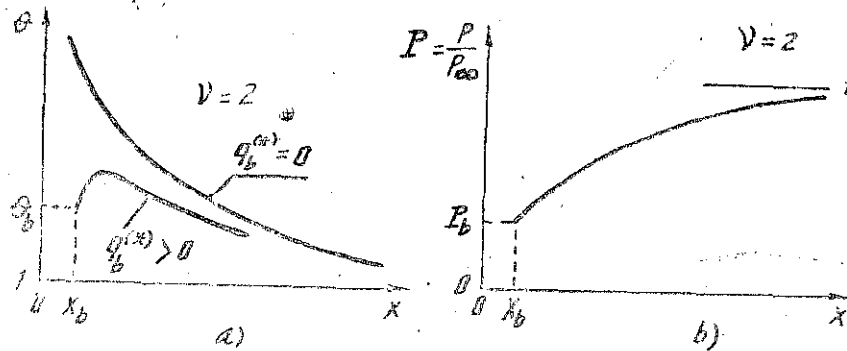


Hình 4

## §6. NGHIỆM DỪNG CỦA BÀI TOÁN KHÔNG CÓ CHUYỂN PHA

$$(X_m, X_0 \rightarrow +\infty)$$

Xét bài toán nung nóng chất lỏng có độ nhớt cao trong các lỗ xốp. Tương tự bài toán (1.1) - (1.5), (4.1) có thể chứng minh được rằng đối với  $\nu = 0$  và 1 nghiệm dừng của bài toán đang xét không tồn tại. Đối với chuyển động đối xứng cầu ( $\nu = 2$ ) nghiệm dừng tồn tại và profin nhiệt độ cũng như áp suất trong chất lỏng có dạng như trên hình 5.



Hình 5. Profin nhiệt độ (a) và áp suất (b) trong chất lỏng.

Kết quả số cho thấy trong một số trường hợp dòng khối toàn phần gb có thể đạt 40 tấn trong 1 ngày với mức tiêu hao năng lượng để duy trì bức xạ ĐT ổn định là 0,25 - 0,5 tấn/ngày.

## § 7. KẾT LUẬN

Đã chứng minh định lý tồn tại, duy nhất và nghiên cứu tính chất những nghiệm lừng của bài toán truyền nhiệt — chất trong môi trường xốp bị nung nóng bởi nguồn nhiệt mặt và nguồn nhiệt khối phụ thuộc vào đặc thù hình học của không gian, tác dụng ngoài và tính chất vật lý nhiệt — điện từ của vật chất. Quá trình trên có thể sử dụng trong việc sấy khô, làm sạch môi trường xốp, trong việc khai thác, làm tăng hệ số ra vỉa của dầu thô có độ nhớt cao và v.v...

Địa chỉ:

Nhận ngày 12/9/1987

Viện Cơ học — Viện KHVN

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. САЯХОВ Ф. Л., ЧИСТЯКОВ С. И., ФЕДОРОВ В. Н. Расчет прогрева призабойной зоны нефтяных скважин высокочастотными электромагнитными полями. Изв ВУЗов, Нефть и газ, №2, Баку, 1972.
2. АЙРАПЕТЯН М. А., СЛОТИН Н. И. Некоторые результаты по изучению  $\epsilon$  и  $\operatorname{tg} \delta$  для песков различной пористости при различной увлажненности и нефтенасыщенности. Труды Ин-та нефти АН Каз. ССР, Т. 3, Алма-Ата, 1959
3. НИГМАТУЛИН Р. И. Основы механики гетерогенных сред. Наука, Москва, 1978.
4. ЧАРНЫЙ И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостехиздат, Москва, 1963.
5. ЗЬОНГ НГОК ХАЙ, КУТУШЕВ А. Г., НИГМАТУЛИН Р. И. К теории фильтрации жидкости в пористой среде при объемном нагреве высокочастотным электромагнитным полем. ПММ, Вып. 1, Т. 51, Москва, 1987.
6. ЗЬОНГ НГОК ХАЙ Математическое моделирование процесса объемного нагрева продуктивного пласта высоковязких нефтей с применением высокочастотного электромагнитного поля. Ин-т механики МГУ, Отчет №3298, Москва, 1985.
7. РУБИНШТЕЙН Л. И. Проблема Стефана, Звайгзне, Рига, 1967.
8. ABERNETHY E. R. Production increase of heavy oils by electromagnetic heating. The Jour. of Canadian Petrol. Technol., №3, vol. 15, Montreal, 1976.
9. New bitumen recovery process utilizes electrodes to heat sands. Oilweek, №35, vol. 2, 1976
10. BRIDGES J., STRESTY G., TAPLOVE A. and SNOW R. Radio-frequency heating to recover oil from Utah tar sands. In: The future of heavy crude oils and tar sands. — Mining information service. Mc. Graw — Hill, Inc., New York, 1981.
11. CARSLAW H. S., JAEGER J. C. Conduction of heat in solids. 2-nd Edn. Clarendon Press, Oxford, 1959.

### SUMMARY

#### STATIONARY SOLUTION OF HEAT-MASS TRANSFER PROBLEM IN POROUS MEDIA WITH VOLUMETRICAL HEAT SOURCE

Process of electromagnetic heating and filtration of fluids in porous media with regard to mass transfer (melting or induration) is investigated. Theorem about existence and only stationary solution in dependence on geometrical characteristics of space, external heat action and thermalphysical and electromagnetic characteristics of media has been proved. Regarded process is possibly used for drying and cleaning a porous media, for recovery and increased production of oils and etc.