Tạp chí Cơ học T X, 1988 số 4 (trang 1 – 9)

VỀ CHUYỂN ĐỘNG DỪNG CỦA CHẤT LỎNG BỊ ĐỐT NÓNG TRONG TỪ TRƯỜNG

TẠ NGỌC CẦU

Trong bài này chúng tôi xét bài toán chuyển động dừng của chất lỏng dẫn điện bị đốt nóng trong từ trường. Chứng minh định lý tồn tại nghiệm của bài toán và chỉ ra điều kiện để nghiệm đó là duy nhất.

§1. ĐẶT BÀI TOÁN

Ta gọi là miền giới nội chứa đầy chất lỏng nhớt, không nén được và dẫn điện. Hệ phương trình phi tuyến mô tả chuyển động dừng của chất lỏng trong từ trường và có nguồn nhiệt bên trong được viết như sau [1]

$$-\nu\Delta\overline{v} + (\overline{v}\nabla)\overline{v} + \frac{1}{\rho}\nabla\left(P + \frac{\overline{H}^2}{8\pi}\right) - g\beta T\overline{\gamma} - \frac{1}{4\pi\rho}(\overline{H}\nabla)\overline{H} = f_1(x), \tag{1.1}$$

$$-\frac{C^2}{4\pi\sigma}\Delta\overline{H} + (\overline{v}\nabla)\overline{H} - (\overline{H}\nabla)\overline{v} = f_2(x), \tag{1.2}$$

$$-\chi\Delta T + \overline{v}\nabla T = f_3(x), \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\overline{v} = \operatorname{div}\overline{H} = 0 \tag{1.4}$$

Điều kiện biên của bài toán có dạng

$$\overline{v} = 0 \text{ trên } S,\ T = T_0(x) \text{ trên } S,\ \overline{H} = \overline{H}_0(x) \text{ trên } S \tag{1.5}$$

Ở đây $\overline{v}(x)$ – vận tốc chất lỏng, $\overline{H}(x)$ – véc tơ cường độ từ trường $x = (x_1, x_2, x_3)$ điểm của không gian ba chiều, $T(x)$ – nhiệt độ, $P(x)$ – áp suất, ρ – mật độ chất lỏng. C – vận tốc ánh sáng, ν, χ, σ, β tương ứng là hệ số nhớt, hệ số dẫn nhiệt, hệ số dẫn điện và hệ số nở nhiệt của chất lỏng, S – biên của Ω.

Đại lượng $\nu' = C^2/4\pi\sigma$ được gọi là hệ số nhớt từ.

Ta giả thiết rằng biên S khả vi liên tục hai lần.

§2. CÁC KHÔNG GIAN HÀM CƠ BẢN VÀ CÁC BỔ ĐỀ PHỤ

Gọi $\mathscr{H}_2^2(\Omega)$ là bao đóng của các véc tơ hàm sôlênôit trơn triệt tiêu trên biên S theo chuẩn của không gian Xôbolev $\overline{W}_2^2(\Omega)$, $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ là bao đóng của các hàm trơn triệt tiêu trên biên S theo chuẩn của không gian $W_2^1(\Omega)$, $\tilde{W}_2^2(\Omega)$ là giao của các không gian $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ và $W_2^2(\Omega)$:

$$\tilde{W}_2^2(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$$

$L_2^{(1)}(\Omega)$ là không gian các lớp hàm từ $W_2^1(\Omega)$ có tất cả các đạo hàm suy rộng bậc một tương ứng như nhau [2].

Đưa vào tổng thẳng $S_2(\Omega) = \mathscr{H}_2^2(\Omega) \oplus \mathscr{H}_2^2(\Omega) \oplus \tilde{W}_2^2(\Omega) \oplus L_2^{(1)}(\Omega)$. Các phần tử của $S_2(\Omega)$ có dạng: $\eta = (\bar{v}, \bar{Q}, u, p)$.

$$\bar{v} \in \mathscr{H}_2^2(\Omega),\ \bar{Q} \in \mathscr{H}_2^2(\Omega),\ u \in \tilde{W}_2^2(\Omega),\ p \in L_2^{(1)}(\Omega)$$

Chuẩn trong $S_2(\Omega)$ được xác định như sau:

$$\|\eta\|^2_{S_2(\Omega)} = \|\bar{v}\|^2_{\mathscr{H}_2^2(\Omega)} + \|\bar{Q}\|^2_{\mathscr{H}_2^2(\Omega)} + \|u\|^2_{\tilde{W}_2^2(\Omega)} + \|p\|^2_{L_2^{(1)}(\Omega)}$$

Ký hiệu

$$\mathscr{L}_2(\Omega) = \bar{L}_2(\Omega) \oplus \bar{L}_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$$

và

$$\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega) = \bar{L}_2(\Omega) \oplus \bar{L}_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus \{\theta\}$$

