Tạp chí Cơ học T. X, 1988 số 3 (trang 13 – 19)

VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH ĐÀN HỒI HỮU HẠN TỰA TRÊN NỀN CỨNG

NGUYỄN ĐĂNG TỘ

§ ĐẶT VẤN ĐỀ

Đối với bài toán va chạm có giảm chấn giữa vật rắn và thanh đàn hồi cũng như giữa thanh đàn hồi với nhau đã được một số tác giả nghiên cứu [2, 4, 7, 8], song mới chỉ dừng lại ở việc sử dụng lí thuyết cổ điển về dao động dọc của thanh. Trên cơ sở lí thuyết dao động dọc của thanh chính xác hơn là có kể đến quán tính của dịch chuyển ngang bài toán về va chạm có đệm giảm chấn giữa vật rắn và thanh đàn hồi bán vô hạn đã được nghiên cứu [9]. Trong bài báo này tác giả tiếp tục giải quyết bài toán va chạm giữa vật rắn và thanh đàn hồi hữu hạn tựa trên nền cứng.

§1. TRUYỀN SÓNG TRONG THANH HỮU HẠN

Xét bài toán : tìm $U(x, t)$ thỏa mãn phương trình :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \mu^2 R^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad t \geqslant 0;\ 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{1.1}$$

Điều kiện đầu :

$$U = 0,\ \dot{U} = 0 \text{ khi } t = 0 \tag{1.2}$$

Điều kiện biên :

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \text{ khi } x = l \\ \sigma_x = \rho(\mu R)^2 \frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x} + E\frac{\partial U}{\partial x} &= -f(t) \text{ khi } x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Dùng phép biến đổi Laplace : $U_o(p, x) = \int\limits_0^\infty U(x, t)e^{-pt}dt$, đưa đến bài toán :

Tìm $U_o(p, x)$ thỏa mãn phương trình :

$$\frac{d^2 U_o}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2 + \mu^2 R^2 p^2} U_o = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1.4}$$

với điều kiện

$$\frac{dU_0}{dx} = -\frac{a^2}{E}\frac{f_0(p)}{a^2 + \mu^2 R^2 p^2}; \quad \text{khi } x = 0 \tag{1.5}$$

và $U_0 = 0$ khi $x = l$ (1.6)

Giải (1.4), (1.5), (1.6) ta thu được

$$U_0(p, x) = V_0(p, X) = \frac{a}{E} f_0(p) \frac{1}{p\sqrt{1 + c^2p^2}} \frac{\text{Sh}\left(\frac{p}{\sqrt{1+c^2p^2}} X\right)}{\text{Ch}\left(\frac{p}{\sqrt{1+c^2p^2}} A\right)} \tag{1.7}$$

trong đó :

$$C = \frac{\mu R}{a} = \text{const}; \quad X = \frac{l - x}{a}; \quad A = \frac{l}{a} \tag{1.8}$$

Để tìm hàm ban đầu $v(X, t)$, ta viết $V_0(p, X)$ dưới dạng :

$$V_0(p, X) = \frac{a}{E} p f_0(p) \frac{1}{p^3} G\left(\frac{1}{p}, X\right) \tag{1.9}$$

trong đó : $$G(p, X) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + c^2}} \frac{\text{Sh}\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+c^2}} X\right)}{\text{Ch}\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+c^2}} A\right)} = \frac{1}{r} H(r, X) \tag{1.10}$$

với $r = \sqrt{p^2 + c^2}$ và $$H(p, X) = \frac{\text{Sh}\left(\frac{1}{p} X\right)}{\text{Ch}\left(\frac{1}{p} A\right)} = \frac{1}{p^3} M\left(\frac{1}{p}, X\right) \tag{1.11}$$

