Tạp chí Cơ học T.X, 1988 số 3 (trang 1 — 6)

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH ĐỘ TIN CẬY CỦA CÁC CƠ HỆ TRONG ĐIỀU KIỆN KHÔNG ĐẦY ĐỦ

NGUYỄN VĂN PHÒ

§1. MỞ ĐẦU

Bài này chúng tôi nhằm giải quyết vấn đề xác định độ tin cậy của các cơ hệ, không đòi hỏi nhiều thông tin như các phương pháp hiện có [1]. Phương pháp nêu trong bài này có thể áp dụng cho hệ bất kỳ như hệ sinh thái, hệ kỹ thuật, hệ quản lý, v.v...

Trong bài này chúng tôi mở rộng các kết quả trong [3], đưa ra một cách biểu diễn mới về độ tin cậy. Từ đó phát biểu bài toán tìm độ tin cậy dưới dạng bài toán quy hoạch ngẫu nhiên. Với những giả thiết nhất định, chúng tôi chuyển bài toán cực trị ngẫu nhiên về bài toán tiền định.

Cũng trong bài này chúng tôi nêu một thuật toán để giải bài toán cực trị ngẫu nhiên, cho phép tìm độ tin cậy một cách thuận lợi.

Điều đáng chú ý là sơ đồ giải bài toán của chúng tôi chỉ cần chứng tỏ bài toán tồn tại phương án là đủ để chuyển qua bước sau, không cần tìm phương án tối ưu từng bước.

Thông tin cần thiết để tính $P(t)$ chỉ là thông tin về tác động ngoài $q(t)$, không đòi hỏi các giả thiết về sự vượt ngưỡng [1].

§ 2. ĐỊNH NGHĨA ĐỘ TIN CẬY

Theo [1] độ tin cậy là xác suất đồng thời

$$P(t) = P\left\{\begin{array}{l} L\vec{u} = \vec{q} \\ M\vec{u} = \vec{v} \\ \overrightarrow{f(v)} \in \Omega_c \\ \tau \in [o, t] \\ \vec{r} \in V^* \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Tương tự [3] ta thay các hệ thức trong (2.1) bởi các hệ thức xác suất :

$$\overrightarrow{Lu} = \vec{q} \rightarrow P(\overrightarrow{Lu} = \vec{q}) = 1 \qquad (2.2)$$

$$M\vec{u} = \vec{v} \rightarrow P(M\vec{u} = \vec{v}) = 1 \qquad (2.3)$$

$$\overrightarrow{f(v)} \in \Omega_o \rightarrow P\{\overrightarrow{f(v)} \in \Omega_o, \tau \in [o, t], \vec{r} \in V*\}$$

Các điều kiện (2.1) – (2.4) dễ dàng biểu diễn dưới dạng

$$P\{\varphi_j(\vec{y}, \vec{\theta}, t) \leqslant C_j, \quad \tau \in [o, t], \quad \vec{r} \in V^*\} \geqslant P_j \tag{2.5}$$

$\forall P_j \in [0, 1]$ là hằng số chưa xác định

Ta đi đến định nghĩa :

Độ tin cậy P(t) của hệ thống là xác suất

$$P(t) = \max_{\left\{\begin{array}{l}\vec{u}, \vec{v} \in X \\ \tau \in [o, t] \\ \vec{r} \in V^*\end{array}\right\}} \min_{\{j\}} P_j \tag{2.6}$$

Ý nghĩa của biểu diễn (2.6) là trên tập X, tập xác định bởi các biểu thức trong (2.1), tìm $\vec{u}$, $\vec{v}$ sao cho P_j min đạt cực đại.

Dễ dàng thấy rằng P(t) xác định theo (2.6) tương đương với P(t) trong [1].

Để thuận lợi cho việc xây dựng thuật toán tìm P(t) ta chọn $P_j \equiv P_o$ $\forall j \in \overline{[1, n]}$. Chọn như vậy không ảnh hưởng đến giá trị của P(t). Vì nếu tồn tại P_j^* nào đó, mà $P_j^* > P_o$, nghĩa là tồn tại một điều kiện chặt hơn, mà ta thay bởi P_o thì không làm cho P(t) giảm, vì $P(t) = \min_{\{j\}} P_j$. Mặt khác khi thay P_j^* bởi P_o tức là ta đã giảm nhẹ điều kiện, việc đó có khả năng nâng cao P(t).