Ở đây $\bar{L}_2(\Omega)$ – không gian vectơ hàm, $L_2(\Omega)$ – không gian hàm, $\{\theta\}$ – phần tử không trong $L_2(\Omega)$. Ngoài ra, tương tự [3] ta đưa vào các không gian $\mathscr{H}_1(\Omega)$ và $\mathscr{H}_2(\Omega)$. $\mathscr{H}_1(\Omega)$ là bao đóng tập hợp các véc tơ trơn, sôlênôit, triệt tiêu trên biên, theo chuẩn $\|\bar{v}\|^2_{\mathscr{H}_1(\Omega)} = \int_\Omega |\mathrm{rot}\,\bar{v}|^2 d\Omega$; $\mathscr{H}_2(\Omega)$ là bao đóng tập hợp các véctơ hàm trơn triệt tiêu trên biên, theo chuẩn $\|\varphi\|^2_{\mathscr{H}_2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 d\Omega$.

Giả sử $T_o(x) \in W_2^1(S)$, khi đó theo định lý về vết (xem [4]) tồn tại thác triển $T_o'(x) \in W_2^2(\Omega)$ của $T_o(x)$ vào Ω. Mặt khác theo giả thiết đối với biên S, tồn tại (xem [6]) dãy các hàm « cắt » $\zeta(x, \delta)$ hai lần khả vi liên tục.

Hàm $\zeta(x, \delta)$ bằng 1 ở các điểm gần biên S, bằng không tại các điểm cách biên S một khoảng lớn hơn δ và $|\zeta(x, \delta)| < C$. Hằng số C chung cho tất cả các δ thuộc $(0, \delta_1]$.

Theo [6] không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $\bar{H}_o(x) = \mathrm{rot}\,\bar{a}(x)$, ở đây $\bar{a}(x) \in W_2^1(\Omega)$. Giả sử $\bar{\psi}(x)$ là vectơ hàm bất kỳ có tính chất sau:

$$\bar{\psi}(x) \in W_2^1(\Omega),\ \mathrm{div}\,\bar{\psi}(x) = 0 \text{ trong } \Omega,\ \bar{\psi}(x) = \bar{H}_o(x) \text{ trên } S.$$

Áp dụng các phép thế $T(x) = U(x) + T_o'(x)$, $\zeta(x, \delta) = U(x) + \varphi(x)$ và $\bar{H}(x) = \bar{Q}(x) + \bar{\psi}(x)$ vào hệ phương trình (1.1) – (1.5), khi đó ta sẽ nhận được hệ phương trình tương đương.

$$-4\pi\rho\nu\Delta\bar{v} + 4\pi\rho(\bar{v}\nabla)\bar{v} + 4\pi\nabla\left(P + \frac{(\bar{Q} + \bar{\psi})^2}{8\pi}\right)$$

$$-g\beta u\bar{\gamma} - (\bar{Q}\nabla)\bar{Q} - (\bar{Q}\nabla)\bar{\psi} - (\bar{\psi}\nabla)\bar{Q} = F_1(x), \qquad (2.1)$$

$$-\nu'\Delta\bar{Q} + (\bar{v}\nabla)\bar{Q} + (\bar{v}\nabla)\bar{\psi} - (\bar{\psi}\nabla)\bar{v} - (\bar{Q}\nabla)\bar{v} = F_2(x), \qquad (2.2)$$

$$-\chi\Delta u + \bar{v}\nabla u + \bar{v}\nabla\varphi = F_3(x) \qquad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \overline{v} = \operatorname{div} \overline{Q} = 0, \tag{2.4}$$

$$\overline{v}\,|_s = 0,\ \overline{Q}\,|_s = 0,\ u\,|_s = 0, \tag{2.5}$$

$$F_1(x) = f_1(x) + g\beta\varphi\overline{\gamma} + (\overline{\psi}\nabla)\overline{\psi}, \tag{2.6}$$

$$F_2(x) = f_2(x) + \nu'\Delta\psi, \tag{2.7}$$

$$F_3(x) = f_3(x) + \chi\Delta\varphi. \tag{2.8}$$

Dễ thấy các phương trình (2.1) – (2.3) với các điều kiện (2.4), (2.5) có thể viết dưới dạng ma trận trong không gian $S_2(\Omega)$ như sau :

$$A\eta + B\eta = \xi \tag{2.9}$$

ở đây

$$A = \begin{Vmatrix} -4\pi\rho\nu\Delta & 0 & 0 & 4\pi\nabla \\ 0 & -\nu'\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};\ B = \begin{Vmatrix} 4\pi\rho P & -P+\nabla_1+G & -g\beta E\overline{\gamma} & 0 \\ P_1 & -P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R(\overline{v}\nabla)\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$P\overline{v} = (\overline{v}\nabla)\overline{v},\ P\overline{Q} = (\overline{Q}\nabla)\overline{Q},\ \nabla_1\overline{Q} = \frac{1}{2}\nabla(\overline{Q} + \overline{\psi})^2,$$

$$G\overline{Q} = -[(\overline{Q}\nabla)\overline{\psi} + (\overline{\psi}\nabla)\overline{Q}],\ P_1\overline{v} = [(\overline{v}\nabla)\overline{Q} + (\overline{v}\nabla)\overline{\psi} - (\overline{\psi}\nabla)\overline{v}],$$

$$P_2\overline{Q} = (\overline{Q}\nabla)\overline{v},\ R(\overline{v}\nabla)\varphi u = \overline{v}\nabla u + \overline{v}\nabla\varphi,$$