ở đây : $$M(p, X) = \frac{1}{p^3} \frac{\text{Sh}(pX)}{\text{Ch}(pA)} \tag{1.12}$$

theo [1] ta có :

$$M(p, X) \div m(X, t) = Xt + \frac{2}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_n^3} \sin(\alpha_n X)\sin(\alpha_n t). \tag{1.13}$$

Từ đó : $$H(p, X) \div h(X, t) = \int_0^{\infty} t \cdot J_2(2\sqrt{ut}) \frac{m(X, u)}{u} du$$

$$= \frac{2}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n^2} \sin(\alpha_n X)\cos\left(\frac{t}{\alpha_n}\right). \tag{1.14}$$

$$G(p, X) \div g(X, t) = \int_0^{t} J_0[c\sqrt{t^2 - u^2}]h(X, u)du =$$

$$= \frac{2}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n^2} \sin(\alpha_n X) \int_0^{t} J_0[c\sqrt{t^2 - u^2}] \cos\frac{u}{\alpha_n} du, \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{p^3} G\left(\frac{1}{p}, X\right) \div q(X, t) = \int_0^t t \cdot J_2[2\sqrt{ut}] \frac{g(X, u)}{u} du =$$

$$\frac{2}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n^2} \sin(\alpha_n X) \int_0^{\infty} \frac{t \cdot J_2(2\sqrt{ut})}{u} \left\{ \int_0^u J_0[c\sqrt{u^2 - \xi^2}] \cos\frac{\xi}{\alpha_n} d\xi \right\} du \qquad (1.16)$$

Từ đó $$V_0(p, X) \div v(X, t) = \frac{a}{E} \int_0^t f(\tau) q'_{t-\tau}(X, t-\tau) d\tau. \qquad (1.17)$$

Nghiệm của bài toán (1.1), (1.2), (1.3) thu được là :

$$U(x, t) = \frac{a}{E} \int_0^t f(\tau) q'_{t-\tau}\left(\frac{1-x}{a}, t-\tau\right) d\tau \qquad (1.18)$$

BIỂU DIỄN NGHIỆM DƯỚI DẠNG CHUỖI

Xét hàm $$d_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{tJ_2(2\sqrt{ut})}{u} \left\{ \int_0^u J_0[c\sqrt{u^2 - \xi^2}] \cos\frac{\xi}{\alpha_n} d\xi \right\} du \qquad (1.19)$$

Gọi N là số tự nhiên sao cho : $\alpha_N c < 1$ còn $\alpha_{N+1} c > 1$ khi đó : với $1 \leqslant n \leqslant N$ ta có :

$$d_n(t) = \frac{t^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \alpha_n^3 (c\alpha_n)^{2j} {}_1F_2\left[j+1, \frac{3}{2}, 2, -\left(\frac{\alpha_n t}{2}\right)^2\right] \qquad (1.20)$$

với $n \geqslant N+1$

$$d_n(t) = 1 - \cos\frac{t}{c} - \frac{t^2}{2c^4\alpha_n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\alpha_n c)^{2k}} {}_1F_2\left[k+2, \frac{3}{2}, 2, -\left(\frac{t}{2c}\right)^2\right] \qquad (1.21)$$

Thay (1.20), (1.21), vào (1.16), sau đó tính $q'_t(x, t)$ rồi thay vào (1.18) ta thu được :

$$U(x,t) = \frac{1-x}{c} \int_0^t f(\tau) \sin\frac{t-\tau}{c} d\tau - \frac{2a^2}{EIc} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n^2} \sin\left[\alpha_n \frac{1-x}{a}\right] \times$$

$$\times \int_0^t f(\tau) \sin\frac{t-\tau}{c} d\tau + \frac{a^2}{EI} \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \sin\left[\alpha_n \frac{1-x}{a}\right] \int_0^t f(\tau) h_1(\alpha_n, t-\tau) d\tau -$$

$$- \frac{a^2}{EIc^4} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n^4} \sin\left[\alpha_n \frac{1-x}{a}\right] \int_0^t f(\tau) h_2(\alpha_n, t-\tau) d\tau, \qquad (1.22)$$