Trường hợp, mức độ quan trọng của các điều kiện khác nhau, nói cách khác mức quan trọng của độ an toàn theo các miền con trong không gian chất lượng là khác nhau, ta dùng trọng số α_j, α_j được xác định trước.

Ta đặt $\qquad P_j = \alpha_j P_o \in [0, 1]$

Các α_j được chọn sao cho với các điều kiện có mức độ quan trọng hay nguy hiểm hơn thì được ứng với α_j lớn hơn và ngược lại

Từ $\qquad \alpha_j P_o \in [0, 1] \Rightarrow P_o^{(j)} \in [0, 1/\alpha_j]$

$$\Rightarrow P_o \in [0, 1/\alpha_{j\max}]$$

Nếu có những P_j cho trước thì được giữ nguyên trong bài toán, không cần mang trọng số.

§3. SƠ ĐỒ TÍNH ĐỘ TIN CẬY

Tính P(t) theo (2.6) thực chất tìm P_o cực đại và thỏa mãn các điều kiện trong (2.1). Vì vậy, để giải bài toán ta thực hiện một quá trình lặp, nhằm nâng cao P_o.

Cho trước $P_o \in [0, 1]$, hãy xét xem với P_o đã chọn có thỏa mãn các điều kiện (2.5) hay không ? Muốn vậy ta giải bài toán.

$$(\mathrm{I}) \left\{\begin{array}{l} P\{\varphi_k \leqslant C_k\} \to \max \\ \text{Với các điều kiện } \left\{\begin{array}{l} P\{\varphi_i \leqslant C_i\} \geqslant P_o, \; i = \overline{1, n} \\ \forall \vec{r} \in V^*, \; \forall \tau \in [o, t] \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Nếu bài toán (I) có nghiệm (có phương án) thì chắc chắn bé hơn hoặc bằng P(t) và ngược lại. Vì vậy, ta chọn P_o trên một tập rời rạc.

$$P_o = \{P_o^{(1)} \leqslant P_o^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant P_o^{(m)}\}$$

Với $P_o = P_o^{(i)}$ bài toán (I) tồn tại phương án thì ta chuyển sang chọn $P_o = P_o^{(i+1)}$. Quá trình tiếp tục tương tự cho đến khi bài toán (I) không tồn tại phương án thì quá trình lặp dừng lại.

Giá trị P(t) chính là P_o cực đại mà bài toán (I) tồn tại phương án (t được coi là tham số).

Hiển nhiên, P_o phụ thuộc t, vì φ_i phụ thuộc τ mà $\tau \in [0, t]$.

Rõ ràng trong mỗi phép lặp ta chỉ cần tìm phương án xuất phát (không giả tạo) của bài toán (I) là ta chuyển sang bước lặp sau. Đó là điều vô cùng thuận lợi để giải bài to n cực trị trên máy tính điện tử.

§4. CHUYỂN BÀI TOÁN NGẪU NHIÊN VỀ BÀI TOÁN TIỀN ĐỊNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Xét bài toán ngẫu nhiên (I).

Trường hợp $\varphi_i(\vec{y}, \vec{\theta}, t) \leqslant C_j$

Có thể biểu diễn dưới dạng

$$g_j(\vec{y}, t) \leqslant k_j(\vec{\theta})\,;\ j = \overrightarrow{1, r} \tag{4.1}$$

Nhiều bài toán cơ học có thể biểu diễn dưới dạng (4.1) hoặc tương tự.

Tương tự [2] ta gọi $H_j(Z)$ là hàm phân bố xác suất của $K_j(\vec{\theta})$, theo định nghĩa ta có:

$$H_j(z) = P\{K_j(\vec{\theta}) < z\}$$

hay:

$$1 - H_j(z) = P\{K_j(\vec{\theta}) \geqslant z\}$$

$$\Rightarrow 1 - H_j(g_j) = P\{K_j(\vec{\theta}) \geqslant g_j(\vec{y}, \tau)\} \geqslant P_o$$

Vậy bài toán (I) trở thành

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} 1 - H_k\{g_k(\vec{y}, \tau)\} \to \max \\ \text{với điều kiện} \begin{cases} 1 - H_j(g_j) \geqslant P_o \\ \vec{r} \in V^*, \tau \in [0, t] \end{cases} \end{cases}$$