$\eta = (\overline{v}, \overline{Q}, u, P)^T$, $\xi = (F_1, F_2, F_3, 0)^T$, $\overline{\gamma} = (0, 0, 1)$ – vectơ đơn vị

Bổ đề 1. Với mọi vectơ hàm $\overline{v}(x)$, $\overline{Q}(x) \in \mathscr{H}_1(\Omega)$ và $\gamma > 0$ luôn tồn tại vectơ hàm $\overline{\psi} = \overline{\psi}(\gamma)$ thỏa mãn các điều kiện $\overline{\psi}(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\operatorname{div}\overline{\psi} = 0$ trong Ω, $\overline{\psi}(x) = \overline{H}_0(x)$ trên S
và

$$|\,b(\overline{\psi}, \overline{v}, \overline{Q})\,| \leqslant \gamma \|\overline{v}\|_{\mathscr{H}_1(\Omega)} \cdot \|\overline{Q}\|_{\mathscr{H}_1(\Omega)};$$

$$|\,b(\overline{v}, \overline{\psi}, \overline{Q})\,| \leqslant \gamma \|\overline{v}\|_{\mathscr{H}_1(\Omega)} \cdot \|\overline{Q}\|_{\mathscr{H}_1(\Omega)}$$

ở đây
$$b(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \int_\Omega (\overline{a}\nabla)\overline{b}\cdot\overline{c}\,d\Omega$$

Bổ đề này được chứng minh tương tự bổ đề II.1.8 trong [6]

Bổ đề 2. Toán tử tuyến tính A tác dụng từ $S_2(\Omega)$ vào $\widetilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ là giới nội và thỏa mãn bất đẳng thức : $\|A\eta\|_{\mathscr{L}_2(\Omega)} \geqslant C_1 \|\eta\|_{S_2(\Omega)}$. Ở đây C_1 là hằng số dương, không phụ thuộc vào η. Chứng minh bổ đề suy ra từ [7].

Ta gọi vectơ hàm $\overline{\eta} \in S_2(\Omega)$ là nghiệm suy rộng của hệ phương trình (1.1) – (1.5) nếu nó thỏa mãn phương trình (2.9) với $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ thuộc $L_2(\Omega)$.

Bổ đề 3. Nếu $\eta(x)$ thuộc $S_2(\Omega)$ là nghiệm suy rộng của hệ (1.1) – (1.5) thì bất đẳng thức sau $\|\overline{v}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\overline{Q}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_2$ (2.10) sẽ thỏa mãn với C_2 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào ν, χ, ν', β, g, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ và miền Ω.

Chứng minh. Nhân hai vế của phương trình (2.1) – (2.3) tương ứng lần lượt với $\bar{v}, \bar{Q}, u$ và lấy tích phân trên toàn miền Ω ta nhận được :

$$4\pi\rho\nu \| v \|^2_{\mathscr{H}_1(\Omega)} = g\beta \langle u, v_3\rangle_{L_2} + b(\bar{Q}, \bar{Q}, \bar{v}) + b(\bar{Q}, \bar{\psi}, \bar{v}) + $$
$$+ b(\bar{\psi}, \bar{Q}, \bar{v}) + \langle F_1(x), \bar{v}\rangle_{L_2(\Omega)},$$

$$\nu' \| Q \|^2_{\mathscr{H}_1(\Omega)} = - b(\bar{v}, \bar{\psi}, \bar{Q}) + b(\bar{\psi}, \bar{v}, \bar{Q}) +$$
$$+ b(\bar{Q}, \bar{v}, \bar{Q}) + \langle F_2(x), \bar{Q}\rangle_{L_2},$$

$$\chi \| u \|^2_{\mathscr{H}_2(\Omega)} = - \langle \bar{v}\nabla\varphi, u\rangle_{L_2} + \langle F_3(x), u\rangle_{L_2}.$$

Cộng các vế tương ứng của các đẳng thức trên, để ý rằng

$$b(\bar{Q}, \bar{Q}, \bar{v}) = - b(\bar{Q}, \bar{v}, \bar{Q}) ; \quad b(\bar{\psi}, \bar{Q}, \bar{v}) = - b(\bar{\psi}, \bar{v}, \bar{Q})$$

ta thu được

$$4\pi\rho\nu \| \bar{v} \|^2_{\mathscr{H}_1} + \nu' \| \bar{Q} \|^2_{\mathscr{H}_1} + \chi \| u \|^2_{\mathscr{H}_2} = g\beta \langle u, v_3\rangle_{L_2} + b(\bar{Q}, \bar{\psi}, \bar{v}) -$$
$$- b(\bar{v}, \bar{\psi}, \bar{Q}) - \langle \bar{v}\nabla\varphi, u\rangle_{L_2} + \langle F_1(x), \bar{v}\rangle_{L_2} + \langle F_2(x), \bar{Q}\rangle_{L_2} + \langle F_3(x), u\rangle_{L_2}.$$