Trong đó :

$$h_1(\alpha_n, t) = \frac{2t}{1 + c^2\alpha_n^2} + 2\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k+1}}{j!} \frac{(j+k+1)!}{(k+1)!\,(2k+3)!} c^{2j}\alpha_n^{2(j+k+1)} t^{2k+3} \tag{1.23}$$

$$h_2(\alpha_n, t) = \frac{2c^2\alpha_n^2 t}{1 + c^2\alpha_n^2} + 2\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k+1}}{(k+1)!} \frac{(j+k+2)!}{(j+1)!\,(2j+3)!} \frac{1}{\alpha_n^{2k}} \frac{t^{2j+3}}{c^{2(j+k+1)}} \tag{1.24}$$

Có thể thử lại nghiệm (1.22) thỏa mãn (1.1), (1.2), (1.3).

TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN (1.1) (1.2) (1.3)

Giả sử tồn tại 2 nghiệm $U_1(x, t)$, $U_2(x, t)$ khi đó : $v(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$ thỏa mãn phương trình :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu^2 R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Điều kiện đầu : $v(x, 0) = 0$, $\dot{v}(x, 0) = 0$

Điều kiện biên : $v(l, t) = 0$

$$\left[\rho(\mu R)^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} + E\frac{\partial v}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=0} = 0.$$

Xét hàm $E(t) = \frac{1}{2}F\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \rho\mu^2R^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)^2 + E\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx$

Dễ dàng thử lại rằng : $dE(t)/dt = 0$.

Từ đó $E(t) = \text{const} = E(o) = 0$

$$E(t) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0 \Rightarrow v = \text{const} = v(x, 0) = 0,\ V \equiv 0 \text{ điều phải chứng minh}$$

Trường hợp $C = 0$: khi cho $C \to 0$ thì $N \to \infty$

Lúc này nghiệm thu được là :

$$U(x, t) = \frac{2a^2}{El}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n} \sin\left[\alpha_n \frac{l - x}{a}\right] \int_0^t f(\tau)\sin[\alpha_n(t - \tau)]d\tau \tag{1.25}$$

a) Trường hợp : $f(t) = VE\delta(t - T_o)$, $T_o > 0$ ta thu được :

$$U(x, t) = \frac{4Va}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \sin\left[\omega_n \frac{l - x}{a}\right] \sin[\omega_n(t - T_o)] \tag{1.26}$$

Với

$$\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi a}{l}$$

Kết quả này trùng hợp với kết quả ở [6]

b) Trường hợp $f(t) = E\sin\omega t$, xét với $l = 1$, $a = 1$ và trục tọa độ có gốc ở đáy của thanh, ta có :

$$U(x, t) = \frac{\sin\omega x \sin\omega t}{\omega\cos\omega} + 2\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin\omega_n x \sin\omega_n t \qquad (1.27)$$

Kết quả này cũng trùng với kết quả ở [6].

§2. VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH HỮU HẠN

Xét sự va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi hữu hạn khi có đặt điềm giảm chấn ở đầu thanh.

Theo [2, 7, 8], ứng suất ở đầu thanh $f(t)$ thỏa mãn phương trình và các điều kiện đầu :

$$\ddot{f}(t) + \frac{K}{M} f(t) + \frac{K}{F} \ddot{U}(o, t) = 0 \qquad (2.1)$$

$$f(o) = 0 \qquad (2.2)$$

$$\dot{f}(o) = \frac{K}{F} V_o \qquad (2.3)$$

Đạo hàm 2 lần theo thời gian và biến đổi ta xác định được $\ddot{U}(o, t)$. Sau đó thay vào (2.1) ta thu được phương trình xác định $f(t)$ như sau :

$$\ddot{f}(t) + \left(\frac{K}{M} + A\right) f(t) + \int_0^t \psi(t - \tau) f(\tau) d\tau = 0. \qquad (2.5)$$