Vì H_j là hàm không giảm, nên ta có bài toán tiền định tương đương

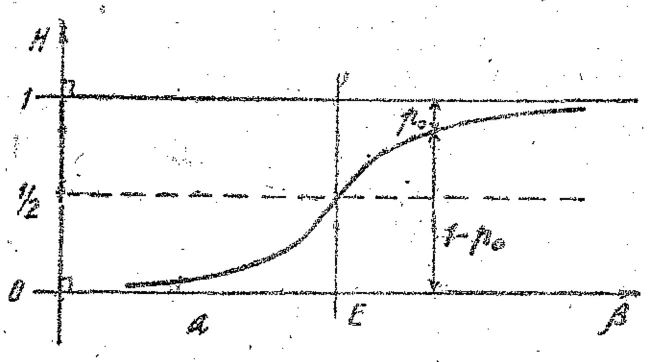
$$(\mathrm{III}) \begin{cases} g_k(\vec{y}, \tau) \to \min \\ \text{Với điều kiện} \begin{cases} g_j(\vec{y}, \tau) \leqslant \beta_j^{max};\ j = \overline{1, n} \\ \tau \in [0, t], \vec{r} \in V^* \end{cases} \end{cases}$$

τ là tham số bé

Trong đó β_j^{max} là số lớn nhất thỏa mãn $1 - P_o \geqslant H_j(\beta_j)$
Vì Hj là hàm không giảm, để xác định β_j^{max} thỏa mãn ta đi đến giải phương trình

$$1 - P_o = H_j(\beta_j)$$

Phương trình này có thể giải bằng đồ thị (hình vẽ 1)



Hình 1

Với một giá trị P_o, ta xác định được $\beta_j^{max} = \max\limits_{\{j\}} \beta_j$ tương ứng, theo giá trị đó kiểm tra lại xem bài toán (III) có tồn tại phương án không? Nếu có, ta tiếp tục tăng P_o và làm tương tự cho đến khi (III) không tồn tại phương án. Giá trị $P_o^{(i)}$ cuối cùng còn tồn tại phương án là giá trị phải tìm.

Chú ý: Nếu bài toán (I) chứa những điều kiện tiền định thì ta bổ sung điều kiện đó vào bài toán (III).

§5. THÍ DỤ

Xét thanh lăng trụ, chịu tác dụng lực dọc tựa tĩnh Q(t) chiều dài của thanh là L và các đặc trưng E, J. Hãy xác định độ tin cậy của thanh khi coi các giới hạn bền, kéo, nén R và $\pi^2 EJ/4L^2$ là những đại lượng ngẫu nhiên đã biết.

Độ tin cậy là:

$$P(t) = P\left\{-\frac{\pi^2 EJ}{4L^2} \leqslant N(\tau) \leqslant R,\ \tau \in [0, t]\right\}$$

$$P(t) = P\left\{\begin{array}{l} N(\tau) \leqslant R \\ -N(\tau) \leqslant \dfrac{\pi^2 EJ}{4L^2} \\ \tau \in [0, t] \end{array}\right.$$

Trong đó $\qquad N(t) \in Q(t)$

Đặt $\qquad \varphi_1 = N,\ \varphi_2 = -N$

Để tìm P(t) ta giải bài toán quy hoạch ngẫu nhiên

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad P\{N \leqslant R\} \geqslant P_o \\ \text{Với các điều kiện } \left\{\begin{array}{l} P\{N \leqslant R\} \geqslant P_o \\ P\{-N \leqslant \pi^2 EJ/4L^2\} \geqslant P_o,\ \tau \in [0, t] \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Chọn $g_1 = N$, $K_1 = R$, $g_2 = -N$, $K_2 = \pi^2EJ/4L^2$

Ẩn của bài toán là N, τ là tham số.

Giả sử hàm phân phối xác suất của R và H_1 và của $\pi^2EJ/4L^2$ là H_2.