Đặt $\mu = \min(\nu, \nu', \chi)$. Cho thuận tiện trong phần tiếp theo, mọi hằng số không phụ thuộc vào ν, σ, χ ta sẽ ký hiệu bằng chữ C. Giả sử $\bar{\psi}$ là vectơ hàm được xác định nhờ bổ đề I với $\gamma = M/N$ (N – là số tự nhiên đủ lớn mà ta sẽ xác định sau)

Sử dụng bất đẳng thức Hônder và kết quả bổ đề I ta có :

$$\mu(\| v \|^2_{\mathscr{H}_2} + \| \bar{Q} \|^2_{\mathscr{H}_1} + \| u \|^2_{\mathscr{H}_2}) \leqslant g\beta \| u \|_{L_2} \cdot \| \bar{v} \|_{L_2} +$$
$$+ 2\frac{\mu}{N} \| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} \cdot \| \bar{Q} \|_{\mathscr{H}_1} + \| \bar{v} \|_{L_4} \cdot \| u \|_{\mathscr{H}_2} \cdot \| \varphi \|_{L_4} +$$
$$+ \| F_1 \|_{L_2} \cdot \| \bar{v} \|_{L_2} + \| F_2 \|_{L_2} \cdot \| Q \|_{L_2} + \| F_3 \|_{L_2} \cdot \| u \|_{L_2}.$$

Để ý rằng :

$$\| u \|_{\mathscr{H}_2} \leqslant C\chi^{-1} \| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} \cdot \| \varphi \|_{L_4} + C\chi^{-1} \| F_3 \|_{L_2} \leqslant$$
$$\leqslant C\mu^{-1}(\| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} \cdot \| \varphi \|_{L_4} + \| F_3 \|_{L_2})$$

và qua một số biến đổi, ta nhận được

$$\mu(\| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} + \| \bar{Q} \|_{\mathscr{H}_1} + \| u \|_{\mathscr{H}_2}) \leqslant 3(g\beta C\chi^{-1} \| \varphi \|_{L_4} + \mu/N) \| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} +$$
$$+ \frac{3\mu}{N} \| \bar{Q} \|_{\mathscr{H}_1} + 3C \| \varphi \|_{L_4} \cdot \| u \|_{\mathscr{H}_2} + 3C \| F_1 \|_{L_2} +$$
$$+ 3C \| F_2 \|_{L_2} + (3g\beta C\chi^{-1} + 3C) \| F_3 \|_{L_2}.$$

Cho $N = 12$, theo cách xây dựng hàm $\varphi(x)$, ta có thể chọn φ để

$$\max\left\{ g\beta C\chi^{-1} \| \varphi \|_{L_4}, \frac{C}{2} \| \varphi \|_{L_4} \right\} \leqslant \mu/12$$

khi đó ta có

$$(\| \bar{v} \|_{\mathcal{H}_1} + \| \bar{Q} \|_{\mathcal{H}_1} + \| u \|_{\mathcal{H}_2}) \leqslant 6\mu^{-1} C [\| F_1 \|_{L_2} +$$
$$+ \| F_2 \|_{L_2} + (g\beta\chi^{-1} + 1) \| F_3 \|_{L_2}] \tag{2.11}$$

Từ đây ta suy ra bất đẳng thức (2.10) với

$$C_2 = 6C\mu^{-1} [\| F_1 \|_{L_2} + \| F_2 \|_{L_2} + (g\beta\chi^{-1} + 1) \| F_3 \|_{L_2}]$$

Bổ đề chứng minh xong.

Bổ đề 4. Toán tử B tác dụng từ $S_2(\Omega)$ vào $\tilde{\mathcal{L}}_2(\Omega)$ là hoàn toàn liên tục.

Chứng minh. Giả sử dãy $\{\eta_n\}$ bất kỳ thuộc $S_2(\Omega)$ và hội tụ yếu đến $\eta_o \in S_2(\Omega)$

Ta cần chứng tỏ rằng dãy $\{B\eta_n\}$ hội tụ mạnh với phần tử $B\eta_o$ trong $\tilde{\mathcal{L}}_2(\Omega)$