Trong đó :

$$\psi(t) = \frac{K}{F} B\sin\frac{t}{C} + \frac{K}{F}[z_1(t) + z_2(t)] \qquad (2.6)$$

với

$$A = \frac{2a^2}{El} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + C^2\alpha_n^2}\ ; \ B = -\frac{2a^2}{Elc} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{1 + C^2\alpha_n^2},$$

$$z_1(t) = \frac{a^2}{El} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{1 + C^2\alpha_n^2} h_1(\alpha_n, t); \quad z_2(t) = \frac{a^2}{ElC^2} \sum_{N=n+1}^{\infty} \frac{h_2(\alpha_n, t)}{\alpha_n^2(1 + C^2\alpha_n^2)}.$$

Phương trình vi tích phân (2.5) và các điều kiện (2.2), (2.3) tương đương với phương trình Volter sau :

$$f(t) + \int_0^t \Phi(t - \tau) f(\tau) d\tau = \frac{K}{F} V_o t \qquad (2.7)$$

với :

$$\Phi(t) = Dt + N\sin\frac{t}{C} + \zeta_1(t) + \zeta_2(t) \qquad (2.8)$$

trong đó : $D = \frac{K}{M} + A + \frac{KBC}{F} = \text{const}$; $N = -\frac{KBC^2}{I} = \text{const}$,

$$\zeta_1(t) = -\frac{Ka^2}{EFI} \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n^2}{1 + C^2\alpha_n^2} \left\{ \int_0^t \left[\int_0^\xi h_1(\alpha_n, \eta)d\eta \right] d\xi \right\} \qquad (2.9)$$

$$\zeta_2(t) = \frac{Ka^2}{EFIC^4} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2(1 + C^2\alpha_n^2)} \left\{ \int_0^t \left[\int_0^\xi h_2(\alpha_n, \eta)d\eta \right] d\xi \right\} \qquad (2.10)$$

Thật vậy, ta đạo hàm (2.7) theo t và biến đổi, ta thu được (2.5). Để giải phương trình Volter (2.7) có nhiều phương pháp quen thuộc chẳng hạn ta có thể dùng phương pháp xấp xỉ liên tiếp nghiệm :

$$\{f_n(t)\} \rightrightarrows f(t),$$

trong đó :

$$f_0(t) = \frac{K}{F} V_0 t, \quad f_1(t) = \frac{K}{F} V_0 t - \int_0^t \Phi(t - \tau)f_0(\tau)d\tau$$

. . . .

$$f_n(t) = \frac{K}{F} V_0 t - \int_0^t \Phi(t - \tau)f_{n-1}(\tau)d\tau. \qquad (2.11)$$

Trong thực tế kỹ thuật, những đo đạc cho thấy : khoảng thời gian va chạm $T \leqslant 5.10^{-4}$ giây, tức là rất nhỏ.

Nếu ta chỉ giữ lại trong biểu thức của $\Phi(t)$ những số hạng chứa lũy thừa của t bậc không quá 3, từ (2.8) ta thu được

$$\Phi(t) = \lambda t + \frac{\chi}{6} t^3 \qquad (2.12)$$

trong đó : $\lambda = \frac{K}{M} + A = \text{const}$

$$\chi = \frac{KB}{FC} - \frac{2a^2K}{EIF} \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n^2}{(1 + C^2\alpha_n^2)^2} + \frac{2Ka^2}{EFIC^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(1 + C^2\alpha_n^2)^2} = \text{const} \qquad (2.13)$$

Bây giờ ta giải (2.7) bằng phương pháp biến đổi Laplace khi đó (2.7) sẽ đưa đến phương trình :

$$f_0(p) + \Phi_0(p)f_0(p) = \frac{K}{F} V_0 \frac{1}{p^2} \Rightarrow f_0(p) = \frac{\frac{K}{F} V_0}{p^2[1 + \Phi_0(p)]}$$

trong đó : $f_0(p) \div f(t)$; $\Phi(t) \div \Phi_0(p) = \frac{\lambda}{p^2} + \frac{\chi}{p^4}$