Ta chuyền sang bài toán

$$\begin{cases} & 1 - H_1 \to \max \\ \text{Với điều kiện} & \begin{cases} 1 - H_1 \geqslant P_o \\ 1 - H_2 \geqslant P_o \end{cases} \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} & g_1 \to \min \\ \text{với các điều kiện} & \begin{cases} g_1 \leqslant \beta_1^{max} \\ g_2 \leqslant \beta_2^{max} \end{cases} \end{cases}$$

Trong đó. β_1^{max} và β_2^{max} được xác định từ các phương trình

$$1 - P_o = H_1(\beta_1);$$

$$1 - P_o = H_2(\beta_2).$$

Cuối cùng đi đến bài toán tiền định

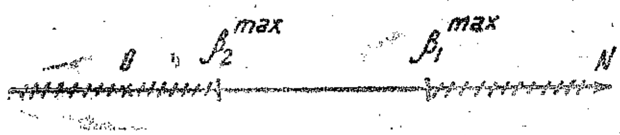
$$(*) \begin{cases} & N \to \min \\ \text{Với điều kiện} & \begin{cases} N \leqslant \beta_1^{max} \\ -N \leqslant \beta_2^{max} \end{cases} \end{cases}$$

Ở đây ta coi τ là tham số, nên khi cho nhận một tập giá trị rời rạc $\tau = \{\tau_i\}$ thì số điều kiện bài toán tăng lên. Trường hợp riêng thì chỉ cần xét các giá trị đặc biệt của τ.

Ta xét một số trường hợp của Q(t).

1. Trường hợp Q = N là hằng số

Bài toán (*) có thể giải dễ dàng bằng đồ thị (hình 2)



Hình 2

Giả sử $$\beta_1^{max} > \beta_2^{max}$$

với $P_o^{(1)}$ tương ứng tập giá trị $N : \left[-\beta_2^{max},\ \beta_1^{max}\right]$

Chừng nào tập $[-\beta_2^{max}, \beta_1^{max}]$ không trống (nghĩa là tồn tại phương án) thì ta tiếp tục tăng P_o. Vì $N \leqslant N_o$ nên P_o tăng thì β_1^{max} giảm và giảm đến mức $N = \beta_1^{max}$ thì dừng lại, lúc đó $P(t) = P_o$ tương ứng.

2. Trường hợp $N(t) = F(t)$ tiền định thì ta chọn

$$N_o = \max f(t)$$

3. Trường hợp $N(t) = a(t) + \Delta N(\theta, t)$ trong đó a là kỳ vọng toán còn $\Delta N(\theta, t)$ là đại lượng hay quá trình ngẫu nhiên đã biết các đặc trưng. Nói chung $a = a(t)$.

Khi đó

$$P(t) = P\left\{-\frac{\pi^2EJ}{4L^2} - \Delta N(\theta, \tau) \leqslant a(\tau) \leqslant R - \Delta N(\theta, \tau),\quad \tau \in [0, t]\right\}$$

Giả sử với t xác định, ta biết được hàm phân phối xác suất của

$$\left(-\frac{\pi^2 EJ}{4L^2} - \Delta N\right) \quad \text{và} \quad (R - \Delta N)$$

thì tương tự như trên, ta có thể giải bài toán một cách dễ dàng.

Trong thí dụ đơn giản trên, ta đã không quan tâm đến điều kiện $L\vec{u} = \vec{q}$ (vì đã cho $N = Q$). Trường hợp cần đưa $L\vec{u} = \vec{q}$ vào bài toán, thì về mặt phương pháp không có khó khăn. Song để đơn giản việc tính toán, ta đưa $L\vec{u} = \vec{q}$ về hệ thức tiền định tương tự trong [1].

KẾT LUẬN

Với cách biểu diễn độ tin cậy $P(t)$ theo (2.6) đã cho phép ta phát biểu bài toán xác định độ tin cậy dưới dạng bài toán quy hoạch ngẫu nhiên (I). Thuật toán giả nêu ở § 3 là tổng quát và vô cùng thuận lợi trong tính toán và chỉ cần đòi hỏi thông tin về tải trọng ngoài.

Địa chỉ
Viện KHKTXDCB – UBXDCBNN

Nhận ngày 25/5/1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. БОЛОТИН В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчётах сооружений. Стройиздат Москва, 1982.
2. ЕРМОЛЬЕВ Ю. М. Методы стохастического программирования. Наука. Москва, 197[illegible]
3. NGUYỄN VĂN PHÓ. Về một mô hình toán học của lý thuyết độ tin cậy. Tạp chí Cơ học số 2, 1985.

SUMMARY

ON A METHOD FOR SOLVING THE RELIABILITY PROBLEM OF THE MECHANICAL SYSTEM

In this paper the problem of reliability is formulated in stochastic programming forms and corresponding algorithms are given.

In some ordinary conditions of mechanical system, stochastic programming problems can change by that ones of the deterministic mathematical programming.