Do $\eta_n(v_n, Q_n, u_n, P_n) \xrightarrow{h.t.y} \eta_o(v_o, Q_o, u_o, P_o)$ trong S_2 nên $u_n \xrightarrow{h.t.y} u_o$ trong $W_2^2(\Omega)$, $v_n \xrightarrow{h.t.y} v_o$ trong $\mathcal{H}_2^2(\Omega)$, $Q_n \xrightarrow{h.t.y} Q_o$ trong $\mathcal{H}_2^2(\Omega)$, không khó khăn, ta có thể tính được

$$\| B\eta_n - B\eta_o \|_{L_2} \leqslant 4\pi\rho(\| v_n - v_o \|_{L_4} \cdot \| v_n \|_{W_4^1} + \| v_o \|_{L_4} \cdot \| v_n - v_o \|_{W_4^1}) +$$
$$+ \| Q_n - Q_o \|_{L_4} \cdot \| Q_n \|_{W_4^1} + \| Q_o \|_{L_4} \cdot \| Q_n - Q_o \|_{W_4^1} + \| Q_n - Q_o \|_{L_4} \cdot \| \psi \|_{W_4^1} +$$
$$+ \| \psi \|_{L_4} \cdot \| Q_n - Q_o \|_{W_4^1} + g\beta \| u_n - u_o \|_{L_2} \cdot \| v_n \|_{L_2} + \| v_n - v_o \|_{L_4} \cdot \| Q_n \|_{W_4^1} +$$
$$+ \| v_o \|_{L_4} \cdot \| Q_n - Q_o \|_{W_4^1} + \| v_n - v_o \|_{L_4} \cdot \| \psi \|_{W_4^1} + \| \psi \|_{L_4} \cdot \| v_n - v_o \|_{W_4^1} +$$
$$+ \| Q_n - Q_o \|_{L_4} \cdot \| v_n \|_{W_4^1} + \| Q_o \|_{L_4} \cdot \| v_n - v_o \|_{W_4^1} + \| v_n - v_o \|_{L_4} \cdot \| u_n \|_{W_4^1} +$$
$$+ \| v_o \|_{L_4} \cdot \| u_n - u_o \|_{W_4^1} + \| v_n - v_o \|_{L_4} \cdot \| \varphi \|_{W_4^1}. \tag{2.12}$$

Sử dụng tính chất hoàn toàn liên tục của toán tử nhúng các không gian $\mathcal{H}_2^2(\Omega)$, $W_2^2(\Omega)$ vào các không gian $L_4(\Omega)$, $W_4^1(\Omega)$ dễ dàng thấy rằng vế phải của bất đẳng thức (2.12) dần tới 0 khi n dần tới $+\infty$. Do đó

$$\lim_{n \to \infty} \| B\eta_n - B\eta_o \|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = 0$$

Điều này chứng tỏ tính hoàn toàn liên tục của toán tử B. Bổ đề chứng minh xong.

§ 3. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ ĐIỀU KIỆN DUY NHẤT NGHIỆM

A — ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM

Giả sử ξ — véc tơ bất kỳ thuộc $\tilde{\mathcal{L}}_2(\Omega)$, η — véc tơ bất kỳ thuộc $S_2(\Omega)$ dễ dàng thấy $B\eta + \xi$ thuộc không gian $\tilde{\mathcal{L}}_2(\Omega)$. Theo bổ đề 1 phương trình (2.9) tương đương với

$$\eta = D\eta \tag{3.1}$$

Ở đây

$$D\eta = -A^{-1}B\eta + A^{-1}\xi$$

Toán tử $-A^{-1}B$ hoàn toàn liên tục trong $S_2(\Omega)$ nên D cũng hoàn toàn liên tục trong $S_2(\Omega)$. Hiển nhiên điểm bất động, bất kỳ của phương trình (3.1) cũng là nghiệm suy rộng của hệ (1.1) – (1.5).

Để chứng minh tồn tại nghiệm suy rộng của hệ, ta sử dụng nguyên lý Lêre – Sauder : Ta chứng minh rằng tất cả các nghiệm có thể có của phương trình dạng $\eta = \lambda D\eta$, $\lambda \in [0, 1]$ (3.2) đều thuộc hình cầu bán kính cố định nào đó trong không gian $S_2(\Omega)$.

Thật vậy ta đánh giá vế phải của phương trình

$$\| -A^{-1}B\eta + A^{-1}\xi \|_{S_2(\Omega)} \leqslant \| A^{-1} \|_{\mathcal{L}_2 \to S_2(\Omega)} (J + \|\xi\|_{L_2}) \text{ với } J = \| B\eta \|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \quad (3.3)$$

Dễ thấy

$$J \leqslant 4\pi\rho \| (\bar{v}\nabla)\bar{v} \|_{L_2} + \frac{1}{2} \| \nabla(\bar{Q} + \bar{\psi})^2 \|_{L_2} + g\beta \| u \|_{L_2} + \| (Q\nabla)\bar{Q} \|_{L_2} + \| (Q\nabla)\psi \|_{L_2} +$$

$$+ \| (\psi\nabla)Q \|_{L_2} + \| F_1 \|_{L_2} + \| (\bar{v}\nabla \bar{Q}) \|_{L_2} + \| (\bar{v}\nabla)\bar{\psi} \|_{L_2} + \| (\bar{\psi}\nabla)\bar{v} \|_{L_2} + \| (\bar{Q}\nabla)\bar{Q} \|_{L_2} +$$

$$+ \| F_2 \|_{L_2} + \| (\bar{v}\nabla u) \|_{L_2} + \| (\bar{v}\nabla\varphi) \|_{L_2} + \| F_3 \|_{L_2}$$