Từ đó : $$f_0(p) = \frac{Vp^2}{p^4 + \lambda p^2 + \chi}, \quad V = \frac{K}{F} V_0 \qquad (2.14)$$

Đặt $$\Delta = \sqrt{\lambda^2 - 4\chi}$$

a) Trường hợp $\Delta \neq 0$; $f_o(p) = (\beta^2 - \alpha^2) \dfrac{\rho p^2}{(p^2 + \alpha^2)(p^2 + \beta^2)}$

trong đó: $$\alpha^2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta}}{2}; \quad \beta^2 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \rho = \frac{V}{\beta^2 - \alpha^2},$$

từ đó $$f_o(p) \div f(t) = \rho\beta \sin\beta t - \rho\alpha \sin\alpha t \qquad (2.15)$$

b) Trường hợp $\Delta = 0$; $f_o(p) = \dfrac{Vp^2}{(p^2 + \gamma^2)^2}$; $\gamma^2 = \lambda/2$.

Từ đó $$f_o(p) \div f(t) = \frac{V}{2\gamma} \sin(\gamma t) + \frac{V}{2} t\cos\gamma t. \qquad (2.16)$$

Thay $f(t)$ tìm được từ (2.11) hoặc trường hợp gần đúng (2.15) (2.16) vào (1.22) ta xác định được dịch chuyển dọc trục, từ đó xác định được biến dạng và ứng suất tại mọi tiết diện trong thanh.

Kết luận:

Bài toán đến đây kể như được giải quyết trọn vẹn và có thể ứng dụng trong bài toán kỹ thuật về va chạm của búa vào cọc tựa trên nền đất cứng.

Cuối cùng tác giả xin chân thành cảm ơn giáo sư 1 Phạm Huyền, giáo sư 1 Nguyễn Thúc An đã thiết lập bài toán và hướng dẫn để hoàn thành bài báo này.

Địa chỉ
Trường Đại học Thủy lợi

Nhận ngày 11/7/1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. БЕЙТМЕН Г., ЭРДЕЙИ А. Таблицы интегральных преобразований. Том I, Наука, М., 1969.
2. БИДЕРМАН В. Л. Теория удара. Москва, 1952.
3. ГРИГОЛЮК Э.И., СЕЛЕЗОВ И. Г. Неклассические теории колебаний стержний, пластин и оболочек. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5, М., 1973.
4. КИЛБЧЕВСКИЙ Н. А. Теория соударений твердых тел. Киев, 1969.
5. ЛЯВ А. Математическая теория упругости. Изд. НКТН, СССР, М., 1935.
6. СИДОРОВ Ю. В., ФЕДОРЮК М.В., ШАБУНИН М. И. Лекции по теории функций комплесного переменного. Наука, М., 1982.
7. NGUYỄN THÚC AN, VŨ VĂN NGUYỆN. Va chạm dọc của hai thanh đàn hồi. Tạp chí Cơ học số 1, 1983.
8. NGUYỄN THÚC AN. Áp dụng lý thuyết sóng để xác định ứng suất trong cọc. Tạp chí KHKT số 2, 1975.
9. NGUYỄN ĐĂNG TỐ. Va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi bán vô hạn. Tạp chí Cơ học số 1, 1983.

SUMMARY

IMPACT OF A RIGID BODY AGAINST A FINITE ELASTIC BAR SET ON A RIGID FOUNDATION

The solutions of the impact-problems of a rigid body against an elastic bar formely are based on the classical longitudinal vibration theory of an elastic bar. In this paper, we based on the more precise theory to deal with the impact problems of a rigid body against a finite elastic bar set on a foundation.