Từ định lý Xobolev về nhúng và các bất đẳng thức Honder ta suy ra

$$J \leqslant \| v \|_{L_4} [4\pi\rho \| v \|_{W_4^1} + \| Q \|_{W_4^1} + 2\| u \|_{W_4^1} + 2\| \varphi \|_{W_4^1} + 2\| \psi \|_{W_4^1}] +$$

$$+ \| Q \|_{L_4} \cdot [\| v \|_{W_4^1} + 2\| Q \|_{W_4^1} + 2\| \psi \|_{W_4^1}] + C\| u \|_{W_4^1} + \| \psi \|_{L_4} \cdot [\| v \|_{W_4^1} + 2\| Q \|_{W_4^1} +$$

$$+ \| \psi \|_{W_4^1}] + \| F_1 \|_{L_2} + \| F_2 \|_{L_2} + \| F_3 \|_{L_2}.$$

Có thể nhận thấy rằng nếu $\eta = (v, Q, u, p)$ là nghiệm của phương trình $\eta = \lambda D\eta$, $\lambda \in [0, 1]$ thì v, Q, u cũng thỏa mãn bất đẳng thức (2.10) tức là

$$\| v \|_{W_2^1} + \| Q \|_{W_2^1} + \| u \|_{W_2^1} \leqslant C_2 \quad (3.4)$$

Bây giờ ta sử dụng các bất đẳng thức đa nhân tính [7] áp dụng cho các không gian W_4^1, W_2^2, $L_2(\Omega)$, tính nhúng của không gian $W_2^1(\Omega)$ vào $L_4(\Omega)$ và bất đẳng thức (3.4) ta sẽ có

$$J \leqslant C_2C_3 [4\pi\rho \| v \|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \| v \|^{1-\tau}_{L_2} + \| Q \|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \| Q \|^{1-\tau}_{L_2} + 2\| u \|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \| u \|^{1-\tau}_{L_2} +$$

$$+ 2\| \varphi \|_{W_4^1} + \| \psi \|_{W_4^1}] + C_2C_3 [2\| Q \|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \| Q \|^{1-\tau}_{L_2} + \| v \|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \| v \|^{1-\tau}_{L^2} +$$

$$+ 2\| \psi \|_{W_4^1}] + CC_2C_3 \| u \|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \| u \|^{1-\tau}_{L_2} + \| \psi \|_{L_4} \cdot [\| v \|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \| v \|^{1-\tau}_{L_2} +$$

$$+ 2\| Q \|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \| Q \|^{1-\tau}_{L_2} + \| \psi \|_{W_4^1}] + \| F_1 \|_{L_2} + \| F_2 \|_{L_2} + \| F_3 \|_{L_2}.$$

Ở đây C_3 – hệ số nhúng của không gian $W_2^1(\Omega)$ vào $L_4(\Omega)$ và τ – hằng số dương thỏa mãn $0 < \tau < 1$. Một lần nữa sử dụng nhúng $W_4^1(\Omega)$ vào $L_2(\Omega)$ và bất đẳng thức (3.4) dẫn đến

$$J \leqslant C_4 [\| v \|^{\tau}_{W_2^2} + \| Q \|^{\tau}_{W_2^2} + \| u \|^{\tau}_{W_2^2} + C_5 (C, C_2, C_3, \tau, \varphi, \psi, F_1, F_2, F_3) \quad (3.5)$$

Với C_4, C_5 là những hằng số dương nào đó.

Từ (3.1), (3.3), (3.5) suy ra $\|\eta\|_{S_2(\Omega)} \leqslant C_5\|\eta\|^{\tau}_{S_2} + C_6, \quad 0 < \tau < 1$. Điều này chứng tỏ tính giới nội đều của lời giải phương trình (3.2). Như vậy ta đã chứng minh được định lý sau :

Định lý 1 : Nếu $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ thuộc không gian $L_2(\Omega)$, $T_0(x)$ thuộc $W_2^{\frac{1}{2}}(S)$ và $\overline{H}_0(x) = \mathrm{rot}\,\overline{a}(x)$, $\overline{a}(x) \in H^2(\Omega)$ thì phương trình (1.1) – (1.5) có ít nhất một nghiệm suy rộng.

B – ĐỊNH LÝ DUY NHẤT NGHIỆM

Giả sử phương trình (2.9) có hai nghiệm $\eta_1(v_1, H_1, T_1, P_1)$ và $\eta_2(v_2, H_2, T_2, P_2)$. Đặt $\widehat{\eta}(\widehat{v}, \widehat{H}, \widehat{T}, \widehat{P}) = \eta_1 - \eta_2$. Hiển nhiên η_1 và η_2 thỏa mãn hệ thức

$$-4\pi\rho\nu\Delta\overline{v}_i = -4\pi\rho(\overline{v}_i\nabla)\overline{v}_i - 4\pi\nabla\left(P_i + \frac{(\overline{H}_i + \overline{\psi}_i)^2}{8\pi}\right) -$$

$$- g\beta T_i\overline{\gamma} - (\overline{H}_i\nabla)\overline{H}_i - (\overline{H}_i\nabla)\overline{\psi} - (\overline{\psi}\nabla)\overline{H}_i + F_1,$$

$$-\nu'\Delta\overline{H}_i = -(\overline{v}_i\nabla)\overline{H}_i - (\overline{v}_i\nabla)\overline{\psi} + (\overline{\psi}\nabla)\overline{v}_i + (\overline{H}_i\nabla)\overline{v}_i + F_2,$$

$$-\chi\Delta T_i = -\overline{v}_i\nabla T_i + \overline{v}_i\nabla\varphi + F_3.$$

Qua một số biến đổi ta nhận được

$$4\pi\rho\nu(\widehat{v}, v)_{\mathscr{H}_1} = -4\pi\rho\,[\,b(\widehat{v}, v_1, v) + b(v_2, \widehat{v}, v)] - g\beta\langle\widehat{T}\overline{\gamma}, v\rangle_{L_2}$$

$$-[b(\widehat{H}, H_1, v) + b(H_2, \widehat{H}, v)] - b(\widehat{H}, \psi, v) - b(\psi, \widehat{H}, v),$$

$$\nu'(\widehat{H}, H)_{\mathscr{H}_1} = -[b(v_1, \widehat{H}, H) - b(\widehat{v}, H_2, H)] - b(\widehat{v}, \psi, H) +$$

$$+ b(\psi, \widehat{v}, H) + b(H_1, \widehat{v}, H) + b(\widehat{H}, v_2, H),$$

$$\chi(\widehat{T}, T)_{\mathscr{H}_2} = -\langle\widehat{v}\nabla T_2, T\rangle_{L_2} - \langle v_1\nabla\widehat{T}, T\rangle_{L_2} + \langle\widehat{v}\nabla\varphi, T\rangle_{L_2}.$$

$$\forall \overline{v}, \overline{H} \in \mathscr{H}_1, \ \forall T \in \mathscr{H}_2.$$

Ta thay $v = \widehat{v}$, $H = \widehat{H}$, $T = \widehat{T}$ suy ra

$$4\pi\rho\nu\|\widehat{v}\|^2_{\mathscr{H}_1} + \nu'\|\widehat{H}\|^2_{\mathscr{H}_1} + \chi\|\widehat{T}\|^2_{\mathscr{H}_2} = -4\pi\rho b(\widehat{v}, v_1, \widehat{v}) - g\beta\langle\widehat{T}\gamma, \widehat{v}\rangle_{L_2} -$$

$$- b(\widehat{H}, H_1, \widehat{v}) + b(H_2, \widehat{H}, \widehat{v}) - b(\widehat{H}, \psi, \widehat{v}) - b(\widehat{v}, H_2, \widehat{H}) - b(\widehat{v}, \psi, \widehat{H}) +$$

$$+ b(\psi, \widehat{v}, \widehat{H}) + b(H_1, \widehat{v}, \widehat{H}) + b(\widehat{H}, v_2, \widehat{H}) - \langle\widehat{v}\nabla T_2, \widehat{T}\rangle_{L_2} + \langle\widehat{v}\nabla\varphi, \widehat{T}\rangle_{L_2}.$$

Ta giả thiết rằng chuẩn của $\overline{\psi}(x)$ trong $L_4(\Omega)$ đủ nhỏ để :

$$|b(\overline{v}, \overline{\psi}, \overline{H})| \leqslant \frac{\mu}{12}\|\overline{v}\|_{\mathscr{H}_1}\cdot\|\overline{H}\|_{\mathscr{H}_1}; \ |b(\overline{\psi}, \overline{v}, \overline{H})| \leqslant \frac{\mu}{12}\|\overline{v}\|_{\mathscr{H}_1}\cdot\|\overline{H}\|_{\mathscr{H}_1};$$

$$\forall \overline{v}, \overline{H} \in \mathscr{H}_1$$

và hàm $\varphi(x)$ thỏa mãn

$$\|\varphi\|_{L_4} \leqslant \min\left(\frac{\mu}{2C}, \frac{\mu^2}{4g\beta C^2}\right)$$

Với những giả thiết này, làm tương tự như chứng minh bổ đề 3 ta có

$$\mu(\|\widehat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{H}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{T}\|^2_{\mathcal{H}_2}) \leqslant [4\pi\rho\|v_1\|_{\mathcal{H}_1} + 2\|H_1\|_{\mathcal{H}_1} + \frac{\mu}{3} + 2\|H_2\|_{\mathcal{H}_1} +$$

$$+ \|v_2\|_{\mathcal{H}_1} + \|T_2\|_{\mathcal{H}_2} + \|\varphi\|_{L_4} + g\beta] \cdot [\|\widehat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{H}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{T}\|^2_{\mathcal{H}_2}].$$

Sử dụng bất đẳng thức (2.11) ta nhận được :

$$\mu(\|\widehat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{H}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{T}\|^2_{\mathcal{H}_2}) \leqslant (4\pi\rho + 6)6\mu^{-1}C[\|F_1\|_{L_2} + \|F_2\|_{L_2} +$$

$$+ (g\beta\chi^{-1} + 1)\|F_3\|_{L_2}] \times [\|\widehat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{H}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{T}\|^2_{\mathcal{H}_1}] +$$

$$+ \left(g\beta + \frac{\mu}{3} + \|\varphi\|_{L_4}\right)[\|\widehat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{H}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{T}\|^2_{\mathcal{H}_2}].$$

Giả sử μ đủ lớn để

$$\frac{\mu}{3} - g\beta - \|\varphi\|_{L_4} - (4\pi\rho + 6)6\mu^{-1}C[\|F_1\|_{L_2} + \|F_2\|_{L_2} + (g\beta\chi^{-1} + 1)\|F_3\|_{L_2}] > 0$$

Khi đó ta suy ra $\|\widehat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{H}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\widehat{T}\|^2_{\mathcal{H}_1} = 0$. Điều này chứng tỏ $\widehat{v} = 0$, $\widehat{H} = 0$, $\widehat{T} = 0$ do đó $v_1 = v_2$, $H_1 = H_2$, $T_1 = T_2$. Nếu $V_1 = V_2$, $H_1 = H_2$, $T_1 = T_2$ thì hiển nhiên Grad P_1 = Grad P_2 hay P_1 và P_2 sai khác nhau một hằng số.

Như vậy ta đã chứng minh được định lý sau :

Định lý 2. Giả sử chuẩn của $\overline{\psi}(x)$ và $\varphi(x)$ trong $\overline{L}_4(\Omega)$ và $L_4(\Omega)$ đủ nhỏ sao cho

$$|b(\overline{v}, \overline{\psi}, \overline{H})| \leqslant \frac{\mu}{12}\|\overline{v}\|_{\mathcal{H}_1} \cdot \|\overline{H}\|_{\mathcal{H}_1}; \quad |b(\overline{\psi}, \overline{v}, \overline{H})| \leqslant \frac{\mu}{12}\|\overline{v}\|_{\mathcal{H}_1} \cdot \|\overline{H}\|_{\mathcal{H}_1},$$

$$\forall \overline{v}, \overline{H} \in \mathcal{H}_1$$

$$\|\varphi\|_{L_4} \leqslant \min\left(\frac{\mu}{2C}, \frac{\mu^2}{4g\beta C^2}\right)$$

và μ đủ lớn để

$$\mu > \frac{3}{2}\{g\beta + \|\varphi\|_{L_4} + (4\pi\rho + 6)6\mu^{-1}C[\|F_1\|_{L_2} + \|F_2\|_{L_2} + (g\beta\chi^{-1} + 1)\|F_3\|_{L_2}]\}.$$

Khi đó tồn tại và duy nhất nghiệm suy rộng của bài toán (1.1) – (1.5)

KẾT LUẬN

Trong bài này, sử dụng nguyên lý Lêre – Sauder ta đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm hệ phương trình phi tuyến mô tả chuyển động dừng của chất lỏng nhớt, dẫn điện bị đốt nóng trong từ trường. Đồng thời chỉ ra rằng, với một số chất lỏng và điều kiện biên đặc biệt, nghiệm đó là duy nhất. Phương pháp này hoàn toàn có thể áp dụng cho bài toán về chuyển động dừng của chất lỏng vi cực.

Tác giả chân thành cảm ơn tiến sĩ Ngô Huy Cần đã thiết lập bài toán và hướng dẫn hoàn thành bài báo này.

Địa chỉ :
Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội

Nhận ngày 3/10/1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ГЕРШУНИ Г. З., ЖУХОВИЦКИЙ Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Наука, М., 1972.
2. СОБОЛЕВ С. Л Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издательство ЛГУ, 1950.
3. УХОВСКИЙ М. Р., ЮДОВИЧ В. Й. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, Т. 27, № 2, 1963.
4. МАДЖЕНЕС Э. Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных. Успехи Матем. Т. 21, вып. 3, Наука, 1966.
5. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, М., 1961.
6. ТЕММ Р. Уравнение Навье – Стокса теория и численный анализ Мир, М., 1981.
7. ЗАРУБИН А. Г. Задача о нестационарной свободной конвекции ЖВМ и МФ Т. 8. №6, 1968.

SUMMARY

ON THE MOTION OF HEATED FLUID IN A MAGNETIC FIELD

In these papers the steady motion of heated conducted fluid in a magnetic field is considered. The theorem of the existence of solution is proved and the conditions of solution uniqueness are indicated.